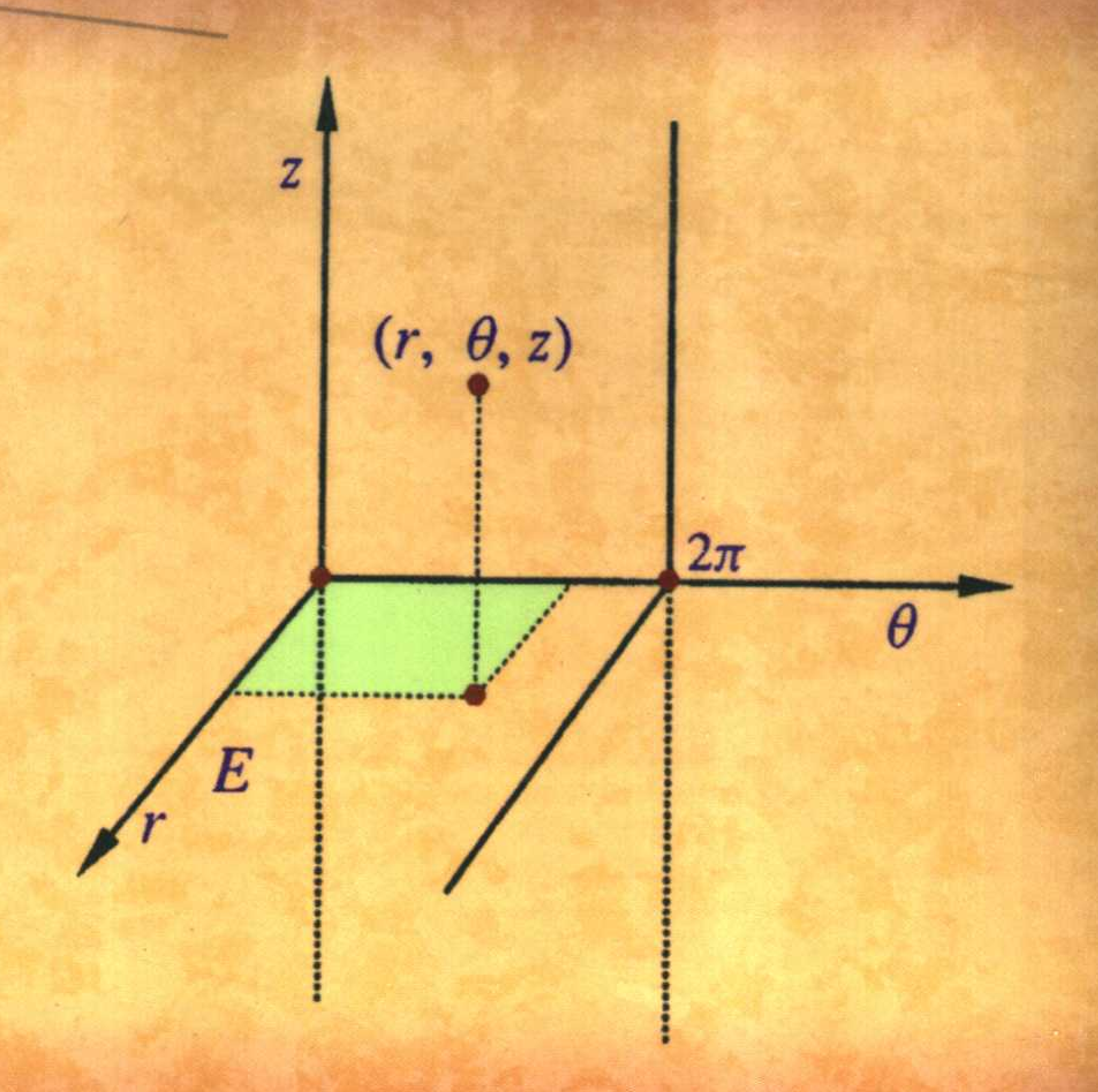


图灵数学·统计学丛书 16





Problems in Real Analysis

实分析习题集

(第 2 版)

[美] Charalambos D. Aliprantis
Owen Burkinshaw 著
朱来义 黄志勇 译



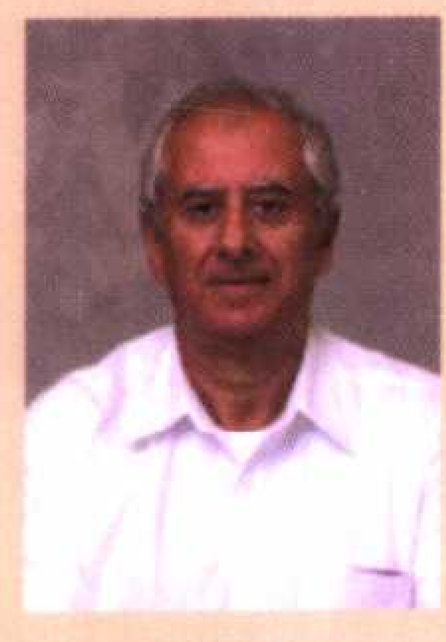
实分析习题集（第2版）

Problems in Real Analysis

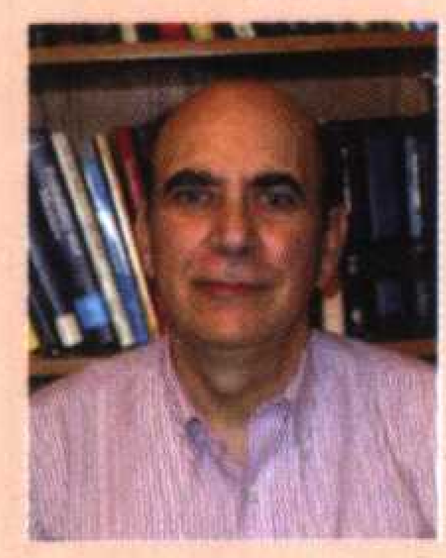
“这本书太棒了！它几乎涵盖了实分析课程中所有主题。漂亮的解题非常有助于增强读者对问题的理解。这本书的价值是难以估量的，甚至可以说是无价之宝。”

—— Amazon.com

本书是优秀的教学辅导书，不但教给读者基本的证明方法，还给出了609个实分析问题的完全解答。这些问题难度各异，不但适合数学专业本科生和研究生学习实分析之用，也适合其他专业科研人员和师生参考。



Charalambos D. Aliprantis 国际著名数理经济学家，普度大学数学系和经济学系教授，*Economic Theory*，*Annals of Finance* 等著名期刊主编。Aliprantis 教授在一般均衡理论、不完备市场理论、泛函分析、实分析、测度论等数学和经济学的多个领域著述颇丰，主要著作有 *Principles of Real Analysis*，*Existence and Optimality of Competitive Equilibria*，*Games and Decision Making* 等。



Owen Burkinshaw 国际著名数理经济学家，普度大学数学科学系教授。Burkinshaw 教授在泛函分析及数理经济学等领域作出了许多贡献，其主要著作有 *Positive Operators*，*Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics* 等。

本书译自原版 *Problems in Real Analysis*，
并由 Elsevier 授权出版。



本书相关信息请访问：
图灵网站 http://www.turingbook.com
读者/作者热线：(010) 88593802
反馈/投稿/推荐信箱： contact@turingbook.com

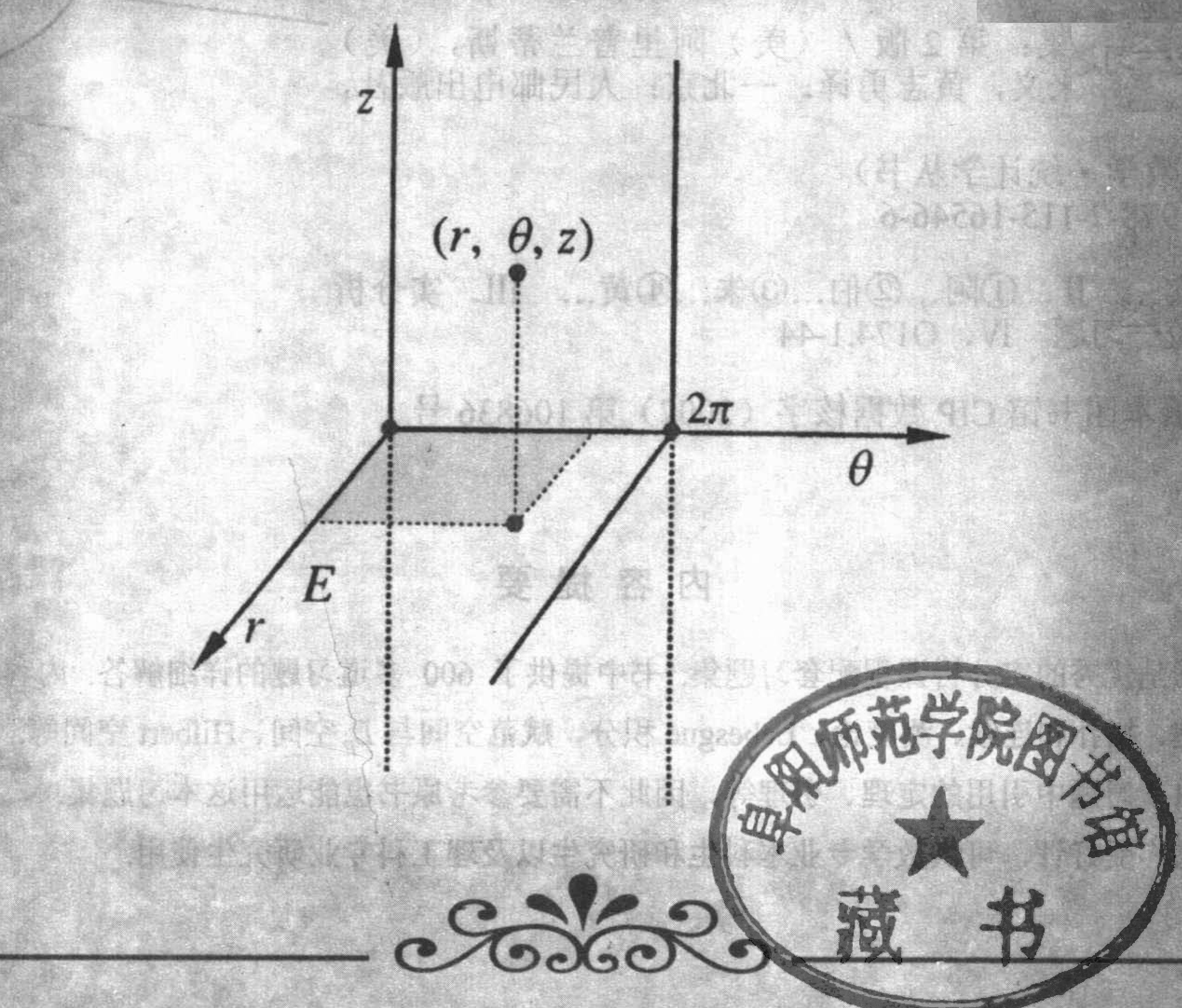
分类建议 数学／基础数学

人民邮电出版社网址 www.ptpress.com.cn



ISBN 978-7-115-16546-6/O1
定价：39.00 元

TURING 图灵数学·统计学丛书 16



Problems in Real Analysis

实分析习题集

（第2版）

Charalambos D. Aliprantis
Owen Burkinshaw 著
朱来义 黄志勇 译

人民邮电出版社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

实分析习题集：第2版 / （美）阿里普兰蒂斯，（美）伯金肖著；朱来义，黄志勇译．—北京：人民邮电出版社，2007.11
（图灵数学·统计学丛书）
ISBN 978-7-115-16546-6

Ⅰ．实… Ⅱ．①阿…②伯…③朱…④黄… Ⅲ．实分析高等学校—习题 Ⅳ．O174.1-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第106836号

内容提要

本书是优秀的实分析课程配套习题集．书中提供了600多道习题的详细解答．内容涉及实分析基础、拓扑和连续、测度论、Lebesgue积分、赋范空间与L_p空间、Hilbert空间等．书后附录中列出了习题中引用的定理、引理等，因此不需要参考原书也能运用这本习题集．

本书广受好评，可供数学专业本科生和研究生以及理工科专业研究生使用．

图灵数学·统计学丛书

实分析习题集（第2版）

◆ 著 [美] Charalambos D. Aliprantis Owen Burkinshaw
译 朱来义 黄志勇
责任编辑 明永玲

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街14号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址 http://www.ptpress.com.cn
北京铭成印刷有限公司印刷
新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本：700×1000 1/16
印张：20
字数：497千字 2007年11月第1版
印数：1–4 000册 2007年11月北京第1次印刷

著作权合同登记号 图字：01-2007-2130号

ISBN 978-7-115-16546-6/O1

定价：39.00元

读者服务热线：(010)88593802 印装质量热线：(010)67129223

前　言

本书包含了*Principles of Real Analysis*(Academic Press, 1998, the third edition)一书中609个习题的完整解答. 这些习题根据该书的编排分成了40节.

所有解答都是基于该书所讲内容, 并频繁引用了书中的结果. 例如，参考定理7.3和参考例28.4是指参考《实分析原理》第3版中的定理7.3和例28.4. 书后附录集中列出了习题中引用的定理、引理等.

本习题集只对那些"正确"使用它的学生有帮助. 也就是说, 学生只有在经过努力解题之后, 才应该查看习题解答. 若事先没有尝试解决这个问题, 学生就参考其解答, 这对自己将是极不负责任的. 得出一个不同于本书提供的解答, 对学生来说将是一种真正的挑战.

我们向所有对内容和习题提出建设性建议和指正的人表达最真诚的谢意. 特别感谢Y. 亚布拉莫维奇(Yuri Abramovich)教授在本习题集写作期间所做的贡献和所提的建议.

C. D. ALIPRANTIS 和 O. BURKINSHAW
1998年7月
于印第安纳西拉菲亚特

目　录

第 1 章　实分析基础

1．初等集合论

习题1.1　证明下列集合论关系式:

(1) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ 和
$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(2) $(A\cup B)\backslash C=(A\backslash C)\cup(B\backslash C)$和
$(A\cap B)\backslash C=(A\backslash C)\cap(B\backslash C)$;

(3) $A\backslash B=A\cap B^{c}$;

(4) $A\subseteq B\Leftrightarrow B^{c}\subseteq A^{c}$;

(5) $(A\cup B)^{c}=A^{c}\cap B^{c}$和$(A\cap B)^{c}=A^{c}\cup B^{c}$.

还有, 对于任何函数$f:X\to Y$, 证明下列结论:

(6) $f(\cup_{i\in I}A_i)=\cup_{i\in I}f(A_i)$;

(7) $f(\cap_{i\in I}A_i)\subseteq\cap_{i\in I}f(A_i)$;

(8) $f^{-1}(\cup_{i\in I}B_i)=\cup_{i\in I}f^{-1}(B_i)$;

(9) $f^{-1}(\cap_{i\in I}B_i)=\cap_{i\in I}f^{-1}(B_i)$;

(10) $f^{-1}(B^{c})=[f^{-1}(B)]^{c}$

解　(1) 我们只证明第一个公式. 我们有

$$\begin{aligned}x\in(A\cup B)\cap C&\Leftrightarrow x\in A\cup B\quad\text{并且}\quad x\in C\\&\Leftrightarrow[x\in A\quad\text{或者}\quad x\in B]\quad\text{并且}\quad x\in C\\&\Leftrightarrow[x\in A\quad\text{并且}\quad x\in C]\quad\text{或者}\quad[x\in B\quad\text{并且}\quad x\in C]\\&\Leftrightarrow x\in A\cap C\quad\text{或者}\quad x\in B\cap C\\&\Leftrightarrow x\in(A\cap C)\cup(B\cap C).\end{aligned}$$

(2) 我们仍然只证明第一个公式. 注意到

$$\begin{aligned}x\in(A\cup B)\backslash C&\Leftrightarrow x\in A\cup B\quad\text{并且}\quad x\notin C\\&\Leftrightarrow[x\in A\quad\text{或者}\quad x\in B]\quad\text{并且}\quad x\notin C\\&\Leftrightarrow[x\in A\quad\text{并且}\quad x\notin C]\quad\text{或者}\quad[x\in B\quad\text{并且}\quad x\notin C]\\&\Leftrightarrow x\in A\backslash C\quad\text{或者}\quad x\in B\backslash C\\&\Leftrightarrow x\in(A\backslash C)\cup(B\backslash C).\end{aligned}$$

(3) 注意到

$$\begin{aligned} x \in A \backslash B &\Leftrightarrow x \in A \quad \text{并且} \quad x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \quad \text{并且} \quad x \in B^c \Leftrightarrow x \in A \cap B^c. \end{aligned}$$

(4) 假设$A \subseteq B$. 那么, $x \in B^c$ 意味着$x \notin B$, 从而$x \notin A$(即$x \in A^c$), 因此$B^c \subseteq A^c$. 另一方面, 假如$B^c \subseteq A^c$ 成立, 那么(由前一个情形) 我们有$A = (A^c)^c \subseteq (B^c)^c = B$.

(5) 注意到

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B &\Leftrightarrow x \notin A \quad \text{或者} \quad x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \quad \text{或者} \quad x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c. \end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B &\Leftrightarrow x \notin A \quad \text{并且} \quad x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \quad \text{并且} \quad x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

(6) 我们有

$$\begin{aligned} y \in f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &\Leftrightarrow \exists \quad x \in \bigcup_{i \in I} A_i \text{ 使得 } \quad y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists \quad i \in I \text{ 使得 } \quad x \in A_i \text{ 并且 } \quad y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists \quad i \in I \text{ 使得 } \quad y \in f(A_i) \Leftrightarrow y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i). \end{aligned}$$

(7) 从包含关系$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq f(A_j)$ 对每一个j都成立, 我们知道

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i).$$

(8) 我们有

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i \in I} B_i \Leftrightarrow \exists \quad i \in I \text{ 使得 } \quad f(x) \in B_i \\ &\Leftrightarrow \exists \quad i \in I \text{ 使得 } \quad x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i). \end{aligned}$$

(9) 注意到

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i \in I} B_i \Leftrightarrow \text{ 对一切} i \in I, \quad f(x) \in B_i \\ &\Leftrightarrow \text{ 对一切} i \in I, \quad x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i). \end{aligned}$$

(10) 注意到

$$x \in f^{-1}(B^c) \Leftrightarrow f(x) \in B^c \Leftrightarrow f(x) \notin B$$
$$\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in [f^{-1}(B)]^c.$$

习题1.2 对两个集合A和B, 证明下列结论是等价的:

(a) $A \subseteq B$;

(b) $A \cup B = B$;

(c) $A \cap B = A$.

解 (a) $\Rightarrow$ (b) $B \subseteq A \cup B$ 显然成立. 另一方面, 若$x \in A \cup B$, 那么$x \in A$ 或者$x \in B$, 因此无论哪一种情况下都有$x \in B$. 这就意味着$A \cup B \subseteq B$, 因此$A \cup B = B$. (b)$\Rightarrow$(c) 由上一题的(1), 我们有

$$A \cap B = A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B) = A.$$

(c) $\Rightarrow$ (a)显然, $A = A \cap B \subseteq B$.

习题1.3 对任何3个集合A, B和C, 证明$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$[1] 成立.

解 首先注意到, 对任何3个集合X, Y 和Z, 我们有

$$X\Delta Y\backslash Z = [X\backslash(Y \cup Z)] \cup [Y\backslash(X \cup Z)]$$

和

$$Z\backslash(X\Delta Y) = [Z\backslash(X \cup Y)] \cup [X \cap Y \cap Z)].$$

比方说, 要证明第一个等式, 注意到

$$\begin{aligned} x \in X\Delta Y\backslash Z \quad &\Leftrightarrow [x \in X\backslash Y \quad \text{或者} \quad x \in Y\backslash X] \text{ 并且} x \notin Z \\ &\Leftrightarrow [x \in X, x \notin Y, \text{并且} \quad x \notin Z] \quad \text{或者} \quad [x \in Y, x \notin X, \quad \text{并且} \quad x \notin Z] \\ &\Leftrightarrow x \in [X\backslash(Y \cup Z)] \cup [Y\backslash(X \cup Z)]. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} (A\Delta B)\Delta C &= [(A\Delta B)\backslash C] \cup [C\backslash(A\Delta B)] \\ &= [A\backslash(B \cup C)] \cup [B\backslash(A \cup C)] \cup [C\backslash(A \cup B)] \cup [A \cap B \cap C] \\ &= \{[A\backslash(B \cup C)] \cup (A \cap B \cap C)\} \cup \{[B\backslash(C \cup A)] \cup [C\backslash(B \cup A)]\} \\ &= [A\backslash(B\Delta C)] \cup [(B\Delta C)\backslash A] \\ &= A\Delta(B\Delta C). \end{aligned}$$

1. $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$. ——译者注

习题1.4　给出一个函数示例$f: X \to Y$和X的两个子集A和B, 使得$f(A\cap B) \neq f(A)\cap f(B)$.

解　定义$f: \{0,1\} \to \{0,1\}$为$f(0)=f(1)=0$. 如果$A=\{0\}$, $B=\{1\}$, 那么$f(A\cap B)=\varnothing \neq \{0\} = f(A)\cap f(B)$.

习题1.5　对于函数$f: X \to Y$, 证明下列3个命题是等价的:

(a) f是一对一的;

(b) 对所有的$A, B \in \mathcal{P}(X)$[1], $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$成立;

(c) 对X的任何两个互不相交的子集A和B, 有$f(A)\cap f(B)=\varnothing$.

解　(a) ⇒ (b) 若$y \in f(A)\cap f(B)$, 则存在$a\in A$和$b\in B$使得$y=f(a)=f(b)$. 因为f是一对一的, 所以$a=b\in A\cap B$, 从而$y \in f(A\cap B)$. 因此$f(A)\cap f(B) \subseteq f(A\cap B) \subseteq f(A)\cap f(B)$.

(b) ⇒ (c) 显然.

(c) ⇒ (a) 设$f(a)=f(b)$. 若$a\neq b$, 那么两个集合$A=\{a\}$和$B=\{b\}$满足$A\cap B=\varnothing$, 然而$f(A)\cap f(B)=\{f(a)\}\neq\varnothing$.

习题1.6　设$f: X \to Y$是一个函数. 证明$f(f^{-1}(A)) \subseteq A$对所有的$A\subseteq Y$成立, $B\subseteq f^{-1}(f(B))$对所有的$B\subseteq X$成立.

解　显然, $x\in f^{-1}(A)$当且仅当$f(x)\in A$. 因此, $f(f^{-1}(A))\subseteq A$. 同样, $x\in f^{-1}(f(B))$当且仅当$f(x)\in f(B)$, 从而$B\subseteq f^{-1}(f(B))$成立.

习题1.7　证明函数$f: X\to Y$是到上的, 当且仅当$f(f^{-1}(B))=B$对所有的$B\subseteq Y$成立.

解　假设f是到上的, 而且$B\subseteq Y$. 若$b\in B$, 那么存在$a\in X$使得$f(a)=b$; 显然, $a\in f^{-1}(B)$. 从而, $b=f(a)\in f(f^{-1}(B))$, 因此$B\subseteq f(f^{-1}(B))\subseteq B$成立.

反之, 注意到关系式$f(f^{-1}(\{b\}))=\{b\}$蕴涵着对一切$b\in Y$, $f^{-1}(\{b\})\neq\varnothing$, 因此$f$是到上的.

习题1.8　设$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. 如果$A\subseteq Z$,证明

$$(g\circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)).$$

解　注意到

$$x\in(g\circ f)^{-1}(A) \Leftrightarrow g(f(x))\in A \Leftrightarrow f(x)\in g^{-1}(A) \Leftrightarrow x\in f^{-1}(g^{-1}(A)).$$

习题1.9　证明函数的复合满足结合律. 即证明如果$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} V$, 那么$(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$.

解　注意到, 对一切$x\in X$有

$$[(h\circ g)\circ f](x) = h\circ g(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g\circ f)(x)) = [h\circ(g\circ f)](x).$$

因此, $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$.

1. $\mathcal{P}(X)$表示由X的所有子集构成的集族. ——译者注

习题1.10 设$f: X \to Y$. 定义X 上的关系$\mathcal{R}$为: 当$f(x_1) = f(x_2)$ 时, 称为$x_1 \mathcal{R} x_2$. 证明X 上的关系$\mathcal{R}$是一个等价关系.

解 必须证明关系$\mathcal{R}$是自反的、对称的和可递的.

自反性: 注意到$f(x) = f(x)$ 蕴涵着对一切$x \in X$, $x\mathcal{R}x$.

对称性: 设$x_1 \mathcal{R} x_2$. 那么, $f(x_1) = f(x_2)$ 或者$f(x_2) = f(x_1)$, 因此$x_2 \mathcal{R} x_1$.

可递性: 若$x_1 \mathcal{R} x_2$, 并且$x_2 \mathcal{R} x_3$, 那么$f(x_1) = f(x_2)$ 和$f(x_2) = f(x_3)$ 都成立. 由此可得$f(x_1) = f(x_3)$, 从而$x_1 \mathcal{R} x_3$.

习题1.11 如果X 和Y是集合, 证明

$$\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \cap Y) \text{和} \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y).$$

解 (a) 注意到

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) &\Leftrightarrow A \subseteq X \text{ 且 } A \subseteq Y \\ &\Leftrightarrow A \subseteq X \cap Y \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(X \cap Y). \end{aligned}$$

(b) 显然,

$$A \in \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \Rightarrow A \subseteq X \text{或} A \subseteq Y \Rightarrow A \subseteq X \cup Y \Rightarrow A \in \mathcal{P}(X \cup Y).$$

如果X 和Y 是两个互不相交的非空集合, 那么$X \cup Y \notin \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$, 因此等式不总是成立.

2. 可数和不可数集

习题2.1 证明所有有理数构成的集合是可数的.

解 设$\mathbb{Q}$是有理数构成的集, 并且设$\mathbb{Q}^+ = \{r \in \mathbb{Q} : r > 0\}$. 那么由$f(m, n) = m/n$定义的函数$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$是到上的. 由定理2.7和定理2.5可得出结论.

习题2.2 证明一个可数集的所有有限子集构成的集合是可数的.

解 我们可以假设$A = \{p_1, p_2, \cdots\}$是所有素数构成的集合. 设$\mathcal{F}$ 表示A 的所有有限子集构成的族. 定义$f: \mathcal{F} \to \mathbb{N}$为: 对一切$F \in \mathcal{F}$, $f(F) = F$ 中元素的积. 那么f 是一对一的, 并且由定理2.5 可得出结论.

习题2.3 证明至多可数个有限集的并是一个至多可数的集.

解 这可由定理2.6立即得到.

习题2.4 设A 是一个不可数集, 并且B 是A 的一个可数子集. 证明A 与$A \setminus B$ 是对等的.

解　设$B=\{b_1,b_2,\cdots\}$. 因为A是不可数的, 所以$A\backslash B$仍然是不可数的. 设$C=\{c_1,c_2,\cdots\}$是$A\backslash B$的一个可数子集. 定义$f:A\backslash B\to A$为:

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{如果 } x\notin C;\\ c_{n+1}, & \text{如果 } x=c_{2n+1}(n=0,1,2,\cdots);\\ b_n, & \text{如果 } x=c_{2n}(n=1,2,\cdots).\end{cases}$$

那么f是一对一的并且是到上的, 因此$A\approx A\backslash B$.

习题2.5　*设$f:A\to B$是两个集合之间的一个满射(到上的). 证明下列结论:*

(a) *B的势$\leqslant A$的势.*

(b) *若A是可数的, 则B是至多可数的.*

解　(a) 考虑族$\{f^{-1}(b):b\in B\}$. 显然, 这是A的一个互不相交的子集族. 由选择公理知, 存在A的一个子集C使得对每一个$b\in B$, $C\cap f^{-1}(b)$恰好由A的一个元素构成. 观察到$f:C\to B$是一一的和到上的, 这就得到了结论.

(b) 由(a)立刻得到.

习题2.6　*证明两个非空集合A和B是对等的, 当且仅当存在一个A到B上的函数和一个B到A上的函数.*

解　若A和B是对等的, 那么存在一个函数$f:A\to B$是一一的和到上的. 显然, $f^{-1}:B\to A$是一个满射的函数.

反之, 假设存在一个A到B上的函数和一个B到A上的函数. 由上一题可得, B的势小于等于A的势而且A的势小于等于B的势. 因此, 利用Schröder-Bernstein定理[1]可推得, A和B是对等的.

习题2.7　*证明: 如果有限集X有n个元素, 那么它的幂集$\mathcal{P}(X)$有2^n个元素.*

解　我们将对n使用数学归纳法. 假设$\{1,2,\cdots,n\}$有2^n个子集, 那么集合$\{1,2,\cdots,n,n+1\}$的子集包括:

(a) $\{1,2,\cdots,n\}$的子集, 总共是2^n个;

(b) 形如$A\cup\{n+1\}$的子集, 总共也是2^n个, 其中, A是$\{1,2,\cdots,n\}$的一个子集.

因此, $\{1,2,\cdots,n,n+1\}$的子集的个数是$2^n+2^n=2^{n+1}$.

直接证明如下. 注意到$\{1,2,\cdots,n\}$的含有k个元素$(0\leqslant k\leqslant n)$的子集的个数恰好是$\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}$. 因此$\{1,2,\cdots,n\}$的子集的总数是

$$\begin{pmatrix}n\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n\\2\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}n\\n\end{pmatrix}=(1+1)^n=2^n,$$

1. Schröder-Bernstein定理: 若A与B的某个子集对等, 并且B与A的某个子集也对等, 那么A与B对等.
——译者注

其中最后一个等式由二项式定理得到.

习题2.8 证明所有取值为0或1 的数列构成的集合是不可数的.

解 对于$\mathbb{N}$的每个子集A 定义数列$f(A)=\{x_n\}$ 为: 若$n\in A$ 则$x_n=1$, 若$n\notin A$ 则$x_n=0$. 那么f 定义了一个从$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 到所有取值为0或1 的数列构成的集合上的函数. 因为f 显然是一一的并且是到上的, 所以由定理2.8可得到结论.

习题2.9 如果$2=\{0,1\}$, 那么对任何集合X 证明$2^X\approx\mathcal{P}(X)$.[1]

解 定义$f:\mathcal{P}(X)\to 2^X$ 为$A\mapsto f_A$, 其中, 若$x\in A$ 则$f_A(x)=1$, 若$x\notin A$ 则$f_A(x)=0$. 注意到, f 是一一的并且是到上的. 因此, $2^X\approx\mathcal{P}(X)$.

习题2.10 如果一个复数是一个(非零)整系数多项式的根, 则称之为一个**代数数**. 证明所有代数数构成的集合是可数的.

解 设$\mathcal{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$. 固定$n\geqslant 1$. 因为每一个多项式$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 由$(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 唯一确定, 容易看到次数$\leqslant n$ 的整系数多项式与可数集$\mathcal{Z}^{n+1}\backslash\{(0,0,\cdots 0)\}$ 一一对应. 设$\{p_1,p_2,\cdots\}$ 是所有这些多项式的一个排列. 由代数学基本定理知道, 集合$A_k=\{x\in\mathcal{C}:p_k(x)=0\}$ 是一个有限集. 因此, 所有次数$\leqslant n$ 的多项式$\{p_1,p_2,\cdots\}$ 的零点构成的集合恰好是集合$R_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$, 这是一个可数集(由定理2.6). 注意到, 代数数全体构成的集合就是$\bigcup_{n=1}^{\infty}R_n$, 作为可数个可数集的并, 它本身是可数的(参见定理2.6).

习题2.11 对于任意的函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 证明集合

$$A=\{a\in\mathbb{R}:\lim_{x\to a}f(x)\text{存在},\text{并且}\lim_{x\to a}f(x)\neq f(a)\}$$

是至多可数的.

解 设$\mathcal{I}$ 表示$\mathbb{R}$ 的以有理数为端点的开子区间全体构成的集合, 并且注意到$\mathcal{I}$ 是一个可数集. 此外, 设$\mathbb{Q}$ 表示$\mathbb{R}$ 的有理数全体构成的可数集.

对每个有理数r, 设

$$A_r=\{a\in A:\text{或者}f(a)<r<\lim_{x\to a}f(x),\text{或者}\lim_{x\to a}f(x)<r<f(a)\},$$

显然成立$A=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}A_r$. 因此, 为了证明$A$ 是至多可数的, 只要证明每一个A_r 是至多可数的.

所以, 固定$r\in\mathbb{Q}$ 并且$a\in A_r$, 假设(不失一般性)$f(a)<r<\lim_{x\to a}f(x)$, 那么存在$\delta>0$ 使得当$a-\delta<y<a+\delta$ 并且$y\neq a$ 时$f(y)>r$. 然后, 取一个以有理数为端点的开区间I_a (即,

1. 设I是一个指标集, $\{A_i\}_{i\in I}$是一个集族,它的笛卡儿乘积(Cartesian product)$\prod_{i\in I}A_i$定义为

$$\prod_{i\in I}A_i=\{f|f:I\to\cup_{i\in I}A_i,\text{满足}:f(i)\in A_i,i\in I\}.$$

特别是, 若对一切$i\in I$有$A_i=A$, 则记$\prod_{i\in I}A_i$为A^I. 这里的2^X就是定义在X上取值在$\{0,1\}$内的函数全体$\{0,1\}^X$. ——译者注

$I_a \in \mathcal{I}$)使得$a \in I_a$ 并且$I_a \subseteq (a-\delta, a+\delta)$. 因为对一切$y \in I_a$ 并且$y \neq a$ 有$f(y) > r$ 成立, 所以对一切$y \in I_a \backslash \{a\}$ 有$y \notin A_r$. 特别是$A_r \cap I_a = \{a\}$.

这样我们就建立了一个从A_r 到$\mathcal{I}$ 内的映射$a \mapsto I_a$ (由于对一切$a \in A_r$, $A_r \cap I_a = \{a\}$), 它还是一对一的. 由此可得A_r 是至多可数的, 从而A也是至多可数的.

习题2.12 通过下列命题证明实数全体构成的集合是不可数的:

(a) $(0,1) \approx \mathbb{R}$;

(b) $(0,1)$ 是不可数的.

解 (a) 由公式$f(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$ 定义的函数$f:(0,1) \to \mathbb{R}$ 是一一的并且是到上的.

(b) 如果$(0,1)$ 是可数的, 那么设$\{x_1, x_2, \cdots\}$ 是$(0,1)$ 内的数的一个排列. 对每一个n 由十进制表示记为$x_n = 0.d_{n1}d_{n2}\cdots$, 其中$d_{ij}$ 是$0, 1, \cdots$, 或9. 那么, 考虑$(0,1)$ 内的实数y, 它的十进制表示为$y = 0.y_1y_2\cdots$, 且满足: 当$d_{nn} \neq 1$ 时$y_n = 1$; 当$d_{nn} = 1$ 时$y_n = 2$. 易证对一切n 有$y \neq x_n$ (如何证?), 这就产生了矛盾. 因此区间$(0,1)$ 是一个不可数集.

习题2.13 用数学归纳法证明下列结论:

(a) 若$a \geqslant -1$, 那么对$n = 1, 2, \cdots$, 有$(1+a)^n \geqslant 1 + na$ (Bernoulli不等式);

(b) 若$0 < a < 1$, 那么对$n = 1, 2, \cdots$, 有$1 + 3^n a > (1+a)^n$;

(c) 对$n = 1, 2, \cdots$, 有$\cos(n\pi) = (-1)^n$.

解 (a) 设$a \geqslant -1$. 不等式显然对$n = 1$ 正确; 事实上, 这是一个等式. 由归纳法步骤, 假设$(1+a)^n \geqslant 1 + na$ 对某个n 成立. 因为假设$1 + a \geqslant 0$[1] 正确, 所以

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \geqslant (1+a)(1+na) = 1 + na + a + na^2$$
$$= 1 + (n+1)a + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a,$$

这就是n 取值$n+1$ 时所需要的不等式. 这就完成了归纳.

(b) 假设$0 < a < 1$. 因为$1 + 3a > 1 + a$, 所以所要的不等式对$n = 1$ 正确. 由归纳法步骤, 假设$1 + 3^n a > (1+a)^n$, 那么, 考虑到$0 < a < 1$, 我们知道

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n < (1+a)(1+3^n a)$$
$$= 1 + 3^n a + a + 3^n a^2 = 1 + (3^n + 3^n a + 1)a$$
$$< 1 + (3^n + 3^n + 3^n)a = 1 + 3 \times 3^n a = 1 + 3^{n+1}a,$$

当用 $n+1$ 代替 n 时所需的不等式正确. 由数学归纳法原理知, 对每一个自然数 n 不等式正确.

(c) 对于$n = 1$, 有$\cos(1 \cdot \pi) = \cos\pi = -1 = (-1)^1$. 假设$\cos(n\pi) = (-1)^n$, 那么利用三角公式$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, 可以看到

$$\cos[(n+1)\pi] = \cos(n\pi + \pi) = \cos(n\pi)\cos\pi - \sin(n\pi)\sin\pi$$
$$= (-1)^n(-1) - \sin(n\pi) \cdot 0 = (-1)^{n+1},$$

---

1. 原书中是$1 + a > 0$. ——译者注

归纳法完成.

习题2.14 证明良序原理(the Well-Ordering Principle)蕴涵着数学归纳法原理(the Principle of Mathematical Induction).

解 设$S \subseteq \mathbb{N}$ 满足:

(a) $1 \in S$;

(b) 当$n \in S$ 时有$n+1 \in S$.

我们必须证明$S = \mathbb{N}$, 或者等价地证明$\mathbb{N} \backslash S = \varnothing$.

为此, 我们用反证法, 假设$\mathbb{N} \backslash S \neq \varnothing$. 那么, 由良序原理, $n = \min(\mathbb{N} \backslash S)$ 存在. 显然, $1 < n \in \mathbb{N} \backslash S$. 因此, $n-1 \in S$, 从而$n = (n-1)+1 \in S$, 矛盾. 所以, $\mathbb{N} \backslash S = \varnothing$ 或者$S = \mathbb{N}$.

习题2.15 证明数学归纳法原理蕴涵着良序原理.

解 假设数学归纳法原理正确. 考虑$\mathbb{N}$ 的具有如下性质的自然数n 全体构成的子集S : 只要$\mathbb{N}$ 的非空子集A 含有一个自然数$m \leqslant n$, 那么A 有一个极小元素. 为了证明良序原理, 我们需要证明$S = \mathbb{N}$.

为此, 注意到$1 \in S$. 假设$n \in S$, 还要假设$\mathbb{N}$ 的一个非空子集A 含有某个自然数$m \leqslant n+1$. 如果A 含有一个自然数$k < n+1$, 那么A 也含有一个自然数(也就是k 本身)小于或等于n, 从而由$n \in S$ 知道A 必然有一个极小元素. 另一方面, 如果A 不含任何严格小于$n+1$ 的自然数, 那么$n+1 \in A$, 这种情形下$n+1$ 是A 的极小元素. 因此, $n+1 \in S$, 从而由数学归纳法原理的正确性, 我们推得$S = \mathbb{N}$.

3. 实数

习题3.1 如果$a \vee b = \max\{a, b\}$, $a \wedge b = \min\{a, b\}$, 证明$a \vee b = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$ 和$a \wedge b = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$.

解 交换a, b, 所有的表示式的值都不改变, 因此我们可以假设$a \geqslant b$.这样就有,

$$\frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = \frac{1}{2}(a+b+a-b) = a = a \vee b,$$

和

$$\frac{1}{2}(a+b-|a-b|) = \frac{1}{2}[a+b-(a-b)] = b = a \wedge b.$$

习题3.2 证明对所有的$a, b \in \mathbb{R}$, $||a|-|b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|$.

解 由$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ 和$-|b| \leqslant b \leqslant |b|$, 可以得到

$$-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|.$$

所以, $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

用$a-b$替换a, 我们得到$|a| \leqslant |a-b|+|b|$, 从而$|a|-|b| \leqslant |a-b|$. 交换a 和b 得到$-(|a|-|b|) \leqslant |a-b|$, 因此$||a|-|b|| \leqslant |a-b|$ 也成立.

习题3.3 证明实数$\sqrt{2}$ 和$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是无理数.

解 由反证法, 假设$\sqrt{2} = m/n, m, n \in \mathbb{N}$. 我们可以假设$m$ 和n 除了1 以外没有正的公因子. 平方可以得到$m^2 = 2n^2$. 这就推出m 是偶的, 即, 对某个$k \in \mathbb{N}$, $m = 2k$ (否则$m = 2k+1$ 可推得m^2 是奇的, 矛盾). 结果是$4k^2 = 2n^2$, 或者$n^2 = 2k^2$, 这又推得n 是偶的, 即, 对某个$\ell \in \mathbb{N}$, $n = 2\ell$.那么, m 和n 就有公因子2, 矛盾.因此, $\sqrt{2}$ 不是有理数. (这个简单证明是Eudoxus给出的.)

利用一个精彩的不同证明, 我们可以建立如下的一般性的结果:

- 一个自然数k 的平方根$\sqrt{k}$ 是有理数当且仅当k 是一个完全平方数, 即, 对某个$p \in \mathbb{N}$, $k = p^2$.

如果$k = p^2$, 显然$\sqrt{k} = p \in \mathbb{N}$ 为有理数. 反过来, 如果$\sqrt{k}$ 是有理数, 那么$\sqrt{k}$ 是多项式$p(x) = x^2 - k$ 的一个有理根. 而该多项式的正有理根形如m/n, 其中$m \in \mathbb{N}$ 是k 的一个因子, $n \in \mathbb{N}$ 是1 的一个因子. 因此, $\sqrt{k} = m \in \mathbb{N}$, 这就得到$k = m^2$.

为了看出$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 不是有理数, 由反证法假设$\sqrt{2}+\sqrt{3} = r > 0$ 是一个有理数.那么$\sqrt{3} = r-\sqrt{2}$, 平方可得$3 = r^2 - 2r\sqrt{2}+2$. 这就得到$\sqrt{2} = (r^2-1)/2r$ 是一个有理数, 与我们前面的结论矛盾.因此, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是一个无理数.

习题3.4 证明任何两个不同的实数之间存在一个无理数.

解 设$a < b$. 取一个有理数r 使得$a < r < b$, 然后取某个n 使得$0 < \sqrt{2}/n < b-r$. 注意到无理数$x = r+\sqrt{2}/n$ 满足$a < x < b$.

另一解法: 注意到开区间(a,b) 是不可数的, 而所有有理数构成的集合是可数的.

习题3.5 本习题将在实数的公理化基础框架内(逐步)引入熟知的减法过程.

(a) 证明元素0是唯一确定的, 即, 证明如果对所有的$x \in \mathbb{R}$ 和某一个$0^* \in \mathbb{R}$, $x+0^* = x$, 那么$0^* = 0$.

(b) 证明**加法的消去律**成立, 即, 证明$x+a = x+b$ 可推得$a = b$.

(c) 用加法的消去律证明对所有的$a \in \mathbb{R}$, $0 \cdot a = 0$.

(d) 证明对一切实数a 实数$-a$ 是唯一满足方程$a+x = 0$ 的实数. (实数$-a$称为a的**负数**.)

(e) 证明对任何两个给定的实数a 和b, 方程$a+x = b$ 有唯一解, 也就是$x = b+(-a)$. 实数$\mathbb{R}$ 的减法运算$-$ 现在定义为$a-b = a+(-b)$; 实数$a-b$ 叫做b 与a 的**差**.

(f) 对任何实数a 和b 证明$-(-a) = a$ 和$-(a+b) = -a-b$.

解 (a) 假设还有另外一个元素$0^* \in \mathbb{R}$ 满足对所有的$x \in \mathbb{R}$, $0^*+x = x+0^* = x$. 设$x = 0$, 我们得到$0^*+0 = 0$. 又对所有的$y \in \mathbb{R}$, $0+y = y+0 = y$ 也成立, 让$y = 0^*$ 得到$0^* = 0^*+0 = 0$.

(b) 设$x+a = x+b$. 由公理5知道存在某个$z \in \mathbb{R}$ 使得$z+x = x+z = 0$. 所以,

$$a = 0+a = (z+x)+a = z+(x+a) = z+(x+b) = (z+x)+b = 0+b = b.$$

(c) 显然

$$0\cdot a+0=0\cdot a=(0+0)\cdot a=0\cdot a+0\cdot a,$$

所以由加法的消去律得到对每一个$a\in\mathbb{R}$, $0\cdot a=0$.

(d) 假设$a+x=0$.因为$a+(-a)=0$, 我们看到$a+x=a+(-a)$, 所以, 由上面(b)中建立的加法消去律得到, $x=-a$(a的负数).

(e) 如果$a+z=a+y=b$, 由加法的消去律我们得到$z=y$.因此, 给定a 和b, 方程$a+x=b$至多有一个解$x\in\mathbb{R}$. 因为,

$$a+[b+(-a)]=(a+b)+(-a)=(-a)+(a+b)=[(-a)+a)]+b=0+b=b,$$

我们看到方程$a+x=b$ 的唯一解是$x=b+(-a)$. 我们用$b-a$ 表示这个数称之为a 与b 的减法.

(f) 仔细观察方程$a+(-a)=(-a)+a=0$ 立即得到$-(-a)=a$. 而且, 由

$$a+b+(-a-b)=a+b+[-a+(-b)]=[(a+b)+(-a)]+(-b)=b+(-b)=0,$$

我们容易得到$-(a+b)=-a-b$.

习题3.6 本习题将在实数的公理化基础框架内(逐步)引入熟知的除法过程.

(a) 证明元素1 是唯一确定的, 即, 证明如果对所有的$x\in\mathbb{R}$ 和某一个$1^*\in\mathbb{R}$, $1^*\cdot x=x$, 那么$1^*=1$.

(b) 证明乘法的**消去律**成立, 即, 证明$x\cdot a=x\cdot b$并且$x\neq 0$ 可推得$a=b$.

(c) 证明对一切实数$a\neq 0$ 实数a^{-1} 是唯一满足方程$x\cdot a=1$ 的实数.实数$x=a^{-1}$ 称为a的**逆**(或a 的**倒数**).

(d) 证明对任何两个给定的实数a 和b 并且$a\neq 0$, 方程$ax=b$ 有唯一解, 也就是$x=a^{-1}b$. 实数$\mathbb{R}$ 的**除法**运算$\div$ (或者$/$)现在定义为$b\div a=a^{-1}b$; 通常, 实数$b\div a$ 也表示为b/a 或$\frac{b}{a}$.

(e) 对任何两个非零的$a,b\in\mathbb{R}$,证明$(a^{-1})^{-1}=a$ 和$(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$.

(f) 对一切a, 证明$\frac{a}{1}=a$; 对一切$b\neq 0$, 证明$\frac{0}{b}=0$; 并且对一切$a\neq 0$, 证明$\frac{a}{a}=1$.

解 (a) 假设某个实数1^* 满足对一切$x\in\mathbb{R}$, $1^*\cdot x=x\cdot 1^*=x$.特别是, 设$x=1$, 我们得到$1^*\cdot 1=1$. 因为对一切$y\in\mathbb{R}$, $y\cdot 1=y$, 让$y=1^*$ 得到$1^*=1^*\cdot 1=1$. 所以, 1 是对一切$x\in\mathbb{R}$满足$r\cdot x=x$ 的唯一实数r.

(b) 假设$x\cdot a=x\cdot b$ 并且$x\neq 0$, 由公理7存在一个实数$y\in\mathbb{R}$ 使得$y\cdot x=1$. 现在可以看到,

$$a=1\cdot a=(yx)a=y(xa)=y(xb)=(yx)b=1\cdot b=b.$$

(c) 如果$ax=ay=1$ 并且$a\neq 0$, 那么由(b), 我们一定有$x=y$. 这就证得a 的倒数a^{-1} 是唯一确定的.

(d) 为了证明$a\neq 0$ 时方程$ax=b$ 至多有一个解x, 注意到, 如果$ax=ay=b$, 那么由乘法的消去律, 我们得到$x=y$. 另外, 注意到

$$a\cdot(a^{-1}b)=(a\cdot a^{-1})b=1\cdot b=b.$$

以上证得$a \neq 0$ 时方程$ax = b$ 有唯一解$x = a^{-1}b$.

(e) 如果$a \neq 0$, 那么方程$a \cdot a^{-1} = 1$ 已经说明$(a^{-1})^{-1} = a$. 另外, 由

$$(ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}) = a(b \cdot b^{-1})a^{-1} = a \cdot 1 \cdot a^{-1} = 1,$$

我们容易得到$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

(f) 由$1 \cdot a = a$, 我们得到对一切$a \in \mathbb{R}$, $\frac{a}{1} = a$. 方程$b \cdot 0 = 0$ 含有对一切$b \neq 0$, $\frac{0}{b} = 0$. 从$a \cdot 1 = a$ 我们立刻得到对所有的$a \neq 0$, $\frac{a}{a} = 1$.

习题3.7 用实数公理和前两题建立的性质建立如下熟知的实数性质.

(i) **零乘积原则**: $ab = 0$ 当且仅当$a = 0$ 或$b = 0$.

(ii) **符号乘积原则**: 对所有的$a, b \in \mathbb{R}$, $(-a)b = a(-b) = -(ab)$, 而且, $(-a)(-b) = ab$.

(iii) **分数乘积原则**: 对于$b, d \neq 0$ 和任意实数a, c 我们有

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

特别地, 若$\frac{a}{b} \neq 0$, 那么$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

(iv) **除法的消去律**: 如果$a \neq 0$ 而且$x \neq 0$, 那么对一切实数b, $\frac{bx}{ax} = \frac{b}{a}$.

(v) **分数除法原则**: 除以一个分数等于乘以它的倒数, 即, 只要分数$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ 确定, 我们就有

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

解 (i) 从前面的习题我们已经知道, 对一切$b \in \mathbb{R}$, $0 \cdot b = 0$.另一方面, 如果$ab = 0(= a \cdot 0)$ 并且$a \neq 0$, 那么由乘法的消去律就证得$b = 0$.

(ii) 显然,

$$ab + (-a)b = [a + (-a)]b = 0 \cdot b = 0\text{且}ab + a(-b) = a[b + (-b)] = a \cdot 0 = 0,$$

从而$-(ab) = (-a)b = a(-b)$.这就推得

$$(-a)(-b) = -[a(-b)] = -[-(ab)] = ab.$$

(iii) 如果$b, d \neq 0$, 那么

$$bd\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = \left(b \cdot \frac{a}{b}\right) \cdot \left(d \cdot \frac{c}{d}\right) = ac,$$

这就证得$\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$. 因为$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1$, 我们看到$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

(iv) 如果$c = \frac{b}{a}$, 那么$ac = b$, 从而对一切$x \neq 0$, $(ax)c = bx$, 这就证得$c = \frac{b}{a} = \frac{bx}{ax}$.

(v) 注意到恒等式

$$\frac{c}{d} \cdot \frac{ad}{bc} = \frac{adc}{dbc} = \frac{a}{b}$$

保证了$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

习题3.8 本题证明了本质上只存在一个满足1.3节叙述的11个公理的实数集. 为了看清这一点, 设$\mathbb{R}$ 是一个实数集(即, 满足课本中1.3节叙述的全部11个公理的对象的全体).

(a) 证明$1 > 0$;

(b) 一个实数a 满足$a=-a$ 当且仅当$a=0$;

(c) 如果$n=1+1+\cdots+1$ (这里和式中有"n 个被加数", 它们都等于1), 那么证明这些元素都是不相同的; 通常, 我们称这些元素的全体$\mathbb{N}$ 为$\mathbb{R}$ 的自然数;

(d) 设Z是由$\mathbb{N}$ 和它的负元素及零构成的; 自然, 我们称Z为$\mathbb{R}$ 的整数集.证明Z是由不同元素组成而且在加法和乘法下是封闭的;

(e) 定义有理数集$\mathbb{Q}$ 为$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}:m,n\in Z\text{而且}n\neq 0\}$.证明$\mathbb{Q}$ 本身满足公理1到公理10并且对一切$a\in\mathbb{R}$

$$a=\sup\{r\in\mathbb{Q}:r\leqslant a\}=\inf\{s\in\mathbb{Q}:a\leqslant s\}$$

成立;

(f) 现在, 设$\mathbb{R}'$ 是另一个实数集而且$\mathbb{Q}'$ 表示它的有理数.如果$1'$ 表示$\mathbb{R}'$ 的单位元, 我们记

$$n'=1'+1'+\cdots+1',$$

和式中有"n 个被加数", 它们都等于$1'$.然后,由

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m'}{n'}$$

定义函数$f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}'$, 再由公式

$$f(a)=\sup\{f(r):r\leqslant a\}.$$

将它扩充到$\mathbb{R}$ 的所有元素.通过建立下面的命题:

(i) $a\leqslant b$ 在$\mathbb{R}$ 内成立当且仅当$f(a)\leqslant f(b)$ 在$\mathbb{R}'$ 内成立;

(ii) f 是一对一的和到上的;

(iii) 对所有的$a,b\in\mathbb{R}$, $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 而且$f(ab)=f(a)f(b)$.

证明$\mathbb{R}$ 和$\mathbb{R}'$本质上是一样的.

解 (a) 因为$1\neq 0$, 我们有两种可能性: 或者$1>0$ 或者$0>1$.如果$0>1$, 那么(由公理9)我们有$0+(-1)>1+(-1)=0$ 或者$-1>0$, 即, -1 是一个正数.利用公理10我们得到$0\cdot(-1)\geqslant 1\cdot(-1)$, 或者$0\geqslant -1$, 与$-1>0$ 矛盾.因此, $1>0$.

(b) 因为$0+0=0$, 我们知道$-0=0$.反之, 假设一个实数满足$a=-a$.这可推得$a+a=(1+1)a=0$.然而, 因为$1>0$, 我们有$1+1\geqslant 1+0=1>0$, 从而$1+1\neq 0$.因此, 根据零乘积原则, $(1+1)a=0$ 可推得$a=0$.

(c) 同上面(b)的证明一样, $1+1\neq 0$ 而且事实上$1+1\neq 1$; 否则$1+1=1=1+0$ 推得(由消去律)$1=0$, 这是不可能的.现在, 由归纳法, 假设

$$0<1<1+1<1+1+1<\cdots<\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{个被加数}}.$$

我们断言实数$n+1=1+1+\cdots+1+1$ ($n+1$ 个数的和)满足$n+1>n=1+1+\cdots+1$ (其中最后的和有n 个被加数).事实上, 如果$n+1\leqslant n$, 那么$(n+1)+(-n)\leqslant n+(-n)$ 或者$1\leqslant 0$, 这是一个矛盾. 因此, $n+1>n$, 并且归纳法完成.

(d) 由(c)我们知道自然数和零都是不同的实数. 若$m, n \in \mathbb{N}$, $-m = -n$, 那么$m = n$, 这就证得不同的自然数有不同的负数. 若$m, n \in \mathbb{N}$, $m = -n$, 那么$m + n = 0$ 与(c)矛盾, 从而没有自然数能够等于一个负整数. 由此可得$\mathbb{Z}$是由不同元素组成的.

(e) 注意到如果$\frac{m}{n}$ 和$\frac{p}{q}$ 是两个有理数, 那么

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq} \quad \text{而且} \quad \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq},$$

如果$\frac{m}{n} \neq 0$, 那么$\left(\frac{m}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{m}$. 这就是说, 在加法、乘法和它们的逆运算下$\mathbb{Q}$ 是封闭的. 由于全体实数满足公理1到公理10, 因此$\mathbb{Q}$ 自身也满足公理1到公理10.

对于第二部分, 固定$a \in \mathbb{R}$ 并且设$A = \{r \in \mathbb{Q} : r \leqslant a\}$. 因为在$a - 1$ 和a 之间存在一个有理数(参见定理3.4)因此A 是非空的, 而且显然A 从上方被a 控制. 由完备性公理(公理11)知道$\sup A$ 在$\mathbb{R}$ 内存在并且满足$\sup A \leqslant a$.

现在, 设$\varepsilon > 0$. 由定理3.4存在某个有理数r 满足$a - \varepsilon < r < a$. 显然, $r \in A$, 从而对所有$\varepsilon > 0$, $a - \varepsilon < \sup A$, 或$a < \sup A + \varepsilon$ 成立.这就推得$a \leqslant \sup A$, 因此$a = \sup A$. 同理可证等式$a = \inf\{s \in \mathbb{Q} : a \leqslant s\}$.

(f) 注意到映射是定义明确的. 这就是说, 如果在$\mathbb{Q}$ 内$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, 那么$f(\frac{m}{n}) = f(\frac{p}{q})$. 事实上, 因为$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ 等价于$mq = np$, 我们看到$m'q' = n'p'$ 或者$\frac{m'}{n'} = \frac{p'}{q'}$. 现在, 让我们来证明性质(i),(ii)和(iii).

(i) $a \leqslant b$ 在$\mathbb{R}$ 内成立当且仅当$f(a) \leqslant f(b)$ 在$\mathbb{R}'$内成立.

首先注意到两个有理数$r, s \in \mathbb{Q}$ 满足$r \leqslant s$ 当且仅当$r' \leqslant s'$. 事实上, 为了看清楚这一点只要假设r 和s 是正有理数(为什么?). 我们有

$$r = \frac{m}{n} \leqslant s = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq \leqslant np \Leftrightarrow m'q' \leqslant n'q' \Leftrightarrow r' = \frac{m'}{n'} \leqslant \frac{p'}{q'} = s'.$$

现在, 设$a \leqslant b$. 那么$\{r \in \mathbb{Q} : r \leqslant a\} \subseteq \{s \in \mathbb{Q} : s \leqslant b\}$, 由此容易得到$f(a) \leqslant f(b)$.反之, 假设$f(a) \leqslant f(b)$. 如果$a \leqslant b$ 不正确, 我们必有$b < a$. 但是另一方面, 由定理3.4存在两个有理数$r, s \in \mathbb{Q}$ 使得$b < r < s < a$, 这可推得$f(b) \leqslant r' < s' \leqslant f(a)$, 矛盾.

(ii) f 是一对一的和到上的.

为了看到f 是到上的, 设$a' \in \mathbb{R}'$. 那么由定理3.4,

$$a' = \sup\{t \in \mathbb{Q}' : t \leqslant a'\}.$$

如果我们让$S = \{r \in \mathbb{Q} : r' \leqslant a'\}$, 那么这个集合在$\mathbb{R}$ 上是有上界的(为什么?)从而$a = \sup S$ 在$\mathbb{R}$ 内存在. 另外, 注意到

$$\{t \in \mathbb{Q} : t \leqslant a'\} = \{r' : r \in \mathbb{Q} \quad \text{而且} \quad r \leqslant a\}.$$

现在就容易看到$f(a) = a'$.

为了证明f 是一对一的假设$f(a) = f(b)$. 那么由(i)我们有$a \leqslant b$ 而且$b \leqslant a$, 即, $a = b$.

(iii) 对所有的$a, b \in \mathbb{R}$, $f(a + b) = f(a) + f(b)$ 而且$f(ab) = f(a)f(b)$.

我们只证加法性质而把乘法留给读者. 显然, 对所有的有理数r,s, $f(r+s)=f(r)+f(s)$成立. 现在, 固定$a,b\in\mathbb{R}$, 假设$r,s\in\mathbb{Q}$ 满足$r\leqslant a$ 和$s\leqslant b$. 那么$f(r)=r'\leqslant f(a)$ 而且$f(s)=s'\leqslant f(b)$. 因为$r+s\in\mathbb{Q}$而且$r+s\leqslant a+b$, 我们看到$f(r)+f(s)=r'+s'=f(r+s)\leqslant f(a+b)$. 这就很容易推出

$$f(a)+f(b)\leqslant f(a+b).$$

对于相反的不等式, 在$\mathbb{R}'$ 内设$\varepsilon'>0$. 那么存在有理数$r,s\in\mathbb{Q}$ 满足$r\leqslant a$ 和$s\leqslant b$ 使得$f(a)-\varepsilon'<f(r)$ 和$f(b)-\varepsilon'<f(s)$ 都成立. 因为$r+s\leqslant a+b$, 由此可得对一切$\varepsilon'>0$, $f(a)+f(b)-2\varepsilon'<f(r)+f(s)=f(r+s)\leqslant f(a+b)$. 这就保证了$f(a)+f(b)\leqslant f(a+b)$, 所以$f(a+b)=f(a)+f(b)$.

习题3.9 *考虑赋予下列运算的两点集$R=\{0,1\}$:*

(a) *加法$(+)$: $0+0=0, 0+1=1+0=1$ 而且$1+1=0$;*

(b) *乘法$(\cdot)$: $0\cdot1=1\cdot0=0$ 而且$1\cdot1=1$;*

(c) *次序关系: $0\geqslant0, 1\geqslant1$ 而且$1\geqslant0$.*

具有以上运算的R 满足确定实数的所有11个公理吗? 说明你的答案.

解 它满足除了公理9以外的所有公理, 其中公理9是说:

- 如果$x\geqslant y$ 而且$z\geqslant0$, 那么$x+z\geqslant y+z$.

为了看清楚这一点, 假设公理9正确.我们分两种情形.

情形Ⅰ: $1>0$.

在此情形下, 我们必有$0=1+1\geqslant0+1=1$, 这与$1>0$ 矛盾.

情形Ⅱ: $0>1$.

这可推得$1=0+1\geqslant1+1=0$, 它又与$0>1$ 矛盾. 因此公理9在这种情况下[1]不成立.

应该注意到公理9是保证$1+1$ (即, 数2)区别于0 和1 的; 当然, 正是这个公理建立了整数集的存在性(如同我们在习题3.8(b)中所看到的).

习题3.10 *考虑赋予通常的加法、乘法和次序关系的有理数集$\mathbb{Q}$. 为什么$\mathbb{Q}$ 与实数集不是一样的?*

解 有理数集满足实数的除了完备性公理以外的所有公理. 这在习题3.8(e)中得到了证明. 为了看出$\mathbb{Q}$ 不满足完备性公理, 由反证法假设它满足. 考虑集合

$$S=\{0\leqslant r\in\mathbb{Q}: r^2\leqslant2\}.$$

那么S 是非空的并且在$\mathbb{Q}$ 内是上有界的(为什么?), 从而$b=\sup S$ 在$\mathbb{Q}$ 内存在.重复定理3.5的证明可以推得$b^2=2$, 即, $b=\sqrt{2}$. 然而, 我们在习题3.3中证得$\sqrt{2}$ 不是有理数, 这就产生了矛盾. 因此, $\mathbb{Q}$ 不满足完备性公理, 而且与实数集不是一样的.

1. 是指具有这种运算的R. ——译者注

习题3.11　本题建立了熟知的基于实数的公理化基础的"指数"原则.为了避免不必要的记号，我们假设这里所遇到的实数都是正的，从而由定理3.5可知，所有非负实数有唯一的根. 通常，"整数"幂定义为

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{个因子}}, \quad a^0 = 1, a^1 = a, \quad \text{而且} a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

扩充到有理数，对一切$m, n \in \mathbb{N}$，我们定义

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{而且} \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

证明如下性质：

(a) 对所有的$m, n \in \mathbb{N}$, $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$；

(b) 如果$m, n, p, q \in \mathbb{N}$ 满足$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$，那么$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$；

(c) 如果r 和s 都是有理数，那么

(i) $a^r a^s = a^{r+s}$ 而且$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$；

(ii) $(ab)^r = a^r b^r$ 而且$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$；

(iii) $(a^r)^s = a^{rs}$.

解　首先应该注意到对所有的$a \in \mathbb{R}$ 和所有的$m, n \in \mathbb{N}$, $(a^n)^m = (a^m)^n = a^{mn}$.

(a) 注意到

$$[(\sqrt[n]{a})^m]^n = \underbrace{(\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[n]{a})^m \cdots (\sqrt[n]{a})^m}_{n\text{个因子}} = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdots \sqrt[n]{a}}_{mn\text{个因子}}$$
$$= \underbrace{(\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{a})^n \cdots (\sqrt[n]{a})^n}_{m\text{个因子}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{个因子}} = a^m$$

因为n 次根是唯一的(定理3.5)，我们得到$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

(b) 假设$m, n, p, q \in \mathbb{N}$ 满足$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$，或者$pn = mq$.由(a)我们看到

$$(a^{\frac{p}{q}})^n = (\sqrt[q]{a^p})^n = [(\sqrt[q]{a})^p]^n = (\sqrt[q]{a})^{pn} = (\sqrt[q]{a})^{mq} = [(\sqrt[q]{a})^q]^m = a^m,$$

这就证得$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$.

(c) 如果r 和s 是整数，公式易证. 现在，设r 和s 是有理数. 我们假设r 和s 也是正的，而把"负的情形"留给读者证明. 由(b)我们还可以假设$r = \frac{m}{n}$ 和$s = \frac{p}{q}$. 因为$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab$，我们看到$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$. 现在注意到

(i) $a^r a^s = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^m a^p} = \sqrt[n]{a^{m+p}} = a^{\frac{m+p}{n}} = a^{r+s}$.

(ii) $(ab)^r = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = (\sqrt[n]{a^m})(\sqrt[n]{b^m}) = a^r b^r$.

(iii) $(a^r)^s = \sqrt[n]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{a^{pm}}} = \sqrt[n^2]{a^{pm}} = a^{\frac{pm}{n^2}} = a^{rs}$.

我们把剩余情形的证明留给读者.

4. 实数列

习题4.1　证明如果$|x| < 1$，那么$\lim x^n = 0$.

解 对一切n 令$x_n = |x|^n$. 那么对一切n, $x_{n+1} = |x|x_n$ 成立, 而且条件$|x| < 1$ 含有$0 \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$. 由定理4.3, $a = \lim x_n$ 存在. 因此$a = a|x|$ (或者$(1-|x|)a = 0$)必然成立, 由此可得$a = 0$.

直接证明$\lim x^n = 0$ 如下. 首先注意到, 我们可以假设$0 < x < 1$. 现在, 若$\varepsilon > 0$ 给定, 那么注意到

$$x^n < \varepsilon \Leftrightarrow \ln(x^n) = n \ln x < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}.$$

习题4.2 证明$\lim x_n = x$ 成立当且仅当$\{x_n\}$ 的每个子列都有一个子列收敛于x.

解 如果$\lim x_n = x$, 那么每一个子列必须收敛于x. 因此一个子列的每一个子列必须收敛于x (因为它本身是$\{x_n\}$ 的一个子列).

反之, 假设$\{x_n\}$ 的每一个子列都有一个子列收敛于x. 现在, 由反证法假设$\{x_n\}$ 不收敛于x. 那么对某个$\varepsilon > 0$ 我们必然有$|x - x_n| \geqslant \varepsilon$ 对无穷多个n 成立. 所以, 存在一个$\{x_n\}$ 的子列$\{y_n\}$ 使得对一切n, 有$|x - y_n| \geqslant \varepsilon$. 然而, 后者与事实$\{y_n\}$ 有一个子列收敛于x 矛盾. 因此, $\lim x_n = x$.

习题4.3 考虑两个严格单调增的自然数列$\{k_n\}$ 和$\{m_n\}$, 它们满足, 对某个$\ell \in \mathbb{N}$ 有

$$\{\ell, \ell+1, \ell+2, \cdots\} \subseteq \{k_1, k_2, \cdots\} \cup \{m_1, m_2, \cdots\}.$$

证明一个实数列$\{x_n\}$ 在$\mathbb{R}$ 内收敛当且仅当$\{x_n\}$ 的两个子列$\{x_{k_n}\}$ 和$\{x_{m_n}\}$ 在$\mathbb{R}$ 内收敛并且它们满足$\lim x_{k_n} = \lim x_{m_n}$ (在这种情形下它们公共的极限也是该数列的极限).

特别地, 证明一个实数列$\{x_n\}$ 在$\mathbb{R}$ 内收敛当且仅当“偶的”和“奇的”子列$\{x_{2n}\}$ 和$\{x_{2n-1}\}$ 在$\mathbb{R}$内都收敛并且它们满足$\lim x_{2n} = \lim x_{2n-1}$.

解 如果$x_n \to x$,那么显然$x_{k_n} \to x$, 并且$x_{m_n} \to x$. 反之, 假设$x_{k_n} \to x$ 而且$x_{m_n} \to x$. 设$\varepsilon > 0$, 取某个$n_0 \in \mathbb{N}$ 使得对所有的$n \geqslant n_0$

$$|x_{k_n} - x| < \varepsilon \quad 而且 \quad |x_{m_n} - x| < \varepsilon. \qquad (\bigstar)$$

记$\ell_0 = \max\{\ell, k_{n_0}, m_{n_0}\}$, 我们断言对所有的$n \geqslant \ell_0$

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

为了看出这一点, 设$n \geqslant \ell_0$. 那么条件

$$\{\ell, \ell+1, \ell+2, \cdots\} \subseteq \{k_1, k_2, \cdots\} \cup \{m_1, m_2, \cdots\}.$$

保证了存在某个$r \in \mathbb{N}$ 使得$k_r = n$ 或者$m_r = n$.因为$r < n_0$ 蕴涵着$k_r < k_{n_0} \leqslant \ell_0$ 而且$m_r < m_{n_0} \leqslant \ell_0$, 所以我们看到$r \geqslant n_0$.因此, 要么$x_n = x_{k_r}$ 要么$x_n = x_{m_r}$ (其中$r \geqslant n_0$), 从而由($\bigstar$)可得$|x - x_n| < \varepsilon$. 这就证得$x_n \to x$.

最后一步可以由上述结论立刻得到.

习题4.4 求数列$\{(-1)^n\}$ 的上极限lim sup 和下极限lim inf.

解　我们有$\liminf(-1)^n = -1$而且$\limsup(-1)^n = 1$.

习题4.5　求由

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_{2n} = \frac{1}{3}x_{2n-1}, \quad 和 \quad x_{2n+1} = \frac{1}{3} + x_{2n}, n = 1, 2, \cdots,$$

定义的数列$\{x_n\}$的上极限lim sup和下极限lim inf.

解　我们断言对$n = 1, 2, \ldots$有

$$x_{2n} = \frac{1}{3^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^k} \quad 和 \quad x_{2n+1} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}$$

成立. 等式的正确性可以由归纳法证明. 我们将证明第二个等式的正确性而把第一个等式的正确性留给读者. 对于$n = 1$, 我们有

$$x_3 = x_{2\times1+1} = \frac{1}{3} + x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{3^k}.$$

现在, 假设$x_{2n+1} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}$ 对某个n 成立. 那么,

$$x_{2(n+1)+1} = \frac{1}{3} + x_{2(n+1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{3^k},$$

归纳法完成. 因此,

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \frac{1}{3^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{6} \quad 且 \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}.$$

现在, 我们断言1/6 和1/2 是$\{x_n\}$ 仅有的极限点. 为了看出这一点, 设a 是一个不同于1/6 和1/2 的实数. 取某个$\varepsilon > 0$ 使得

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap \left(\frac{1}{6} - \varepsilon, \frac{1}{6} + \varepsilon\right) = \varnothing \quad 和 \quad (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap \left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right) = \varnothing.$$

接下来, 注意到存在某个k 使得对所有的$n \geqslant k$, $x_{2n} \in (\frac{1}{6}-\varepsilon,\ \frac{1}{6}+\varepsilon)$ 而且$x_{2n+1} \in (\frac{1}{2}-\varepsilon,\ \frac{1}{2}+\varepsilon)$ 成立. 因此, 对所有的$n \geqslant k$, $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$ 成立, 这就证得a 不可能是数列$\{x_n\}$ 的一个极限点. 所以,

$$\liminf x_n = \frac{1}{6} \quad 且 \quad \limsup x_n = \frac{1}{2}.$$

习题4.6　设$\{x_n\}$ 是一个有界数列. 证明

$$\limsup(-x_n) = -\liminf x_n \quad 且 \quad \liminf(-x_n) = -\limsup x_n.$$

解　我们将利用$\limsup x_n$ 和$\liminf x_n$ 分别是$\{x_n\}$ 的最大和最小的极限点. 我们将证明第一个公式.

取$\{x_n\}$ 的两个子列$\{y_n\}$ 和$\{z_n\}$ 使得$\lim y_n = \liminf x_n$ 和$\lim(-z_n) = \limsup(-x_n)$. 那么

$$\begin{aligned}-\lim\ \inf x_n &= \lim(-y_n)\\ &\leqslant \lim\ \sup(-x_n) = \lim(-z_n) = -\lim z_n\\ &\leqslant -\lim\ \inf x_n,\end{aligned}$$

从而$\limsup(-x_n) = -\liminf x_n$.

习题4.7 若$\{x_n\}$ 和$\{y_n\}$ 是两个有界数列, 证明

(a) $\lim\ \sup(x_n + y_n) \leqslant \lim\ \sup x_n + \lim\ \sup y_n$;

(b) $\lim\ \inf(x_n + y_n) \geqslant \lim\ \inf x_n + \lim\ \inf y_n$.

解 (a) 通过一个子列我们就可以假设$\lim(x_n + y_n) = \limsup(x_n + y_n)$. 因为$\{x_n\}$ 是一个有界数列, 所以存在一个收敛的子列$\{x_{k_n}\}$. 设$x = \lim x_{k_n}$. 同理存在一个$\{y_{k_n}\}$ 的子列收敛于某个y. 因此存在一个严格单调增的自然数列$\{m_n\}$ 使得$x = \lim x_{m_n}$ 而且$y = \lim y_{m_n}$. 因而,

$$\lim\ \sup(x_n + y_n) = x + y = \lim x_{m_n} + \lim y_{m_n} \leqslant \lim\ \sup x_n + \lim\ \sup y_n.$$

最后, 如果$x = \lim x_n$ 成立, 那么取一个$\{y_n\}$ 的子列$\{y_{k_n}\}$ 使得$\lim y_{k_n} = \limsup y_n$, 并且注意到

$$\begin{aligned}\lim\ \sup x_n + \lim\ \sup y_n &= x + \lim y_{k_n}\\ &= \lim(x_{k_n} + y_{k_n}) \leqslant \lim\ \sup(x_n + y_n).\end{aligned}$$

(b) 利用上一题由(a)可以得证.

习题4.8 证明上极限和下极限具有“保号性”. 即, 证明, 如果两个有界的实数列$\{x_n\}$ 和$\{y_n\}$ 满足对所有的$n \geqslant n_0$, $x_n \leqslant y_n$, 那么

$$\lim\ \inf x_n \leqslant \lim\ \inf y_n \quad 且 \quad \lim\ \sup x_n \leqslant \lim\ \sup y_n.$$

解 首先, 我们证明, 如果两个实数列$\{s_n\}$ 和$\{t_n\}$ 在$\mathbb{R}$ 内收敛(比方说$s_n \to s$ 而且$t_n \to t$)而且对一切$n \geqslant n_0$, $s_n \leqslant t_n$, 那么$s \leqslant t$.

事实上, 如果$s > t$ 正确, 那么令$\varepsilon = \frac{s-t}{2} > 0$, 并且注意到对所有充分大的$n$, 我们有

$$s_n \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon) = \left(\frac{s+t}{2}, \frac{3s-t}{2}\right) \quad 且 \quad t_n \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon) = \left(\frac{3t-s}{2}, \frac{s+t}{2}\right).$$

即, 对所有充分大的n, $t_n < \frac{s+t}{2} < s_n$ 必须成立, 这是不可能的. 因此, $s \leqslant t$.

现在, 假设两个有界的实数列$\{x_n\}$ 和$\{y_n\}$ 满足对所有的$n \geqslant n_0$, $x_n \leqslant y_n$. 记

$$s_n = \inf_{k \geqslant n} x_k \quad 和 \quad t_n = \inf_{k \geqslant n} y_k.$$

如果$n \geqslant n_0$, 那么注意到对一切$r \geqslant n$ 我们有$s_n = \inf_{k \geqslant n_0} x_k \leqslant x_r \leqslant y_r$, 从而对一切$n \geqslant n_0$, $s_n \leqslant \inf_{r \geqslant n} y_r = t_n$.由第一部分的讨论, 我们得到

$$\lim\ \inf x_n = \lim s_n \leqslant \lim t_n = \lim\ \inf y_n.$$

上极限情形可以类似证明, 或者利用公式$\limsup x_n = -\liminf(-x_n)$.

习题4.9　证明$\lim \sqrt[n]{n} = 1$ (并由此推得对一切$a > 0$, $\lim \sqrt[n]{a} = 1$).

解　注意到$\sqrt[n]{n} = (\sqrt[n]{\sqrt{n}})^2$. 一个简单的归纳法命题可以证得对一切$n$[1], $\sqrt[n]{\sqrt{n}} > 1$. 因此我们可以记$\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + x_n$, 其中$x_n > 0$. 因为对一切$n$ 和一切$a \geqslant 0$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ (参见习题2.13), 所以我们得到

$$\sqrt{n} = \left(\sqrt[n]{\sqrt{n}}\right)^n = (1+x_n)^n \geqslant 1 + nx_n,$$

从而$0 < x_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}$. 这就推得$\lim x_n = 0$. 因此,

$$\sqrt[n]{n} = \left(\sqrt[n]{\sqrt{n}}\right)^2 = (1+x_n)^2 \to 1.$$

另一种证明如下: 由L'Hôpital法则, 我们有$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = 0$, 从而$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} = 0$. 因此利用指数函数的连续性, 我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

对于括号内的部分, 首先假设$a > 1$. 那么容易看到对所有$n > a$, $1 \leqslant \sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{n}$ 正确. 因此由"夹逼定理", 我们看到$\lim \sqrt[n]{a} = 1$. 如果$0 < a < 1$, 那么$1/a > 1$, 从而$\lim \sqrt[n]{1/a} = \lim 1/\sqrt[n]{a} = 1$, 由此可得在这种情形下$\lim \sqrt[n]{a} = 1$ 也正确.

习题4.10　如果$\{x_n\}$ 是一个严格正的实数列, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\ \inf \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \lim_{n\to\infty}\ \inf \sqrt[n]{x_n} \leqslant \lim_{n\to\infty}\ \sup \sqrt[n]{x_n} \leqslant \lim_{n\to\infty}\ \sup \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

由此推出如果$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 在$\mathbb{R}$ 内存在, 那么$\lim \sqrt[n]{x_n}$ 也存在而且$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \sqrt[n]{x_n}$.

解　设$\{x_n\}$ 是一个使得对一切n, $x_n > 0$ 成立的实数列. 我们将证明$\limsup \sqrt[n]{x_n} \leqslant \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$, 而把其他的不等式留给读者.记

$$x = \lim\ \sup \frac{x_{n+1}}{x_n} = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{k=n}^{\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k},$$

注意到若$x = \infty$, 那么结论显然正确. 所以我们可以假设$x < \infty$.

设$\varepsilon > 0$ 固定. 那么存在某个k 使得对所有的$n \geqslant k$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} < x + \varepsilon$ 成立. 现在对$n > k$ 我们有

$$x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdots \frac{x_{k+1}}{x_k} \cdot x_k \leqslant (x+\varepsilon)^{n-k} x_k = (x+\varepsilon)^n c,$$

---

1. 这里应该是$n > 1$. ——译者注

其中$c = x_k(x+\varepsilon)^{-k}$ 是一个常数. 因此对一切$n \geqslant k$, $\sqrt[n]{x_n} \leqslant (x+\varepsilon)\sqrt[n]{c}$ 成立, 从而由$\lim \sqrt[n]{c} = 1$ (参见习题4.9)和习题4.8, 我们得到

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty}(x+\varepsilon)\sqrt[n]{c} = (x+\varepsilon)\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = x+\varepsilon.$$

因为$\varepsilon > 0$ 是任意的, 我们得到$\limsup \sqrt[n]{x_n} \leqslant x = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

习题4.11 一个实数列$\{x_n\}$ 的**平均数列**$\{a_n\}$ 是由$a_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 定义的数列. 如果$\{x_n\}$ 是一个有界的实数列, 那么证明

$$\liminf x_n \leqslant \liminf a_n \leqslant \limsup a_n \leqslant \limsup x_n.$$

特别地, 如果$x_n \to x$, 那么$a_n \to x$. $\{a_n\}$ 收敛蕴涵着$\{x_n\}$ 收敛吗?

解 该解答以下面上极限和下极限的性质为基础:

- 如果$\{u_n\}$ 是一个有界的实数列, 那么对一切$\varepsilon > 0$ 不等式

$$u_k \geqslant \limsup u_n + \varepsilon \quad 且 \quad u_m \leqslant \liminf u_n - \varepsilon$$

对有限个k 和m 成立.

为了证明这一点, 由反证法假设$u_k \geqslant \limsup u_n + \varepsilon$ 对无穷多个k 成立. 那么存在$\{u_n\}$ 的一个子列$\{v_n\}$ 满足对一切n, $v_n \geqslant \limsup u_n + \varepsilon$. 因为$\{v_n\}$ 是一个有界数列, 所以存在$\{v_n\}$ 的一个子列$\{w_n\}$ (因此也是$\{u_n\}$ 的子列)满足$w_n \to w \in \mathbb{R}$.由习题4.8, 我们知道$w \geqslant \limsup u_n + \varepsilon$, 即, w 是$\{u_n\}$ 的一个比$\{u_n\}$ 的最大极限点($\limsup u_n$)还要大的极限点, 矛盾.

现在, 设$\{x_n\}$ 是一个有界的实数列并且固定$\varepsilon > 0$. 记$\ell = \limsup x_n$ 而且设$K = \{k \in \mathbb{N} : x_k \geqslant \ell + \varepsilon\}$. 由上面的讨论知道$K$ 是一个有限集. 定义

$$S_n = \{i \in \mathbb{N} : i \in K 而且 i \leqslant n\} \quad 和 \quad T_n = \{i \in \mathbb{N} : i \notin K 而且 i \leqslant n\},$$

再由

$$s_n = \sum_{i\in S_n} x_i \quad 和 \quad t_n = \sum_{i\in T_n} x_i$$

定义数列$\{s_n\}$ 和$\{t_n\}$. 显然, $\{s_n\}$ 是一个常数列, $t_n \leqslant n(\ell+\varepsilon)$ 对一切n 成立, 而且$a_n = (s_n + t_n)/n$. 因为$s_n/n \to 0$ 而且对一切n, $t_n/n \leqslant \ell + \varepsilon$, 由习题4.7和4.8可得

$$\limsup a_n = \limsup \left(\frac{s_n}{n} + \frac{t_n}{n}\right) = \lim \frac{s_n}{n} + \limsup \frac{t_n}{n} = \limsup \frac{t_n}{n} \leqslant \ell + \varepsilon.$$

由于$\varepsilon > 0$ 是任意的, 我们得到$\limsup a_n \leqslant \ell = \limsup x_n$. 类似地, $\liminf x_n \leqslant \liminf a_n$. 如果$x_n \to x$, 那么$x = \liminf x_n = \limsup x_n$, 从而$x = \liminf a_n = \limsup a_n$. 这就推得$a_n \to x$.

平均数列$\{a_n\}$ 的收敛不能推出$\{x_n\}$ 收敛. 例如, 如果$x_n = (-1)^n$, 那么$a_n \to 0$, 而$\{x_n\}$ 不收敛.

习题4.12　对于一个实数列$\{x_n\}$证明下列结论.

(a) 如果在$\mathbb{R}$内$x_{n+1}-x_n \to x$, 那么$x_n/n \to x$.

(b) 如果$\{x_n\}$是有界的而且对所有的$n=2,3,\cdots$, $2x_n \leqslant x_{n+1}+x_{n-1}$成立, 那么$x_{n+1}-x_n \uparrow 0$.

解　(a) 假设在$\mathbb{R}$内$x_{n+1}-x_n \to x$. 注意到对一切n, $\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)=x_{n+1}-x_1$. 由习题4.11, 我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)=\frac{1}{n}(x_{n+1}-x_1)\to x.$$

因为$x_1/n \to 0$, 所以$x_{n+1}/n \to x$. 现在注意到

$$\frac{x_n}{n}=\frac{x_n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\to x\cdot 1=x.$$

(b) 条件$2x_n \leqslant x_{n+1}+x_{n-1}$可以写成对一切$n=2,3,\ldots$, $x_n-x_{n-1}\leqslant x_{n+1}-x_n$, 这可推得有界数列$\{x_{n+1}-x_n\}$是一个单调增数列, 因此是收敛的. 设在$\mathbb{R}$内$x_{n+1}-x_n \uparrow x$. 由(a)我们有$x_n/n \to x$. 但是, $\{x_n\}$是一个有界数列, 所以, $x_n/n \to 0$. 因此, $x=0$, $x_{n+1}-x_n \uparrow 0$.

习题4.13　考虑定义为

$$0<x_1<1, x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}, n=1,2,\ldots$$

的数列$\{x_n\}$.证明$x_n \downarrow 0$, 并且证明$x_{n+1}/x_n \to 1/2$.

解　我们断言

$$0<x_{n+1}<x_n<1 \qquad (\bigstar)$$

对一切$n=1,2,\ldots$成立. 为了证明这一断言我们利用数学归纳法. 因为$0<x_1<1$, 我们有$0<1-x_1<1$, 从而$0<1-x_1<\sqrt{1-x_1}<1$. 因此, $0<1-\sqrt{1-x_1}=x_2<x_1<1$. 即, $(\bigstar)$对$n=1$成立.

由归纳法, 假设$(\bigstar)$对某个n成立. 这可推得$0<1-x_n<1-x_{n+1}<1$, 从而, $0<\sqrt{1-x_n}<\sqrt{1-x_{n+1}}<1$, 由此可得

$$0<x_{n+2}=1-\sqrt{1-x_{n+1}}<1-\sqrt{1-x_n}=x_{n+1}<1,$$

它说明$(\bigstar)$对$n+1$成立. 这就完成了归纳法而且保证$(\bigstar)$对一切n成立.

现在, 因为$\{x_n\}$是单调减的而且有下界, 所以它收敛, 比如说, 收敛于$x\in\mathbb{R}$. 显然$0\leqslant x<1$. 另外, 我们有

$$x=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt{1-x_n})=1-\sqrt{1-x}.$$

换句话说, x是方程$x=1-\sqrt{1-x}$的非负解. 解这个方程得$x=0$或者$x=1$. 因此, $x=0$, 从而$x_n \downarrow 0$.

对于最后一部分, 注意到,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1-\sqrt{1-x_n}}{x_n}=\frac{1}{1+\sqrt{1-x_n}}\to\frac{1}{2},$$

因此解毕.

习题4.14 证明由

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

定义的数列$\{x_n\}$ 是一个收敛的数列.

解 由二项展开式得:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} = 1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} \\ &= 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}\cdot\frac{1}{n^i} \\ &= 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right) \\ &\leqslant 1+\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n+1}\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}. \end{aligned}$$

因此, $\{x_n\}$ 是单调增的. 另外注意到对$n\geqslant 2$ 我们有

$$x_n = 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\leqslant 2+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i!}\leqslant 2+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{2^{i-1}}\leqslant 3.$$

由定理4.3知道$\{x_n\}$ 收敛. (当然, $\lim x_n = \mathrm{e} = 2.718\cdots$.)

习题4.15 假设数列$\{x_n\}$ 满足对$n=2,3,\cdots$, 和某个固定的$0<\alpha<1$ 有

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant \alpha|x_n-x_{n-1}|,$$

证明$\{x_n\}$ 是一个收敛的数列.

解 设$c=|x_2-x_1|$. 由数学归纳法容易证得对一切n 我们有$|x_{n+1}-x_n|\leqslant c\alpha^{n-1}$. 因此对所有的$n$ 和p,

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant\sum_{i=1}^{p}|x_{n+i}-x_{n+i-1}|\leqslant c\sum_{i=1}^{p}\alpha^{n+i-2}\leqslant\frac{c}{1-\alpha}\alpha^{n-1}$$

成立. 因为$\lim\alpha^n=0$, 所以$\{x_n\}$ 是一个Cauchy数列, 从而是一个收敛数列.

习题4.16 证明定义为$x_1=1$, 而且对$n=1,2,\cdots$

$$x_{n+1}=\frac{1}{3+x_n}$$

的数列$\{x_n\}$ 收敛并确定它的极限.

解 显然, 对一切n, $x_n > 0$ 成立, 注意到, 对$n = 2, 3, \cdots$,

$$|x_{n+1} - x_n| = \left|\frac{1}{3+x_n} - \frac{1}{3+x_{n-1}}\right| = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{(3+x_n)(3+x_{n-1})} \leqslant \frac{1}{9}|x_n - x_{n-1}|$$

成立. 由习题4.15知道数列$\{x_n\}$ 收敛. 如果$\lim x_n = x$, 那么$x \geqslant 0$, 并且

$$x = \lim x_{n+1} = \frac{1}{3 + \lim x_n} = \frac{1}{3+x}.$$

解此方程, 我们得到$x = (-3 + \sqrt{13})/2$.

习题4.17 考虑由$x_1 = 1$, 而且对$n = 1, 2, \cdots$

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + x_n}$$

定义的数列$\{x_n\}$. 证明$\{x_n\}$ 是一个收敛数列而且$\lim x_n = \sqrt{2}$.

解 由数学归纳法容易证得对一切n, $x_n > 0$. 实际上, 由此可得对一切n, $1 \leqslant x_n \leqslant 2$. 现在注意到对一切$n = 2, 3, \cdots$,

$$\begin{aligned}|x_{n+1} - x_n| &= \left|\frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{1+x_{n-1}}\right| \\ &= \frac{|x_n - x_{n-1}|}{(1+x_n)(1+x_{n-1})} \\ &\leqslant \frac{|x_n - x_{n-1}|}{(1+1)(1+1)} = \frac{1}{4}|x_n - x_{n-1}|\end{aligned}$$

由习题4.15知道数列$\{x_n\}$ 收敛. 设$x_n \to x$. 因为对一切n, $x_n \geqslant 1$, 我们看到$x \geqslant 1$. 那么

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1+x_n}\right) = 1 + \frac{1}{1+x}.$$

即, x 是方程$x = 1 + \frac{1}{1+x}$ 或者$x^2 + x = 1 + x + 1$ 的正的解. 由此可得$x^2 = 2$, 从而$x = \sqrt{2}$.

习题4.18 定义数列$\{x_n\}$ 为$x_1 = 1$, 而且

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

证明$\{x_n\}$ 收敛而且$\lim x_n = \sqrt{2}$.

解 显然, 对一切n, $x_n > 0$ 成立(用数学归纳法证明!). 另外, 对一切n

$$x_{n+1}^2 - 2 = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{2}{x_n}\right)^2 \geqslant 0$$

成立. 因此, 如果$n \geqslant 2$, 那么

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - x_n = \frac{2 - x_n^2}{2x_n} \leqslant 0,$$

从而对一切$n \geqslant 2$, $0 < x_{n+1} < x_n$ 成立. 由定理4.3得, $x = \lim x_n$ 存在. 因为对一切$n \geqslant 2$, $x^2 \geqslant 2$ 成立, 所以我们看到$x > 0$. 由递推公式可得$2x = x + \frac{2}{x}$, 或者$x^2 = 2$. (还要注意极限不依赖于初始项$x_1 > 0$ 的选择.)

习题4.19 对$n = 1, 2, \cdots$ 定义数列$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. 证明数列$\{x_n\}$ 在$\mathbb{R}$ 内不收敛. (也可参见习题5.10.)

解 显然, 不等式

$$\begin{aligned} x_{2n} - x_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \\ &\geqslant \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

证得$\{x_n\}$ 不是一个Cauchy数列, 因此它在$\mathbb{R}$ 内不收敛.

习题4.20 设$-\infty < a < b < \infty$ 而且$0 < \lambda < 1$.定义数列$\{x_n\}$ 为, $x_1 = a, x_2 = b$, 而且对$n = 1, 2, \cdots$

$$x_{n+2} = \lambda x_n + (1 - \lambda) x_{n+1}$$

证明$\{x_n\}$ 在$\mathbb{R}$ 内收敛并且求出它的极限.

解 将$x_{n+2} = \lambda x_n + (1-\lambda) x_{n+1} = \lambda x_n + x_{n+1} - \lambda x_{n+1}$ 重新写成$x_{n+2} - x_{n+1} = \lambda(x_n - x_{n+1})$, 我们看到对一切$n$

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \lambda |x_{n+1} - x_n|$$

成立. 现在, 由习题4.15知道$\{x_n\}$ 是一个收敛数列. 然而, 我们不能通过在递推公式$x_{n+2} = \lambda x_n + (1-\lambda) x_{n+1}$ 两边求极限而得到数列$\{x_n\}$ 的极限. 我们将用一种不同的方法计算数列$\{x_n\}$ 的极限.

为简单起见, 记$\mu = 1 - \lambda$. 首先, 我们将证明对一切n

$$x_1 < x_3 < \cdots < x_{2n+1} < x_{2n} < x_{2n-2} < \cdots < x_2$$

成立.

用数学归纳法证明. 对$n = 1$, 不等式化为$x_1 < x_2$, 这是显然成立的. 所以, 由归纳法步骤, 假设对某个n, $x_{2n-1} < x_{2n}$. 那么,

$$x_{2n+1} = \lambda x_{2n-1} + \mu x_{2n} = x_{2n-1} + \mu(x_{2n} - x_{2n-1}) > x_{2n-1}.$$

而且

$$x_{2n+1} = \lambda x_{2n-1} + \mu x_{2n} = x_{2n} - \lambda(x_{2n} - x_{2n-1}) < x_{2n}.$$

现在, 注意到

$$x_{2n+1} < \lambda x_{2n-1} + (1 - \lambda) x_{2n} = x_{2n+2} < x_{2n}.$$

其次, 如果我们设$d_n = x_{2n} - x_{2n-1}$, 那么容易证明(参见图1.1)

$$d_{n+1} = \lambda \mu d_n, \tag{1}$$

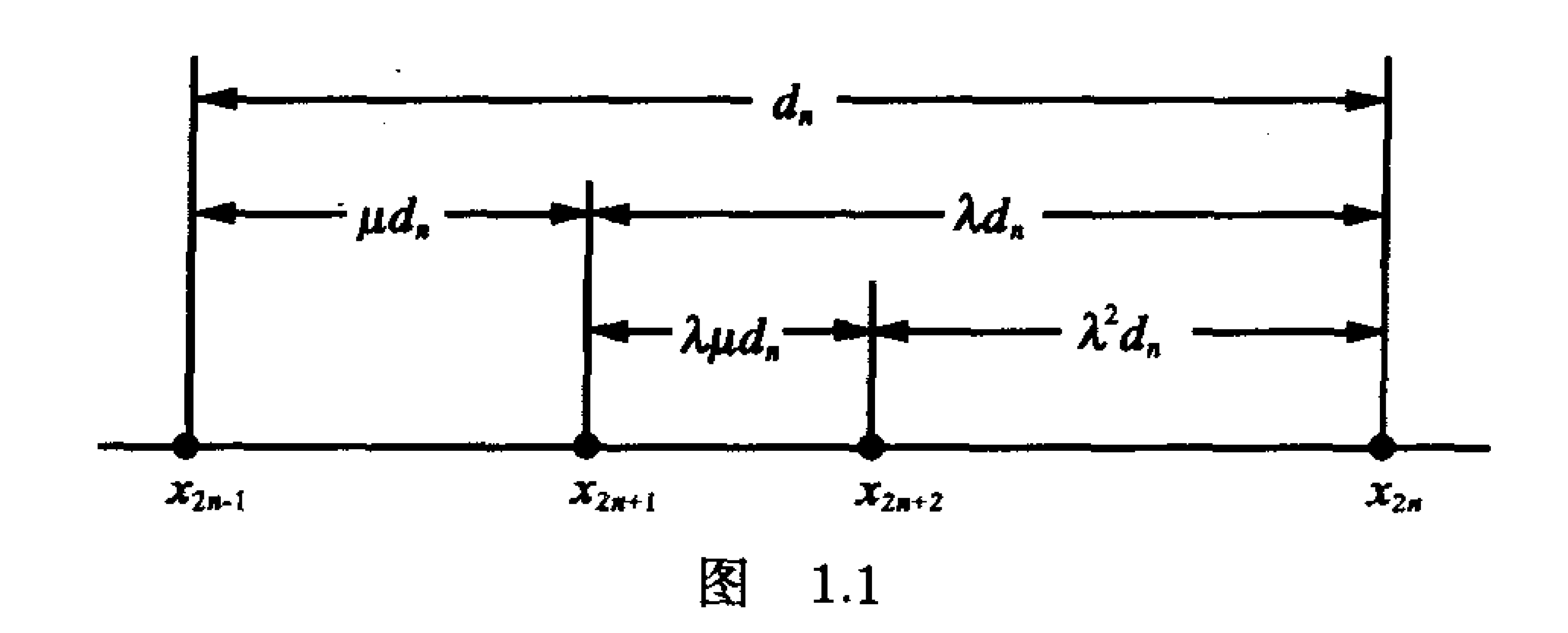


图 1.1

$$x_{2n+1} = x_{2n-1} + \mu d_n, \tag{2}$$

$$x_{2n+2} = x_{2n} - \lambda^2 d_n. \tag{3}$$

由(1)可得

$$d_n = (\lambda\mu)^{n-1} d_1 = (\lambda\mu)^{n-1}(b-a),$$

从而由(2)和(3), 我们得到

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= x_1 + \sum_{i=1}^{n} (x_{2i+1} - x_{2i-1}) = x_1 + \sum_{i=1}^{n} \mu d_i \\ &= x_1 + \mu \sum_{i=1}^{n} (\lambda\mu)^{i-1} d_1 = x_1 + \frac{\mu d_1[1-(\lambda\mu)^n]}{1-\lambda\mu} \\ &= a + \frac{\mu(b-a)[1-(\lambda\mu)^n]}{1-\lambda\mu}, \end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned} x_{2n+2} &= x_2 - \sum_{i=1}^{n} (x_{2i} - x_{2i+2}) = x_2 - \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} (\lambda\mu)^{i-1} d_i \\ &= x_2 - \frac{\lambda^2[1-(\lambda\mu)^n] d_1}{1-\lambda\mu} = b - \frac{\lambda^2(b-a)[1-(\lambda\mu)^n]}{1-\lambda\mu}. \end{aligned}$$

因此,

$$x_{2n+1} \uparrow a + \tfrac{\mu(b-a)}{1-\lambda\mu} = \tfrac{\lambda^2 a + \mu b}{1-\lambda\mu} \quad \text{而且} \quad x_{2n} \downarrow b - \tfrac{\lambda^2(b-a)}{1-\lambda\mu} = \tfrac{\lambda^2 a + \mu b}{1-\lambda\mu},$$

所以, $\lim x_n = (\lambda^2 a + \mu b)/(1-\lambda\mu)$.

习题4.21 设G 是$\mathbb{R}$ 的一个非空子集, 在加法下它是一个群(即, 如果$x, y \in G$, 那么$x+y \in G$ 而且$-x \in G$). 证明在任何两个不同的实数之间存在一个G 的元素或者存在一个$a \in \mathbb{R}$ 使得$G = \{na : n = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$.

解 假设$G \neq \{0\}$. 设$a = \inf\{G \cap (0,\infty)\}$. 我们分两种情形.

(1) $a > 0$ 在此情形下, 我们将证明$G = \{na : n = 0, \pm1, \cdots\}$. 为了证明这一点, 首先注意到$a \in G$. 事实上, 如果$a \notin G$, 那么存在$x, y \in G$ 使得$a < x < y < 3a/2$. 那么元素$z = y - x \in G$ 满足$0 < z < a/2$, 与a 的定义矛盾. 现在, 如果$x \in G$, 那么必然存在某个

整数n 使得$na \leqslant x < (n+1)a$ 成立. 然而, $x = na$ 也必然成立, 否则元素$x - na \in G$ 满足$0 < x - na < a$, 这又矛盾.

(2) $a = 0$ 在此情况下, 我们断言在任何两个不同的实数之间存在一个G 的元素.

为了说明这一点, 我们只要考虑$0 < x < y$. 设$\delta = \min\{x, y - x\} > 0$. 取一个元素$z \in G$ 使得$0 < z < \delta$. 由Archimedes 性质(定理3.3)知道集合$A = \{n \in \mathbb{N} : nz \geqslant y\}$ 是非空的, 而且由良序原理知道元素$k = \min A$ 存在. 现在, 注意到元素$b = (k-1)z \in G$ 满足$x < b < y$.

习题4.22 *确定数列$\{\cos n\}$ 的极限点.*

解 我们断言数列$\{\cos n\}$ 的极限点的极限点集是$[-1, 1]$. 为了证明它, 我们需要两个初等微积分的事实.

a) 介值定理;

b) 不等式: 对所有的$x, y \in \mathbb{R}$,$|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$.

设$G = \{n + 2m\pi : n, m是整数\}$. 显然, 在加法下$G$ 是一个群, 并且由于π 是一个无理数, 易见G 不是形如$\{na : n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 的集合. 现在, 设$x \in [-1, 1]$ 而且$\varepsilon > 0$. 由介值定理, 存在某个$y \in \mathbb{R}$ 满足$\cos y = x$. 前面习题4.21证得存在两个整数n 和m 满足$y < n + 2m\pi < y + \varepsilon$. 因此

$$|x - \cos n| = |\cos y - \cos(n + 2m\pi)| \leqslant n + 2m\pi - y < \varepsilon.$$

上述命题证得给定$x \in [-1, 1]$ 和$\varepsilon > 0$, 存在某个非负整数n 使得$|x - \cos n| < \varepsilon$. 由此易得(如何得到?)$[-1, 1]$ 上的每一个点必是$\{\cos n\}$ 的一个极限点.

习题4.23 *对每一个n 由$f_n(x) = x^n$ 定义$f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. 确定$\limsup f_n$ 和$\liminf f_n$.*

解 我们有

$$\lim\ \sup f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = -1 \\ 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

和

$$\lim\ \inf f_n(x) = \begin{cases} -1, & x = -1 \\ 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

习题4.24 *证明每一个实数列都有一个单调子列. 利用这一结论给出实数的Bolzano-Weierstrass 性质的另一证明. Bolzano-Weierstrass 性质: 每一个有界数列有一个收敛子列(参见推论4.7).*

解 设$\{x_n\}$ 是一个实数列. 我们考虑自然数集

$$S = \{k \in \mathbb{N} : 对所有的m \geqslant k, x_k \leqslant x_m\},$$

并且分两种情形.

(1) S 是无限的.

在这种情形下, 我们可以记$S=\{k_1,k_2,\cdots\}$, 其中, $k_1<k_2<\cdots$. 这时, 显然有$\{x_n\}$ 的子列$\{x_{k_n}\}$ 是单调增的.

(2) S 是有限的(而且可能是空的).

在这种情形下, 如果我们记$k_1=1+\max S$ (若$S=\varnothing$, 设$\max S=0$), 那么对一切$k\geqslant k_1$ 存在某个$m>k$ 使得$x_m<x_k$. 所以, 由归纳法, 若k_n 已经取定, 那么我们可以取某个自然数k_{n+1} 使得$x_{k_{n+1}}<x_{k_n}$. 这就推得$\{x_{k_n}\}$ 是$\{x_n\}$ 的一个严格单调减的子列, 而且结论得证.

对于Bolzano-Weierstrass性质, 注意到, 如果$\{x_n\}$ 是一个有界数列, 那么, 由上述结论, $\{x_n\}$ 有一个单调子列, (由定理4.3)它在$\mathbb{R}$ 内必收敛. (我们注意到该结果证得有界数列不仅有一个收敛子列而且有一个单调收敛子列.)

5. 广义实数

习题5.1　设$\{x_n\}$ 是$\mathbb{R}^*$[1] 的一个数列. $x\in\mathbb{R}^*$ 称为$\{x_n\}$ 在$\mathbb{R}^*$ 内的一个极限点, 若存在$\{x_n\}$ 的一个子列收敛于x.

证明

$$\limsup x_n=\inf_n[\sup_{k\geqslant n}x_k] \text{ 和 } \liminf x_n=\sup_n[\inf_{k\geqslant n}x_k]$$

分别是$\{x_n\}$ 在$\mathbb{R}^*$ 内的最大和最小极限点.

解　只证上极限的情形. 设$x=\limsup x_n\in\mathbb{R}^*$. 那么产生3种情形:

a) $x\in\mathbb{R}$

在此情形下, 只要重复定理4.6的证明即可.

b) $x=\infty$

在此情形下, 我们只需证明x 是$\{x_n\}$ 的一个极限点. 注意到对一切n, $\vee_{i=n}^{\infty}x_i=\infty$[2]. 取某个$k_1\geqslant 1$ 使得$x_{k_1}>1$. 现在, 由归纳法: 若取得k_n 使得$x_{k_n}>n$, 那么利用$\vee_{i=n}^{\infty}x_i=\infty$ 可以选取某个$k_{n+1}\geqslant k_n+1>k_n$ 使得$x_{k_{n+1}}>n+1$. 显然, $\{x_{k_n}\}$ 是$\{x_n\}$ 的一个子列满足$\lim x_{k_n}=\infty$.

c) $x=-\infty$

在此情形下, 我们将证明$\lim x_n=-\infty$.设$0<M<\infty$. 由$\vee_{i=n}^{\infty}x_i\downarrow-\infty$ 可得, 对某个n, $\vee_{i=n}^{\infty}x_i<-M$, 从而对所有的$i\geqslant n$, $x_i<-M$. 即, $\lim x_n=-\infty$.

习题5.2　设$\{x_n\}$ 是使得$\ell=\lim\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 在$\mathbb{R}$ 内存在的正实数列. 证明:

(a) 若$\ell<1$, 那么$\lim x_n=0$;

(b) 若$\ell>1$, 那么$\lim x_n=\infty$.

---

1. $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\ \infty\}$. ——译者注

2. $\vee_{i=n}^{\infty}x_i=\sup_{i\geqslant n}x_i$. ——译者注

解 (a) 假设$\ell < 1$ 并且固定某个δ 使得$\ell < \delta < 1$; 比如说, 设$\delta = \frac{1+\ell}{2}$. 因为$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$, 那么存在某个$k > 1$ 使得对所有的$n \geqslant k$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \delta$ 成立. 现在, 如果$n > k$, 那么注意到

$$x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdots \frac{x_{k+1}}{x_k} \cdot x_k < \underbrace{\delta \cdot \delta \cdots \delta}_{n-k\text{项}} \cdot x_k = \delta^{n-k} x_k = \left(\frac{x_k}{\delta^k}\right) \delta^n.$$

从而若$c = x_k/\delta^k$, 那么对所有的$n > k$ 有

$$0 < x_n < c\delta^n$$

成立. 因为(考虑到$0 < \delta < 1$)$\delta^n \to 0$, 我们容易得到$x_n \to 0$.

(b) 现在假设$\ell > 1$ 并且取某个δ 使得$1 < \delta < \ell$. 因为$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$, 那么存在某个$k > 1$ 使得对所有的$n \geqslant k$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} > \delta$ 成立. 因此, 同前面情形一样, 存在某个常数$c > 0$ 满足对所有的$n > k$, $x_n > c\delta^n$. 由$\delta^n \to \infty$, 容易得到$x_n \to \infty$.

习题5.3 设对所有的m, n 有, $0 \leqslant a_{n,m} \leqslant \infty$, 并且设$\sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 是一对一的和到上的. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{\sigma(n,m)}.$$

解 这可由定理5.4立即得到.

习题5.4 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + m^2} = \infty.$$

解 该级数的敛散性与二重积分$\int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 的敛散性相同. 现在, 注意到

$$\int_1^{\infty} \left[\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}\right] \mathrm{d}y \geqslant \frac{\pi}{2} \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y} = \infty.$$

另一解法如下. 首先注意到不等式

$$\frac{1}{n^2 + m^2} > \frac{1}{(n+m)^2} > \frac{1}{(n+m)(n+m+1)} = \frac{1}{n+m} - \frac{1}{n+m+1}$$

蕴涵着$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+m^2} \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+m} - \frac{1}{n+m+1}\right) = \frac{1}{n+1}$.因此,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + m^2} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty.$$

习题5.5 本习题描述了$(0,1)$ 内实数的p 进制表示. 我们设p 是一个满足$p \geqslant 2$ 的自然数, 并且$x \in (0,1)$.

(a) 将区间$[0,1)$ 分成p 个左闭右开的区间

$$\left[0,\frac{1}{p}\right),\left[\frac{1}{p},\frac{2}{p}\right),\cdots,\left[\frac{p-1}{p},1\right),$$

而且依次给它们编号为$0, 1,\cdots,p-1$. 于是x 恰好属于这些区间中的一个, 比如说属于第k_1 个区间($0\leqslant k_1<p$). 然后, 将区间$[\frac{k_1}{p},\frac{k_1+1}{p})$ 分成p 个左闭右开的子区间(长度相同), 依次给它们编号为$0, 1,\cdots,p-1$, 而且设x 属于的子区间为第k_2 个子区间. 如此下去我们构造了一个非负整数列$\{k_n\}$ 使得对一切n , $0\leqslant k_n<p$. 证明

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n}{p^n}.$$

(b) 如同(a), 现在将每一个区间分割成p 个左开右闭的区间. 例如, 从$(0,1]$ 开始并且将它分成左开右闭的区间$(0,\frac{1}{p}]$, $(\frac{1}{p},\frac{2}{p}]$, $\cdots$, $(\frac{p-1}{p},1]$.

同(a)一样, 构造一个非负整数列$\{m_n\}$ 使得对一切n, $0\leqslant m_n<p$. 证明

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m_n}{p^n}.$$

(c) 举例说明(a)和(b)两种方式构造的数列可以是不同的.

为了使得一个数的p 进制表示唯一, 我们约定采取上面(a)所确定的表示. 通常, 它将被写成$x=0.k_1k_2\cdots$.

解 对于(a)和(b)注意到对所有的n, $|x-\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{p^i}|\leqslant\frac{1}{p^n}$ 成立.

对于(c), 例如取$p=2$ 并且注意到对$x=1/2$ 我们有$k_1=1$ 而且$n>1$ 时, $k_n=0$, 而$m_1=0$ 而且$n>1$ 时, $m_n=1$.

习题5.6 通过建立下列命题证明$\mathcal{P}(\mathbb{N})\approx\mathbb{R}$:

(i) 如果A 是一个无限集, $f:A\to B$ 是一一的并且使得$B\backslash f(A)$ 至多是可数的, 证明$A\approx B$.

(ii) 证明$(0,1)$ 内这样的数构成的集合是一个可数集, 这些数由上一题(a)和(b)所确定的二进制(即, $p=2$)表示不同.

(iii) 对一切$x\in(0,1)$, 设$x=0.k_1k_2\cdots$ 是上一题(a)所确定的二进制表示; 显然, 每一个k_i 要么是0 要么是1. 设$f(x)=\{n\in\mathbb{N}:k_n=1\}$. 证明$f:(0,1)\to P(\mathbb{N})$ 是一一的并且使得$\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash f((0,1))$ 是可数的, 从而由(a)可推出$(0,1)\approx\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

解 (i) 设$S=\{a_1,a_2,\cdots\}$ 是A 的一个可数子集.

(a) 假设$B\backslash f(A)=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 是一个有限集. 定义$g:A\to B$ 为: 若$x\notin S$, $g(x)=f(x)$; 对于a_i, $1\leqslant i\leqslant n$, $g(a_i)=b_i$; 对于$a_{i+n}, i=1,2,\cdots$, $g(a_{i+n})=f(a_i)$. 那么g 是一一的而且是到上的.

(b) 假设$B\backslash f(A)=\{b_1,b_2,\cdots\}$ 是可数的. 定义$g:A\to B$ 为: 若$x\notin S$, $g(x)=f(x)$; 对一切n, $g(a_{2n+1})=f(a_n)$, $g(a_{2n})=b_n$. 那么g 是一一的而且是到上的.

(ii) 设D 是$(0,1)$ 内所有这样的数构成的集合, 这些数中, 由上一题所确定的两个数列$\{k_n\}$和$\{m_n\}$ 是不同的. 假设$x = 0.k_1k_2\cdots = 0.m_1m_2\cdots \in D$ 并且定义自然数$r = \min\{n : k_n \neq m_n\}$. 我们可以假设$k_r = 1$ 而且$m_r = 0$. 由不等式

$$\begin{aligned} x - \sum_{n=1}^{r-1} \frac{m_n}{2^n} &= \sum_{n=r}^{\infty} \frac{m_n}{2^n} \leqslant \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^r} \\ &\leqslant \frac{1}{2^r} + \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{k_n}{2^n} = x - \sum_{n=1}^{r-1} \frac{k_n}{2^n} \\ &= x - \sum_{n=1}^{r-1} \frac{m_n}{2^n}, \end{aligned}$$

得到$x = \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2^2} + \cdots + \frac{k_{r-1}}{2^{r-1}} + \frac{1}{2^r}$. 特别地, 对一切$n > r$, $m_n = 1$ 而且$k_n = 0$.

另一方面, 不难看到每一个具有上面形式的x 都属于D. 现在证明D 是一个可数集就变得很平常了. (有趣的是, D 恰好是由在构造表示式时产生的子区间的端点所构成的.)

(iii) 设$A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. 定 义$\{0,1\}$ 的 数 列 为: 若$n \in A$, 则$m_n = 1$, 若$n \notin A$, 则$m_n = 0$, 然后令

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{2^n},$$

注意到$A \notin f((0,1))$ 当且仅当$x \in D$. 因此, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus f((0,1))$ 是可数的, 从而由(i)和f 是一一的知道$(0,1) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 成立.

习题5.7 对于实数列$\{x_n\}$ 证明下列条件等价:

(a) 级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 在$\mathbb{R}$ 内是重排不变的;

(b) 对于$\mathbb{N}$ 的每一个置换σ[1], 级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_n}$ 在$\mathbb{R}$ 内收敛;

(c) 级数$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 在$\mathbb{R}$ 内收敛;

(d) 对于$\{-1,1\}$ 的每一个数列$\{s_n\}$, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n$ 在$\mathbb{R}$ 内收敛;

(e) 对$\{x_n\}$ 的每一个子列$\{x_{k_n}\}$, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ 在$\mathbb{R}$ 内收敛;

(f) 对每一个$\varepsilon > 0$, 存在一个整数k (依赖于ε)使得对$\mathbb{N}$ 的每个有限子集S, 只要$\min S \geqslant k$ 就有$|\sum_{n \in S} x_n| < \varepsilon$.

(满足上述条件中任何一个的级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也叫做**无条件收敛级数**.)

解 (a) $\Rightarrow$ (b)显然.

(b) $\Rightarrow$ (c)假设$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \infty$. 由条件知道有无穷多个$n$ 使得$x_n > 0$, 也有无穷多个n 使得$x_n < 0$. 将$\{x_n\}$ 分成两个子列$\{y_n\}$ 和$\{z_n\}$ 使得对所有的n, $y_n \geqslant 0$ 和$z_n < 0$ 成立. 我们可以假设$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \infty$.

现在, 利用归纳法构造一个严格单调增的自然数列$\{k_n\}$ 使得

(1) $k_1 = 1$ 和$z_1 + \sum_{i=1}^{k_1} y_i > 1$;

1. $\mathbb{N}$的一个置换σ就是一个一对一的和到上的函数$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. ——译者注

(2) 对$n=1,2,\cdots$, $z_n+\sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}} y_i > 1$.

那么注意到

$$y_1,\cdots,y_{k_1},z_1,y_{k_1+1},\cdots,y_{k_2},z_2,y_{k_2+1},\cdots$$

是$\{x_n\}$ 的一个重排, 它的级数是不收敛的, 与我们的假设矛盾.

(c) $\Rightarrow$ (d)显然.

(d) $\Rightarrow$ (e)设$\{x_{k_n}\}$ 是$\{x_n\}$ 的一个子列. 对一切n, 若$i\neq k_n$, 则令$s_i=-1$, 而且令$s_{k_n}=1$. 那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} x_n+\sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n\right]$$

是一个收敛级数.

(e) $\Rightarrow$ (f)如果(f)不成立. 那么存在某个$\varepsilon>0$ 和一个自然数的有限子集构成的序列$\{S_n\}$ 使得$\max S_n<\min S_{n+1}$ 而且对所有的n, $\left|\sum_{i\in S_n} x_i\right|\geqslant\varepsilon$ 成立. 设

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n=\{k_1,k_2,\cdots\},$$

其中$k_n\uparrow$. 那么容易看到级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ 在$\mathbb{R}$ 内不收敛, 与(e)矛盾.

(f) $\Rightarrow$ (a)设$\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一个置换. 由条件我们已经看到级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_n}$ 的部分和形成一个Cauchy数列, 因此, 两个级数在$\mathbb{R}$ 内都收敛. 设$x=\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 并且$y=\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_n}$.

现在, 给定$\varepsilon>0$, 那么可以取k 充分大使得对所有的$r\geqslant k$ 和$\mathbb{N}$ 的所有有限子集S, 只要$\min S\geqslant k$ 就有

$$\left|x-\sum_{n=1}^{r} x_n\right|<\varepsilon,\left|y-\sum_{n=1}^{r} x_{\sigma_n}\right|<\varepsilon,\quad \text{而且}\quad \left|\sum_{i\in S} x_i\right|<\varepsilon.$$

固定某个$r>k$ 使得对一切$1\leqslant i\leqslant k$ 存在$1\leqslant j\leqslant r$ 满足$x_i=x_{\sigma_j}$, 并且注意到对所有的$\varepsilon>0$, 有

$$|x-y|\leqslant\left|x-\sum_{n=1}^{k} x_n\right|+\left|\sum_{n=1}^{k} x_n-\sum_{n=1}^{r} x_{\sigma_n}\right|+\left|\sum_{n=1}^{r} x_{\sigma_n}-y\right|<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

成立, 从而$x=y$. 换句话说, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是重排不变的.

习题5.8　一个形如$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ 的级数, 其中, 对一切n, $x_n>0$, 称为**交错级数**. 假设一个严格正的实数列$\{x_n\}$ 满足$x_n\downarrow 0$. 证明以下结论:

(a) 交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ 在$\mathbb{R}$ 内收敛;

(b) 如果$\sum_{n=1}^{\infty} x_n=\infty$, 那么交错级数不是重排不变的.

解　(a) 设$s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x_k$.我们断言对一切$n$

$$s_2\leqslant s_4\leqslant\cdots\leqslant s_{2n-2}\leqslant s_{2n}\leqslant s_{2n-1}\leqslant s_{2n-3}\leqslant\cdots\leqslant s_3\leqslant s_1$$

成立. 用归纳法来证. 对于$n=1$, 我们有$s_2=x_1-x_2<x_1=s_1$. 所以, 假设不等式对某个n 正确. 那么考虑到$x_{2n}-x_{2n+1}\geqslant 0$ 而且$x_{2n+1}-x_{2n+2}\geqslant 0$, 我们看到

(1) $s_{2n} \leqslant s_{2n} + (x_{2n+1} - x_{2n+2}) = s_{2n+2} = s_{2(n+1)}$,

(2) $s_{2(n+1)} = s_{2n+2} = s_{2n+1} - x_{2n+2} \leqslant s_{2n+1} = s_{2(n+1)-1}$,

(3) $s_{2(n+1)-1} = s_{2n+1} = s_{2n-1} - (x_{2n} - s_{2n+1}) \leqslant s_{2n-1}$,

从而断言被证实.

如果$s_{2n} \uparrow s$ 和$s_{2n-1} \downarrow t$ 在$\mathbb{R}$ 内成立, 那么显然$s \leqslant t$. 另外, 由$s_{2n} - s_{2n-1} = -x_{2n} \to 0$, 我们得到$s = t$. 不过, 这蕴涵着$\{s_n\}$ 在$\mathbb{R}$ 内收敛于s(参见第4节的习题4.3). 因此交错级数收敛而且$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}x_k = \lim s_n = s$.

(b) 我们必然有$\sum_{k=1}^{\infty} x_{2k-1} = \infty$ 或者$\sum_{k=1}^{\infty} x_{2k} = \infty$. 假设$\sum_{k=1}^{\infty} x_{2k-1} = \infty$; 另一情形类似处理.

因为$\sum_{k=1}^{\infty} x_{2k-1} = \infty$, 那么对一切$n = 0, 1, \cdots$, 存在整数$0 = k_0 < k_1 < k_2 < \cdots$ 使得$[\sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}} x_{2i-1}] - x_{2n} > 1$ 成立. 考虑由

$$x_1, x_3, \cdots, x_{2k_1-1}, -x_2, x_{2k_1+1}, \cdots, x_{2k_2-1}, -x_4, x_{2k_2+1}, \cdots,$$

给出的数列$\{(-1)^{n-1}x_n\}$ 的重排$\{y_n\}$, 并且注意到$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \infty$ 成立.

习题5.9 本题描述了级数收敛的**积分判别法**. 假设$f: [1, \infty) \to [0, \infty)$ 是一个单调减函数. 我们定义数列$\{\sigma_n\}$ 和$\{\tau_n\}$ 为

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \quad \text{和} \quad \tau_n = \int_1^n f(x)\mathrm{d}x.$$

证明以下结论:

(a) 对所有的n, $0 \leqslant \sigma_n - \tau_n \leqslant f(1)$;

(b) 数列$\{\sigma_n - \tau_n\}$ 是单调减的——因此, 在$\mathbb{R}$ 内收敛;

(c) 证明级数$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ 在$\mathbb{R}$ 内收敛当且仅当广义Riemann积分$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\int_1^r f(x)\mathrm{d}x$ 在$\mathbb{R}$ 内存在.

解 因为f 是单调减的, 注意到对一切$k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant x \leqslant k+1$, 我们有$f(x) \geqslant f(k+1)$ 而且$f(x) \leqslant f(k)$. 所以, 在$[k, k+1]$ 上积分我们得到: 对一切$k = 1, 2, \cdots$

$$\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \geqslant f(k+1), \tag{1}$$

$$\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(k) \tag{2}$$

(注意, 作为一个单调减函数, f 在$[1, \infty)$ 的每个闭子区间上是Riemann可积的.)

(a) 利用(1), 我们看到

$$\begin{aligned}\sigma_n &= f(1) + \sum_{k=2}^{n} f(k) = f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \\ &\leqslant f(1) + \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x = f(1) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= f(1) + \tau_n.$$

这就推得对一切n, $\sigma_n - \tau_n \leqslant f(1)$. 另一方面, 利用(2)我们看到

$$\sigma_n \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^n f(x)\mathrm{d}x = \tau_n,$$

从而对一切n, $\sigma_n - \tau_n \geqslant 0$.

(b) 再次利用(1), 我们得到

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1} - \tau_{n+1} &= \sigma_n + f(n+1) - \tau_n - \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \sigma_n - \tau_n - \left[\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x - f(n+1)\right] \leqslant \sigma_n - \tau_n.\end{aligned}$$

这就证得$\{\sigma_n - \tau_n\}$ 是一个单调减数列, 从而, $\lim(\sigma_n - \tau_n)$ 在$\mathbb{R}$ 内存在.

(c) 因为$\{\sigma_n\}$ 和$\{\tau_n\}$ 都是单调增的非负实数列, 它们在$\mathbb{R}^*$ 内都收敛, 并且显然有

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ 和 } \lim_{n\to\infty} \tau_n = \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

但是由(a), 我们有对一切n, $\tau_n \leqslant \sigma_n \leqslant f(1) + \tau_n$, 因此(让$n \to \infty$), 我们有

$$0 \leqslant \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

该不等式证得$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ 收敛当且仅当广义Riemann积分$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

习题5.10 利用上一题证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, 对$0 < p \leqslant 1$ 在$\mathbb{R}$ 内不收敛, 对$p > 1$ 在$\mathbb{R}$ 内收敛. 下面问题是关于**调和级数**$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的.

(a) 用(至少)3种不同的方法证明$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

(b) 如果一台计算机每秒可以加调和级数的一百万项, 从1939 年12 月31 日午夜12 时开始到1997 年12 月31 日午夜12 时, 所得到的和是多少(误差要求不超过1)?(假设每年有365 天.);

(c) 证明$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$.

解 注意到

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases} \lim_{r\to\infty} \frac{r^{1-p}-1}{1-p}, & p \neq 1, \\ \lim_{r\to\infty} \ln r, & p = 1, \end{cases}$$

该极限当$p > 1$ 时是有限的, 而当$0 < p \leqslant 1$ 时是无穷大.

(a) 我们设$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. 这里给出调和级数发散的4种证明.

(1) 注意到对一切n, $\sigma_{2n} - \sigma_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \geqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. 这就证得$\{\sigma_n\}$ 不是Cauchy数列, 因此是发散的.

(2) 同本题解答最开始时一样, 可证得, $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \infty$, 从而$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

(3) 我们断言, 对一切n, $\sigma_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$. (如果建立了该不等式, 那么显然有$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \lim \sigma_{2^n} = \infty$.) 由归纳法证明该不等式. 对$n = 1$, 我们有$\sigma_{2^1} = \sigma_2 = 1 + \frac{1}{2}$. 假设不等式对某个$n$ 正确, 那么

$$\begin{aligned}\sigma_{2^{n+1}} &= \sigma_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n} \\ &\geqslant 1 + \frac{n}{2} + 2^n \times \frac{1}{2 \times 2^n} = 1 + \frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

(4) 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9}\right] + \left[\frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{99}\right] + \left[\frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{999}\right] + \cdots \\ &\geqslant 9 \times \frac{1}{10} + 90 \times \frac{1}{100} + 900 \times \frac{1}{1000} + \cdots \\ &= \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \cdots = \infty.\end{aligned}$$

(b) 由习题5.9, 我们知道调和级数与函数$f(x) = 1/x$ 有关, 而且对一切n, $0 \leqslant \sigma_n - \ln n \leqslant f(1) = 1$. 所以, $\ln n$ 逼近σ_n 误差在1以内. 如果计算机在1939年12月31日午夜12点开始加调和级数的项, 那么到1997年12月31日午夜12点, 有

$$57(\text{年}) \times 365(\text{天}) \times 24(\text{小时}) \times 60(\text{分钟}) \times 60(\text{秒}) = 1\,797\,552 \times 10^3\text{秒}.$$

所以, 如果计算机每秒可以加调和级数的$1\,000\,000 = 10^6$ 项, 那么在1997年12月31日午夜前的一秒所加到的最后的数是$N = 1\,797\,552 \times 10^9$. 因此,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \sigma_N \approx \ln N = 35.125\,202\,13 \cdots,$$

这就说明调和级数是一个发散得“非常慢”的级数.

(c) 由习题5.8, 我们知道交错级数$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x_k$ 在$\mathbb{R}$ 内收敛. 而且, 由习题5.9, 我们知道$\lim(\sigma_n - \ln n) = \gamma \in \mathbb{R}$. 所以, 如果设$x_n = \gamma - (\sigma_n - \ln n)$, 那么$x_n \to 0$ 而且对一切n, $\sigma_n = \gamma + \ln n + x_n$. 现在, 注意到对一切$n$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= \sigma_{2n} - \sigma_n = [\gamma + \ln(2n) + x_{2n}] - [\gamma + \ln n + x_n] \\ &= \ln 2 + x_{2n} - x_n,\end{aligned}$$

这就推得$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

习题5.11(Toeplitz) 设$\{a_n\}$是一个正实数列(即, 对一切n, $a_n>0$)并且记$b_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$. 假设$b_n\uparrow\sum_{i=1}^{\infty}a_i=\infty$. 如果$\{x_n\}$是一个实数列, 在$\mathbb{R}$内满足, $x_n\to x$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=x.$$

解 设$\varepsilon>0$. 取某个k使得对一切$n\geqslant k$, $|x_n-x|<\varepsilon$. 记$M=\max\{|x_i-x|:i=1,\ldots,k\}$, 然后取某个$\ell>k$使得对所有$n\geqslant\ell$, $\frac{Mb_k}{b_n}<\varepsilon$. 注意到, 若$n\geqslant\ell$, 那么

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}a_ix_i-x\right|&=\left|\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}a_ix_i-\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}a_ix\right|\\&\leqslant\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{k}a_i|x_i-x|+\frac{1}{b_n}\sum_{i=k+1}^{n}a_i|x_i-x|\\&\leqslant\frac{Mb_k}{b_n}+\varepsilon<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,\end{aligned}$$

结论得证. (注意到本题是习题4.11的一个重要推广)

习题5.12(Kronecker) 假设一个正数列$\{b_n\}$满足$0<b_1<b_2<b_3<\cdots$而且$b_n\uparrow\infty$.如果一个实级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$在$\mathbb{R}$内收敛, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}b_ix_i=0.$$

特别地, 若$\{y_n\}$是一个使得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{n}$在$\mathbb{R}$内收敛的实数列, 那么$\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}\to0$.

解 设$x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n$. 记$b_0=0$, $s_0=0$, 并且对一切$n\geqslant1$, $s_n=x_1+x_2+\cdots x_n$. 注意到,

$$\sum_{i=1}^{n}b_ix_i=\sum_{i=1}^{n}b_i(s_i-s_{i-1})=b_ns_n-\sum_{i=2}^{n}s_{i-1}(b_i-b_{i-1}).$$

因此, $\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}b_ix_i=s_n-\frac{1}{b_n}\sum_{i=2}^{n}s_{i-1}(b_i-b_{i-1})$. 因为对一切$i$, $b_i-b_{i-1}>0$, 并且$\sum_{i=1}^{n}(b_i-b_{i-1})=b_n\uparrow\infty$, 所以由上一题可得$\frac{1}{b_n}\sum_{i=2}^{n}s_{i-1}(b_i-b_{i-1})=x$. 因此,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}b_ix_i=\lim_{n\to\infty}\left[s_n-\frac{1}{b_n}\sum_{i=2}^{n}s_{i-1}(b_i-b_{i-1})\right]=x-x=0.$$

对于第二部分, 注意到, 若$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{n}$在$\mathbb{R}$内收敛, 那么对一切$n$取$b_n=n$, 并且注意到(由上面所证)

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{y_i}{i}=\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}\to0,$$

这就是所要证的.

6. 度量空间

习题6.1 对于一个度量空间(X,d) 的子集A 和B, 证明下列等式.

(a) $(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(b) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A\cup B)^\circ$.

(c) $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$.

(d) $\overline{A\cap B}\subseteq \overline{A}\cap\overline{B}$.

(e) 若B 是开集, 那么$\overline{A}\cap B\subseteq\overline{A\cap B}$.

解 (a) 由$(A\cap B)^\circ\subseteq A^\circ$ 和$(A\cap B)^\circ\subseteq B^\circ$ 可得, $(A\cap B)^\circ\subseteq A^\circ\cap B^\circ$. 另一方面, 由$(A\cap B)^\circ\subseteq A\cap B$ 成立, 并且$A^\circ\cap B^\circ$ 是开集, 易知$A^\circ\cap B^\circ\subseteq(A\cap B)^\circ$.

(b) 由$A\subseteq A\cup B$, 可得$A^\circ\subseteq(A\cup B)^\circ$. 类似地有$B^\circ\subseteq(A\cup B)^\circ$, 因此得到所要的结论.

(c) 由$S\subseteq\overline{S}$, 以及对任何子集S, $\overline{S}$ 是一个闭集, 我们看到

$$\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}\cup\overline{A\cup B}=\overline{A\cup B}\subseteq\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

(d) 因为$A\cap B\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$, 我们有$\overline{A\cap B}\subseteq\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

(e) 如果$x\in\overline{A}\cap B$ 并且$r>0$, 那么取某个$0<\delta<r$ 使得$B(x,\delta)\subseteq B$[1] , 并且注意到

$$B(x,r)\cap(A\cap B)\supseteq B(x,\delta)\cap B\cap A=B(x,\delta)\cap A\neq\varnothing.$$

即, $x\in\overline{A\cap B}$, 从而$\overline{A}\cap B\subseteq\overline{A\cap B}$ 成立.

习题6.2 证明在一个具有Euclid距离的Euclid空间$\mathbb{R}^n$ 中, 任何开球$B(a,r)$ 的闭包是闭球$\{x\in\mathbb{R}^n: d(x,a)\leqslant r\}$. 举例说明存在一个使得相应结论不正确的完备的度量空间.

解 设$C(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^k: d(a,x)\leqslant r\}$. 因为$C(a,r)$ 是闭集, 所以$\overline{B(a,r)}\subseteq C(a,r)$.

对于另一个包含关系, 设$x\in C(a,r)$. 对一切n, 设$x_n=a/n+(1-1/n)x$. 由不等式

$$d(a,x_n)=\left(1-\frac{1}{n}\right)d(a,x)\leqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)r<r \text{ 和} d(x,x_n)=\frac{1}{n}d(a,x)\leqslant\frac{r}{n}$$

可得$\{x_n\}\subseteq B(a,r)$ 而且$x_n\to x$. 因此, $x\in\overline{B(a,r)}$, 并由此可得$C(a,r)\subseteq\overline{B(a,r)}$ 也成立.

对于反例, 考虑具有离散距离的$X=\{0,1\}$, 并且注意到X 是一个完备的度量空间. 另外, 观察到$\overline{B(0,1)}=\{0\}$, 然而$C(0,1)=\{0,1\}$.

习题6.3 若A 是$\mathbb{R}$ 的一个非空子集, 证明集合

$$B=\{a\in\overline{A}: \text{存在某个}\varepsilon>0\text{使得}(a,a+\varepsilon)\cap A=\varnothing\}$$

是至多可数的.

1. $B(x,\delta)=\{y\in X: d(y,x)<\delta\}$. ——译者注

解　对一切$a \in B$取一个有理数$r_a > a$使得$(a, r_a) \cap A = \varnothing$. 我们断言若$a, b \in B$满足$a \neq b$, 那么$r_a \neq r_b$. 事实上, 如果$a < b$和$r_a = r_b$成立, 那么因为$b \in (a, r_a)$则开区间$(a, r_a)$是$b \in \overline{A}$的一个邻域, 从而$(a, r_a) \cap A \neq \varnothing$, 与$r_a$的选取矛盾.

上面证得从B到有理数集的映射$a \to r_a$是一对一的. 因此, 集合B是至多可数的.

习题6.4　设$f : (X, d) \to (Y, \rho)$是一个函数. 证明f是连续的, 当且仅当对Y的每个子集B有, $f^{-1}(B^\circ) \subseteq [f^{-1}(B)]^\circ$.

解　假设f是连续的, 并且$B \subseteq Y$. 因为B°是开的, 所以$f^{-1}(B^\circ)$也是开的. 因此, 由$B^\circ \subseteq B$, 我们有

$$f^{-1}(B^\circ) = [f^{-1}(B^\circ)]^\circ \subseteq [f^{-1}(B)]^\circ.$$

反之, 假设条件满足. 若$B \subseteq Y$是开的(即, 如果$B = B^\circ$成立), 那么

$$[f^{-1}(B)^\circ] \subseteq f^{-1}(B) = f^{-1}(B^\circ) \subseteq [f^{-1}(B)]^\circ$$

说明$f^{-1}(B)$是开的. 因此, f是连续的.

习题6.5　证明度量空间中开集或闭集的边界是无处稠密的. 该结论对任何子集都正确吗?

解　因为$\partial A = \partial A^c = \overline{A} \cap \overline{A^c}$成立, 所以我们可以假设$A$是闭的. 因此,

$$\begin{aligned}(\partial A)^\circ &= (\overline{A} \cap \overline{A^c})^\circ = (A \cap \overline{A^c})^\circ = A^\circ \cap (\overline{A^c})^\circ \\ &\subseteq A^\circ \cap \overline{A^c} = A^\circ \cap (A^\circ)^c = \varnothing.\end{aligned}$$

因为∂A是闭的, 这就证得∂A是无处稠密的.

另一证法如下: 若$x \in (\partial A)^\circ$, 则存在某个$r > 0$, 使得$B(x, r) \subseteq \partial A = A \cap \overline{A^c} \subseteq A$. 这就推得$B(x, r) \cap A^c = \varnothing$, 与$x \in \overline{A^c}$矛盾.

一个任意集合的边界未必是无处稠密的. 例如: 设$X = \mathbb{R}$具有Euclid距离, 并且设$A = \mathbb{Q}$(有理数集). 注意到$\partial A = \mathbb{R}$.

习题6.6　证明无理数集不是$\mathbb{R}$的可数个闭子集的并.

解　设I表示所有无理数构成的集合, 并且设$\{r_1, r_2, \cdots\}$是$\mathbb{R}$的有理数的一种排列.

由反证法假设存在$\mathbb{R}$的一个闭子集序列$\{A_n\}$, 使得$I = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. 那么,

$$\mathbb{R} = \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^\infty \{r_n\}\right),$$

并且由Baire纲定理(定理6.18), 存在某个n, 使得$(A_n)^\circ \neq \varnothing$. 因此, 某个$A_n$包含一个区间. 然而, 因为$A_n \subseteq I$成立并且每个区间都含有有理数, 这是不可能的, 从而结论得证.

习题6.7　设(X, d)是一个度量空间. 如果$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是X的Cauchy序列, 证明$\{d(x_n, y_n)\}$在$\mathbb{R}$内收敛.

解 利用不等式

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leqslant d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

(还可以参看定理6.19前面的讨论.)

习题6.8 证明在一个度量空间中一个Cauchy序列收敛当且仅当它有一个收敛的子列.

解 设$\{x_n\}$ 是度量空间(X, d) 中的一个Cauchy序列. 如果$x_n \to x$ 在X 中成立, 那么$\{x_n\}$ 的每个子列收敛于x.

反之, 假设存在$\{x_n\}$ 的一个子列$\{x_{k_n}\}$, 使得$x_{k_n} \to x$ 在X 中成立. 设$\varepsilon > 0$, 取n_0 满足: 当$n, m > n_0$ 时, $d(x_{k_n}, x) < \varepsilon$ 且$d(x_n, x_m) < \varepsilon$. 因此, 若$n > n_0$, 则$k_n \geqslant n > n_0$, 从而

$$d(x_n, x) \leqslant d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

这就证得, $\lim x_n = x$ 在X 中成立.

习题6.9 证明闭区间$[0,1]$ 是一个不可数集:

(a) 利用Cantor的定理6.14;

(b) 利用Baire的定理6.17.

解 (a) 由反证法假设$[0,1]$ 是一个可数集, 比如说$[0,1] = \{x_1, x_2, \cdots\}$. 在$[0,1]$ 上赋予通常的距离$d(x, y) = |x - y|$ 使得$[0,1]$ 是一个完备的度量空间.

将$[0,1]$ 分成三个长度相同的闭子区间(如同Cantor集的构造). 从$[0,1]$ 中去掉中间的开子区间并且考虑剩余的两个闭子区间(就是子区间$[0,1/3]$ 和$[2/3,1]$), 然后从中选取一个, 比如说I_1, 使得$x_1 \notin I_1$. 接下来用I_1 代替$[0,1]$ 重复这一过程, 并且选取I_1 的一个闭子区间I_2, 其长度等于I_1 的三分之一, 使得$x_2 \notin I_2$. 依次地, 假设我们已经选取了n 个闭子区间$I_1, \cdots, I_n$ 使得:

(1) $I_n \subseteq I_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq I_2 \subseteq I_1$;

(2) 对于$k = 1, \cdots, n$, $x_k \notin I_k$;

(3) 每个I_k 的长度是$1/3^k$.

同上面一样, 存在I_n 的一个闭子区间I_{n+1}, 其长度等于I_n 的三分之一, 使得$x_{n+1} \notin I_{n+1}$.

因此, 存在$[0,1]$ 的一个闭子区间列$\{I_n\}$ 使得对一切n, $I_{n+1} \subseteq I_n$, $x_n \notin I_n$, 并且$d(I_n) = \frac{1}{3^n}$. 由定理6.14, 我们知道$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ 恰好由一个点构成. 但是, 因为对一切n, $x_n \notin I_n$, 我们看到$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \varnothing$, 矛盾. 因此, $[0,1]$ 一定是不可数的.

(b) 由反证法, 再假设$[0,1] = \{x_1, x_2, \cdots\}$ 并且考虑$[0,1]$ 作为一个完备的度量空间. 若$A_n = \{x_n\}$, 那么每个A_n 都是闭的并且没有内点. 然而, 定理6.17(或者定理6.18)应用于$[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 可推得某个A_n 一定有一个内点, 这是不可能的. 这就证得$[0,1]$ 不可能是可数的.

习题6.10 设$\{r_1, r_2, \cdots\}$ 是区间$[0,1]$ 中所有有理数的一种排列, 并且对一切$x \in [0,1]$ 设$A_x = \{n \in \mathbb{N} : r_n \leqslant x\}$. 由公式

$$f(x) = \sum_{n \in A_x} \frac{1}{2^n}$$

定义函数$f : [0,1] \to \mathbb{R}$. 证明f 限制在$[0,1]$ 内的无理数集上是连续的.

解 固定一个无理数$a \in [0,1]$ 并且设$\varepsilon > 0$. 取自然数k 使得$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ 并且设

$$\delta = \min\{|a - r_1|, |a - r_2|, \cdots, |a - r_k|\} > 0.$$

我们断言若$x \in [0,1]$ 是无理数, 那么$|a - x| < \delta$ 可推得$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (这就告诉我们, 当限制在无理数上时, f 是连续的).

为了说明这一点, 设$x \in [0,1]$ 是满足$|x - a| < \delta$ 的无理数. 用I_x 表示$[0,1]$ 的半开子区间, 它以a 和x 为端点并且是左开右闭的. 如果$B_x = \{n \in \mathbb{N} : r_n \in I_x\}$, 那么注意到$B_x \subseteq \{k, k+1, k+2, \cdots\}$ (为什么?), 从而

$$|f(x) - f(a)| = \sum_{n \in B_x} \frac{1}{2^n} \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

成立. 这正是我们所说的.

习题6.11 本题是关于连通的度量空间的. 一个度量空间(X,d) 被说成是**连通**的只要X 和$\varnothing$ 是X 仅有的既开又闭的子集. 一个度量空间(X,d) 的子集A 被说成是**连通**的只要(A,d) 本身是连通的度量空间. 证明下列关于连通空间和连通集的性质.

(a) 一个度量空间(X,d) 是连通的当且仅当每一个连续函数$f: X \to \{0,1\}$ 是常数, 其中两点集$\{0,1\}$ 是离散的度量空间.

(b) 如果在一个度量空间(X,d) 中我们有$B \subseteq A \subseteq X$, 那么集合$B$ 是(A,d) 的连通子集当且仅当B 是(X,d) 的连通子集.

(c) 如果$f: (X,d) \to (Y,\rho)$ 是连续函数而且A 是X 的连通子集, 那么$f(A)$ 是Y 连通子集.

(d) 如果$\{A_i\}_{i \in I}$ 是一个度量空间的连通集族满足$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$, 那么$\bigcup_{i \in I} A_i$ 也是连通的.

(e) 如果A 是一个度量空间的子集而且$a \in A$, 那么存在A 的最大(关于包含关系)连通子集C_a 包含a. (连通集C_a 被叫做a 关于A 的连通分支.)

(f) 如果a, b 属于一个度量空间的子集A 并且C_a 和C_b 分别是a 和b 在A 中的连通分支, 那么或者$C_a = C_b$ 或者$C_a \cap C_b = \varnothing$. 因此, 恒等式$A = \bigcup_{a \in A} C_a$ 说明A 可以表示成连通集的互不相交的并.

(g) $\mathbb{R}$ 的至少含有两个元素的非空子集是一个连通集当且仅当它是一个区间. 利用这一结论和结论(f)可得$\mathbb{R}$ 的每个开子集都可以表示成至多可数个互不相交的开区间的并.

解 (a) 设(X,d) 是一个连通空间并且设$f: X \to \{0,1\}$ 是连续函数. 那么集合$A = f^{-1}(0)$ 是X 的既开又闭的子集. 因为X 是连通的, 所以, 要么$A = \varnothing$ (这种情形下对一切$x \in X$ 有$f(x) = 1$ 成立), 要么$A = X$ (这种情形下对一切$x \in X$ 有$f(x) = 0$ 成立).

反之, 假设从X 到$\{0,1\}$ 内的每个连续函数都是常数并且设A 是X 的既开又闭的子集. 那么由

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 若x \in A; \\ 0, & 若x \notin A, \end{cases}$$

定义的函数$f: X \to \mathbb{R}$ 是连续的(为什么?). 由我们的假设f 一定是一个常数函数, 而且这可推得要么$A = \varnothing$要么$A = X$, 即, X 是一个连通的度量空间.

(b) 由(a)可立刻得到.

(c) 假设f 和A 具有所述的性质并且考虑连续函数$(A,d) \xrightarrow{f} (f(A),\rho) \xrightarrow{g} \{0,1\}$. 由(a)知道, 连续函数$g\circ f$ 一定是一个常数函数, 并且由此我们知道g 也是一个常数函数. 因此, 由(a)知道$(f(A),\rho)$ 是连通的度量空间.

(d) 假设集族$\{A_i : i\in I\}$ 具有所述的性质. 记$A = \bigcup_{i\in I} A_i$ 并且设$f:(A,d)\to\{0,1\}$ 是连续函数. 那么函数$f:(A_i,d)\to\{0,1\}$ 是连续的, 从而f 限制在每个A_i 上是常数. 因为$\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$, 我们看到$f$ 在A 上是常数, 从而由(a)知集合A 是连通的.

(e) 固定$a\in A$ 且设

$$\mathcal{A} = \{B\subseteq A : B\text{是连通的且}a\in B\}.$$

注意到$\{a\}\in\mathcal{A}$ 并且$\bigcap_{B\in\mathcal{A}}\mathcal{B}\neq\varnothing$. 由(d)知道, 集合$C_a = \bigcup_{B\in\mathcal{A}} B$ 是A 的一个连通子集, 并且具有所需性质.

(f) 如果$C_a\cap C_b\neq\varnothing$, 那么由(d)我们得到$C_a\cup C_b$ 是一个包含a 的连通集. 因此, $C_b\subseteq C_a\cup C_b\subseteq C_a$. 类似地, $C_a\subseteq C_b$, 从而$C_a = C_b$.

(g) 设A 是$\mathbb{R}$ 的连通子集, 并且$a,b\in A$ 满足$a<b$. 如果$a<x<b$ 而且$x\notin A$, 那么集合$A\cap(-\infty,x)$ 是A 的闭真子集(为什么?), 矛盾. 因此, $(a,b)\subseteq A$ 成立, 这就证得A 是一个区间.

反之, 假设I 是$\mathbb{R}$ 的一个区间. 由反证法假设存在一个到上的连续函数$f: I\to\{0,1\}$. 取$a,b\in I$ 使得$f(a)=0$ 而且$f(b)=1$; 我们可以假设$a<b$ (从而$[a,b]\subseteq I$). 现在, 设

$$c_0 = \sup\{c\in[a,b) : f(c)=0\}.$$

由f 的连续性, 我们看到$f(c_0)=0$ 而且$c_0<b$. 那么对所有的$c_0<x<b$, $f(x)=1$ 成立, 从而(再次利用f 的连续性)$f(c_0)=1$ 也一定成立, 这是不可能的. 所以, 从I 到$\{0,1\}$ 内的每个连续函数都是常数, 从而由(a)知道区间I 是连通集.

最后, 注意到如果I 是$\mathbb{R}$ 的一个开子集, 那么由(f)我们知道$I=\bigcup_{a\in I} C_a$, 其中每个C_a 是连通集. 容易得到(怎么得到?)每个C_a 是一个开区间而且它们至多有可数个.

习题6.12 证明具有Euclid距离的$\mathbb{R}^n$ 是连通的度量空间. 用该结论证明, 如果$\mathbb{R}^n$ 的两个开子集的交是真的闭子集, 那么这两个开集一定互不不交.

解 设d 表示$\mathbb{R}^n$ 的Euclid距离, 即, 设

$$d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

对一切$x\in\mathbb{R}^n$, 设L_x 表示连接0 和x 的线段, 即, 设$L_x=\{tx: 0\leqslant t\leqslant 1\}$. 我们断言$L_x$ 是连通集.

为了看出这一点, 注意到由$f(t)=tx$ 定义的函数$f:[0,1]\to L_x$ 满足$|f(t)-f(s)|\leqslant d(x,0)|s-t|$, 从而$f$ 是(一致)连续的. 由习题6.11的(g)和(c), 我们得到L_x 是连通集.

现在, 利用上一题的(d)和恒等式$\mathbb{R}^n=\bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} L_x$ 可得$\mathbb{R}^n$ 本身是一个连通的度量空间.

对于本题的最后一部分, 设U 和V 是$\mathbb{R}^n$ 的两个开子集, 使得$K = U \cap V$ 是闭集. 那么K 既是开的又是闭的(并且因为K 是$\mathbb{R}^n$ 的真子集), 它一定是空集.

习题6.13 设C 是$\mathbb{R}$ 的非空闭子集. 证明函数$f: C \to \mathbb{R}$ 是连续的当且仅当它可以开拓成$\mathbb{R}$ 上的连续实值函数.

解 设C 是$\mathbb{R}$ 的非空闭子集并且设$f: C \to \mathbb{R}$ 是一个函数. 如果f 可以开拓成$\mathbb{R}$ 上的连续实值函数, 那么$f: C \to \mathbb{R}$ 显然是连续的.

反之, 假设$f: C \to \mathbb{R}$ 是连续函数. 注意到C 的余集C^c 是开集从而(由习题6.11的(g))C^c 可以表示成至多可数个互不相交的开区间的并; 比如说$C^c = \bigcup_{i \in I}(a_i, b_i)$, 其中$I$ 是至多可数的. 因为开区间$\{(a_i, b_i) : i \in I\}$ 互不相交, 所以所有的端点a_i 和b_i 都属于C. 因此对一切i, $f(a_i)$ 和$f(b_i)$ 都有定义. 现在, 定义f 在(a_i, b_i) 内的像为连接点$(a_i, f(a_i))$ 和$(b_i, f(b_i))$ 的直线段, 可将f 的定义域开拓. 换句话说, 对一切$a_i < x < b_i$, 我们定义$f(x) = f(a_i) + \frac{f(b_i)-f(a_i)}{b_i - a_i}(x - a_i)$; 在$(a_i, b_i) = (-\infty, b_i)$ 或$(a_i, b_i) = (a_i, \infty)$ 的情形下定义$f(x) = b_i$ 或者$f(x) = a_i$.

我们断言f 的这种到$\mathbb{R}$ 上的开拓是连续的. 显然, f 在C^o 和C^c 的每一点连续(为什么?). 所以, 我们只需证明f 在C 的边界点连续. 设$a \in \partial C$ 并且$\{x_n\} \subseteq C^c$, $x_n \to a$ (如果$\{x_n\} \subseteq C$, 那么$f(x_n) \to f(a)$ 显然正确). 我们还假设a 不是端点a_i 和b_i. 对每一个n 取(唯一)$i_n \in I$ 使得$a_{i_n} \leqslant x_n \leqslant b_{i_n}$. 注意到在这种情形下, 我们一定有$\lim a_{i_n} = \lim b_{i_n} = a$ (为什么?). 由

$$\begin{aligned}|f(x_n) - f(a)| &= \left|\left[f(a) + \frac{f(b_{i_n}) - f(a_{i_n})}{b_{i_n} - a_{i_n}}(x_n - a_{i_n})\right] - f(a)\right| \\ &= \left|\frac{f(b_{i_n}) - f(a_{i_n})}{a_{i_n} - b_{i_n}}(x_n - a_{i_n})\right| \leqslant |f(b_{i_n}) - f(a_{i_n})| \\ &\to |f(a) - f(a)| = 0,\end{aligned}$$

易知$\lim f(x_n) = f(a)$. 如果a 是端点a_i 或b_i, 类似的结论也正确. 这就证得f 在a 点连续, 而且断言正确.

另一证法参见习题10.11.

习题6.14 证明一个度量空间是Baire空间当且仅当每个贫集[1]的余集是稠密的.

解 设X 是一个度量空间. 首先设X 是一个Baire空间而且A 是一个贫集. 取一个无处稠密集序列$\{A_n\}$ 使得$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. 要证$A^c$ 是稠密的, 只要证对每一个非空开集V 有$V \cap A^c \neq \varnothing$. 为此, 设$V$ 是一个非空开集, 并且由反证法假设$V \cap A^c = \varnothing$. 由此可得$V \subseteq A$, 从而

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V \cap A_n.$$

因此, V 是一个非空开的贫集, 矛盾. A^c 是稠密的.

反之, 假设每个贫集的余集是稠密的. 设V 是一个开的贫集. 那么V^c 是稠密的. 所以, 如果V 是非空的, 那么$V \cap V^c \neq \varnothing$, 这是不可能的. 因此, 空集是唯一的开的贫集, X 是一个Baire空间.

1. 贫集又称为第一纲集, 即可以表示成至多可列个无处稠密集(又称为疏朗集)的并. ——译者注

习题6.15 如果度量空间的一个子集的余集是貧集,则称它是一个**余贫集**. 对Baire空间的子集A证明:

(a) A 是余貧集当且仅当它含有一个稠密的G_δ集;

(b) A 是贫集当且仅当它包含在一个F_σ集内, 并且该F_σ集的余集是稠密的.

解 注意到, 如果A 是度量空间X 的无处稠密子集, 那么由引理6.8我们得到

$$\varnothing=(\bar{A})^{\circ}=(\bar{A})^{c-c}=([(\bar{A})^{c}]^{-})^{c}.$$

这就推得, 一个子集A 是无处稠密的当且仅当开集$(\bar{A})^{c}$ 是稠密的.

现在, 假设X 是一个Baire空间并且设A 是X 的子集.

(a) 首先设A 是余贫集. 那么存在一个无处稠密集序列$\{A_n\}$ 使得$A=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^{c}$. 这说明

$$A^{c}=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}. \tag{$\bigstar$}$$

由上面的讨论可得, 每个$(\overline{A_n})^{c}$ 是开的稠密集, 并且由X 是一个Baire空间, 我们知道G_δ集$E=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\overline{A_n}\right)^{c}$ 也是稠密的(参见定理6.16). 现在, 可以看到($\bigstar$)说明$E\subseteq A$.

反之, 假设A 含有一个稠密的G_δ集B, 即, $B\subseteq A$. 所以, 存在一个开集列$\{V_n\}$ 使得$B=\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n$. 由$B\subseteq V_n$, 我们看到每个$V_n$ 也是稠密的. 由此可得

$$[(V_n)^{c}]^{\circ}=[(V_n)^{c}]^{c-c}=(\overline{V_n})^{c}=X^{c}=\varnothing,$$

从而每个$(V_n)^{c}$ 是无处稠密的闭集.由包含关系

$$A^{c}\subseteq B^{c}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(V_n)^{c}$$

可得A^{c} 是一个贫集, 即, A 是余贫集.

(b) 首先假设A 是一个贫集, 即, A^{c} 是余贫集. 由(a)知道, 存在一个稠密的G_δ集E 使得$E\subseteq A^{c}$. 这就推得$A\subseteq E^{c}$, 这里E^{c} 是F_σ集并且它的余集$(E^{c})^{c}=E$ 是稠密的.

反之, 假设存在一个F_σ集F 使得$A\subseteq F$ 成立, 并且F 有稠密的余集. 由此可得, $F^{c}\subseteq A^{c}$, 并且F^{c} 是稠密的G_δ集. 由(a)知道, A^{c} 是余贫集, 这就是说A 是一个贫集.

7. 度量空间中的紧性

习题7.1 设$f:(X,d)\to(Y,\rho)$ 是一个函数. 证明f 连续当且仅当f 限制在X 的紧子集上是连续的.

解 假设f 限制在每个紧子集上是连续的. 设$x_n\to x$. 那么注意到集合$A=\{x_1,x_2,\cdots\}\cup\{x\}$ 是紧的(注意到A 的每个开覆盖都可以简化为一个有限覆盖), 并且$x_n\to x$ 在A 内成立. 因为f 限制在A 上是连续的, $\lim f(x_n)=f(x)$ 成立, 这就证得f 是连续的.

习题7.2 一个度量空间叫做**可分的**如果它含有一个可数子集在该空间中稠密. 证明每个紧空间(X,d) 是可分的.

解 对每个n 取X 的一个有限子集F_n 使得$X=\bigcup_{x\in F_n}B(x,1/n)$ (可参见定理7.8). 设$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, 并且注意到$F$ 至多是可数的.

现在, 设$x\in X$ 并且$r>0$. 取某个n 使得$1/n<r$. 那么存在某个$y\in F_n$ 使得$d(x,y)<1/n<r$. 因此, $B(x,r)\cap F\neq\varnothing$, 从而$F$ 在X 中稠密.

习题7.3 若(X,d) 是可分的度量空间(参见上一题的定义), 证明X 的势$\leqslant\mathfrak{c}$[1].

解 设$\{x_1,x_2,\cdots\}$ 是X 的一个可数稠密子集. 考虑开球的集合$\{B(x_i,1/j):i,j=1,2,\cdots\}$. 显然, 该集合是可数的; 设$\{B_1,B_2,\cdots\}$ 是它的一个排列. 现在, 对每个$x\in X$ 定义集合$S_x=\{n\in\mathbb{N}:x\in B_n\}$. 这就建立了一个从$X$ 到$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 内的映射$x\to S_x$, 该映射显然是一对一的. 因此, X 的势$\leqslant\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 的势$=\mathfrak{c}$. (也可参见习题5.6.)

习题7.4 设$(X_1,d_1),(X_2,d_2),\cdots,(X_n,d_n)$ 是任意的度量空间, 并且$X=X_1\times\cdots\times X_n$. 若$x=(x_1,\cdots,x_n)$ 而且$y=(y_1,\cdots,y_n)$, 则定义

$$D_1(x,y)=\sum_{m=1}^{n}d_m(x_m,y_m)\quad 和\quad D_2(x,y)=\left(\sum_{m=1}^{n}[d_m(x_m,y_m)]^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(a) 证明D_1 和D_2 是X 中的距离.

(b) 证明D_1 和D_2 是等价的.

(c) 证明(X,D_1) 是完备的当且仅当每个(X_i,d_i) 是完备的.

(d) 证明(X,D_1) 是紧的当且仅当每个(X_i,d_i) 是紧的.

解 (a) 其证明是常规的.

(b) 利用不等式

$$\frac{1}{n}D_1(x,y)\leqslant D_2(x,y)\leqslant nD_1(x,y).$$

(c) 假设每个$X_m(m=1,\cdots,n)$ 是完备的度量空间. 设$\{x_k\}$ 是X 的D_1-Cauchy序列, 其中$x_k=(x_1^k,\cdots,x_n^k)$. 显然, 每个$\{x_m^k\}$ 是X_m 的一个Cauchy序列, 因此存在$x_m\in X_m$ 使得$\lim_{k\to\infty}d_m(x_m^k,x_m)=0$. 所以, 若$x=(x_1,\cdots,x_n)\in X$, 我们有$\lim_{k\to\infty}D_1(x_k,x)=0$, 从而度量空间$X$ 是D_1 -完备的.

现在, 设X 是D_1 -完备的. 固定$(y_1,\cdots,y_n)\in X$. 设$\{x_m^k\}$ 是X_m 的一个Cauchy序列. 如果$x_k\in X$ 是这样一个元素, 当$j\neq m$ 时其第j 个分量等于y_j, 当$j=m$ 时其第j 个分量等于x_m^k, 那么$\{x_k\}$ 是X 的一个Cauchy序列. 如果$x\in X$ 是它的极限, 那么容易看到$\lim_{k\to\infty}d_m(x_m^k,x_m)=0$, 从而每个$X_m$ 是完备的.

(d) 首先假设每个X_m 是紧的. 那么由定理7.4第二部分的证明, 我们可以看到X 的每个序列都有一个收敛子列, 从而X 一定是一个紧度量空间.

1. $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$为连续统的势. ——译者注

另一方面, 如果X 是一个紧度量空间, 那么对一切$1 \leqslant m \leqslant n$, 由$f_m(x_1, \cdots, x_n) = x_m$ 定义的函数$f_m : X \to X_m$ 是连续的而且是到上的. 因此由定理7.5可知, 每个$X_m = f_m(X)$ 是紧的.

习题7.5 设$\{(X_n, d_n)\}$ 是一个度量空间序列, 并且设$X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$[1]. 对$X$ 中的每个$x = \{x_n\}$ 和$y = \{y_n\}$, 定义

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

(a) 证明d 是X 上的距离.

(b) 证明(X, d) 是完备的度量空间当且仅当每个(X_n, d_n) 是完备的.

(c) 证明(X, d) 是紧度量空间当且仅当每个(X_n, d_n) 是紧的.

解 (a) 首先注意到, 如果d 是一个集合X 上的距离, 那么$\rho(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ 也是X 上的距离, 并且它与d 是等价的. 由此容易得到

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

是$X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$上的一个距离.

(b) 设$\{x^k\}$ 是X 的一个序列, 其中$x^k = (x_1^k, x_2^k, \cdots)$. 所要证的可以由下面两个性质得到(其证明是直接的).

(1) $x^k \to x$ 在X 中成立当且仅当对每个i, $x_i^k \to x_i$ 在X_i 中成立;

(2) $\{x^k\}$ 是X 中的一个Cauchy序列当且仅当对一切i, $\{x_i^k\}$ 是X_i 中的一个Cauchy序列.

(c) 假设(X, d) 是紧度量空间. 那么对一切$x = (x_1, x_2, \cdots) \in X$ 由$f_i(x) = x_i$ 定义的函数$f_i : X \to X_i$ 是连续的而且是到上的. 由定理7.5知道每个X_i 是紧度量空间.

反之, 假设每个X_i 是紧度量空间. 由(b)知道X 是紧度量空间, 从而由定理7.8知, 只需证明X 是完全有界的. 为此, 设$\varepsilon > 0$. 取n 使得$2^{-n} < \varepsilon$, 并且注意到

$$\rho_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}$$

定义了$\prod_{i=1}^{n} X_i$ 上的一个距离. 显然ρ_n 等价于上一题中的距离, 而且$\left(\prod_{i=1}^{n} X_i, \rho_n\right)$ 是紧度量空间. 取$\prod_{i=1}^{n} X_i$ 的一个有限子集F, 使得以F中的点为中心, ε 为半径的ρ_n-球覆盖$\prod_{i=1}^{n} X_i$. 其次, 将每个$x \in F$ 扩充成X 的一个元素(即, 对每个$x \in F$ 增加任意分量$x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots$). 若$y = (y_1, y_2, \cdots) \in X$, 那么取某个$x \in F$ 使得$\rho_n(x, y) < \varepsilon$, 并且注意到

$$d(x, y) = \rho_n(x, y) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)} < \varepsilon + 2^{-n} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

因此, $X = \bigcup_{x \in F} B(x, 2\varepsilon)$ 成立, X 是完全有界的.

---

1. 这里$\prod_{n=1}^{\infty} X_n = X_1 \times X_2 \times \cdots$. ——译者注

习题7.6　一个集族$\mathcal{F}$称为具有**有限交性质**, 如果$\mathcal{F}$中任何有限个集合的交是非空的. 证明一个度量空间是紧的当且仅当它的任何具有有限交性质的闭集族具有一个非空的交集.

解　设X 是紧的, 并且$\{A_i : i \in I\}$ 是具有有限交性质的闭集族. 若$\bigcap_{i\in I} A_i = \varnothing$, 那么$X = \bigcup_{i\in I} A_i^c$ 成立, 并且由X 的紧性, 存在$i_1, i_2, \cdots, i_n \in I$ 使得$X = \bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j}^c$ 成立. 因此, $\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j} = \varnothing$, 此与我们的条件矛盾. 所以, $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.

反之, 假设它的任何具有有限交性质的闭集族具有一个非空的交集. 设$X = \bigcup_{i\in I} V_i$ 是一个开覆盖. 那么$\bigcap_{i\in I} V_i^c = \varnothing$, 并且因为$\{V_i^c : i \in I\}$ 是一个闭集族, 我们的条件保证存在有限个指标$i_1, \cdots, i_n$ 使得$\bigcap_{j=1}^{n} V_{i_j}^c = \varnothing$. 因此, $X = \bigcup_{j=1}^{n} V_{i_j}$ 成立, 从而X 是紧度量空间.

习题7.7　设$f : X \to X$ 是一个函数. 点$a \in X$ 称为f 的一个**不动点**若$f(a) = a$.

假设(X, d) 是紧度量空间, 并且当$x \neq y$ 时, $f : X \to X$ 满足不等式$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. 证明f 有唯一的不动点.

解　首先注意到f 至多有一个不动点. 事实上, 如果$x \neq y$ 时有$f(x) = x$ 和$f(y) = y$ 成立, 那么

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

一定成立, 这是不合理的.

现在, 由$g(x) = d(x, f(x))$ 定义函数$g : X \to \mathbb{R}$. 由不等式

$$|g(x) - g(y)| \leqslant d(f(x), f(y)) + d(x, y) \leqslant 2d(x, y)$$

(参见定理6.19前面的讨论[1]), 可得g 是连续的. 因为X 是紧的, 所以g 在某点$a \in X$ 处取得它的最小值. 如果$f(a) \neq a$, 那么不等式

$$g(f(a)) = d(f(a), f(f(a))) < d(a, f(a)) = g(a)$$

说明g 在a 点不取最小值. 因此, $f(a) = a$ 一定成立, 从而a 是f 的(唯一)不动点.

习题7.8　设(X, d) 是一个度量空间. 函数$f : X \to X$ 称为**压缩映射**如果存在某个$0 < \alpha < 1$ 使得对所有的$x, y \in X$, $d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$ 成立; α 称为**压缩常数**.

证明紧度量空间(X,d) 上的每个压缩f 有唯一的不动点; 即, 存在唯一的$x \in X$ 使得$f(x) = x$.

解　首先注意到如果$f(x) = x$ 和$f(y) = y$ 成立, 那么容易由不等式$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$ 得到$d(x, y) = 0$, 从而$x = y$. 即, f 至多有一个不动点.

为了看出f 有一个不动点, 取某个$a \in X$, 然后由$x_1 = a$, 而且, 对$n = 1, 2, \cdots, x_{n+1} = f(x_n)$, 归纳地定义序列$\{x_n\}$. 由条件可得, 对$n = 2, 3, \cdots$,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leqslant \alpha d(x_n, x_{n-1})$$

1. 这里是指不等式$|d(x_1,\ y_1) - d(x_2,\ y_2)| \leqslant d(x_1, x_2) + d(y_1,\ y_2)$. ——译者注

成立. 因此, 如同习题4.15的证明, 我们可以证得$\{x_n\}$ 是Cauchy序列. 由于X 是完备的, 所以$\{x_n\}$ 是收敛序列. 设$x = \lim x_n$. 观察到f 是(一致)连续的, 我们得到

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x),$$

从而x 是f 的一个(唯一)不动点.

习题7.9 度量空间中的一个性质被称为是**拓扑性质**,如果该性质在与它同胚的度量空间[1]中被保持.

(a) 证明紧性是拓扑性质.

(b) 证明完备性、有界性和完全有界性不是拓扑性质.

解 (a) 由定理7.5可得.

(b) 考虑在通常的Euclid距离$d(x,y) = |x-y|$ 下的度量空间$(0,1]$ 和$[1,\infty)$. 显然, $(0,1]$ 不是完备的但它是有界的和完全有界的. 另外, $[1,\infty)$ 是完备的(因为它是$\mathbb{R}$ 的闭子集), 但它既不是有界的也不是完全有界的. 另一方面, 由$f(x) = \frac{1}{x}$ 定义的函数$f:(0,1] \to [1,\infty)$ 是一个同胚, 由此可得(b)中的结论.

习题7.10 设(X,d) 是一个度量空间. 由

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) : x \in A \quad 而且 \quad y \in B\}$$

定义X 的两个非空子集A 和B 之间的距离.

(a) 举例说明存在某个度量空间的两个闭子集A 和B 使得$A \cap B = \varnothing$ 并且$d(A,B) = 0$.

(b) 如果$A \cap B = \varnothing$, A 是闭的, B 是紧的(当然它们都是非空的), 证明$d(A,B) > 0$.

解 (a) 设$X = \mathbb{R}^2$ 具有Euclid距离, 考虑X 的两个闭子集

$$A = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) : x \geqslant 1\right\} \quad 和 \quad B = \{(x,0) : x \geqslant 1\}.$$

注意到$A \cap B = \varnothing$, 而且$d(A,B) = 0$.

(b) 设A和B如题所述. 如果$d(A,B) = 0$, 那么取两个序列$\{x_n\} \in A$ 和$\{y_n\} \in B$ 使得$d(x_n,y_n) \to 0$. 因为B 是紧的, 那么通过一个子列(如果必要), 我们可以假设对某个$y \in B$, $y_n \to y$ 成立. 不等式

$$d(x_n,y) \leqslant d(x_n,y_n) + d(y_n,y)$$

说明$d(x_n,y) \to 0$. 因为A 是闭的, 所以$y \in A$, 从而$A \cap B \neq \varnothing$, 与条件矛盾. 因此, $d(A,B) > 0$ 一定成立.

习题7.11 设(X,d) 是紧度量空间并且$f : X \to X$ 是一个等距; 即, 对一切$x, y \in X$, $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$ 成立. 证明f 是到上的. 如果X 不是紧的结论是否仍然正确?

1. 度量空间(X, d) 和(Y,ρ) 称为是同胚的, 如果存在一对一的而且到上的函数$f: (X,d) \to (Y,\rho)$ 使得f 和f^{-1} 都是连续的. ——译者注

解 设$y \in X$. 由$x_1 = f(y)$, 而且, 对$n = 1, 2, \cdots$,

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

定义$f(X)$ 的序列$\{x_n\}$. 注意到, 对所有的n 和p, $d(x_n, x_{n+p}) = d(y, x_p)$ 成立. 因为$f(X)$ 是紧的, 所以序列$\{x_n\}$ 在$f(X)$ 内一定有极限点. 设a 是$\{x_n\}$ 的一个极限点.

现在, 设$\varepsilon > 0$. 取$n > 1$ 和p 使得$d(x_n, a) < \varepsilon$ 而且$d(x_{n+p}, a) < \varepsilon$. 那么对一切$\varepsilon > 0$

$$d(y, f(X)) \leqslant d(y, x_p) = d(x_n, x_{n+p}) \leqslant d(x_n, a) + d(x_{n+p}, a) < 2\varepsilon$$

成立, 从而$d(y, f(X)) = 0$. 因此, $y \in \overline{f(X)} = f(X)$, 所以$f(X) = X$ 成立.

如果X 不是紧的, 那么结论不再正确. 有反例: 取$X = \mathbb{N}$ 具有距离$d(n, m) = |n - m|$ 并且由$f(n) = n + 1$ 定义函数$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

习题7.12 *证明度量空间X 是紧的当且仅当X 上的每个实值连续函数都能取到它的最大值.*

解 设(X, d) 是度量空间. 假设X 是紧的并且$f : X \to \mathbb{R}$ 是连续函数. 由定理7.5, 我们知道$f(X)$ 是$\mathbb{R}$ 的紧子集, 从而(由定理7.4)$f(X)$ 是闭的而且是有界的. $f(X)$ 的最大值就是f 在X 上的最大值.

反之, 假设X 上的每个实值连续函数都能取到它的最大值. 显然, X 上的每个实值连续函数也能取到它的最小值.

我们首先证明X 是完备的度量空间. 设$(\hat{X}, \hat{d})$ 表示(X, d) 的完备化并且设$\hat{x} \in \hat{X}$. 由$f(x) = \hat{d}(\hat{x}, x)$ 定义的函数$f : X \to \mathbb{R}$ 满足$\inf\{f(x) : x \in X\} = 0$. 所以, 存在某个$x_0 \in X$ 满足$f(x_0) = \hat{d}(\hat{x}, x_0) = 0$. 由此可得$\hat{x} = x_0$ 而且$\hat{X} = X$. 这意味着X 是一个完备的度量空间.

其次, 我们将证明X 是完全有界的. 为此, 由反证法假设X 不是完全有界的. 那么由归纳法容易证明存在某个$\varepsilon > 0$ 和X 的一个序列$\{x_n\}$ 使得当$n \neq m$ 时$d(x_n, x_m) \geqslant 3\varepsilon$ 成立. 对一切n 考虑非空闭集

$$C_n = [B(x_n, \varepsilon)]^c = \{x \in X : d(x, x_n) \geqslant \varepsilon\},$$

然后由

$$f_n(x) = d(x, C_n) = \inf\{d(x, y) : y \in C_n\}.$$

定义函数$f_n : X \to \mathbb{R}$. 所以, f_n 是有界函数, 对一切$x \in C_n$, $f_n(x) = 0$ 成立, 而且$f_n(x_n) > 0$. 通过乘以一个常数c_n, 我们可以假设对一切n, $\sup\{f_n(x) : x \in X\} > n$ 成立. 现在, 由

$$f(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{当}x \in B(x_n, \varepsilon) \\ 0, & \text{当}x \notin \cup_{n=1}^{\infty} B(x_n, \varepsilon), \end{cases}$$

定义函数$f : X \to \mathbb{R}$ 并且我们断言f 是连续函数. 显然, f 在球$B(x_n, \varepsilon)$ 的点上是连续的. 若$x_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, \varepsilon)$, 注意到至多存在一个$n$ 使得$B(x_0, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(x_n, \varepsilon) \neq \varnothing$ 成立(为什么?). 如果对一切n, $B(x_0, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(x_n, \varepsilon) = \varnothing$, 那么对$B(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$ 内的所有x 有$f(x) = 0$, 从而f 在x_0 点连续. 因此, 我们可以假设对某个n, $B(x_0, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(x_n, \varepsilon) \neq \varnothing$. 我们分两种情形.

情形 I : $d(x_0, x_n) > \varepsilon$.

在这种情形下, 存在某个$0 < r < \varepsilon/2$ 使得$B(x_0, r) \cap B(x_n, \varepsilon) = \varnothing$. 显然, 对一切$x \in B(x_0, r)$ 有$f(x) = 0$, 由此我们可以看到f 在x_0 点连续.

情形 II: $d(x_0, x_n) = \varepsilon$.

设$\{z_k\}$ 是X 的序列, 满足$z_k \to x_0$; 我们可以假设对一切k, z_k 属于$B(x_0, \varepsilon/2)$.注意到如果$z_k \notin B(x_n, \varepsilon)$, 那么$f(z_k) = 0$.另一方面, 如果$z_k \in B(x_n, \varepsilon)$, 那么

$$0 \leqslant f(z_k) = c_n d(z_k, C_n) \leqslant c_n d(z_k, x_0).$$

因此, 对一切k, $0 \leqslant f(z_k) \leqslant c_n d(z_k, x_0)$ 成立.由于

$$\lim_{k \to \infty} d(z_k, x_0) = 0,$$

我们看到$\lim f(z_k) = 0 = f(x_0)$, 从而在这种情形下f 在x_0 点也连续.

为了与我们的假设相矛盾, 注意到f 取不到最大值. 因此, X 一定是完全有界的. 由定理7.8, 我们看到X 是紧度量空间.

习题7.13 本题给出了定理7.7的逆. 假设(X, d) 是一个度量空间, X 上每个实值连续函数都一致连续.

(a) 证明X 是完备的度量空间;

(b) 举例说明存在非紧的度量空间具有上面的性质;

(c) 如果X 有有限个孤立点(一个元素$a \in X$ 称为**孤立点**只要存在某个正数$r > 0$ 使得$B(a, r) \cap (X \backslash \{a\}) = \varnothing$), 证明X 是紧度量空间.

解 设(X, d) 是度量空间, X 上每个实值连续函数都一致连续.

(a) 若$\hat{x} \in \hat{X}$ (X 的完备化)是一个不属于X 的元素, 那么由$f(x) = \frac{1}{d(\hat{x}, x)}, x \in X$, 定义的函数$f : X \to \mathbb{R}$ 是X 上的实值连续函数但不是一致连续的(为什么?), 矛盾. 因此, $\hat{X} = X$, 这意味着X 是一个完备的度量空间.

(b) 设$X = \{1, 2, \cdots\}$ 赋予了离散距离d. 那么它的每个集合都是开的, 从而X 上的每个实值函数都是连续的. 因为$d(x, y) < 1$ 含有$x = y$ (从而$f(x) - f(y) = 0$), 我们看到X 上的每个实值函数都是一致连续的. 然而, 注意到X 不是紧度量空间.

(c) 由(a), 我们只要证明X 是完全有界的. 为此, 假设X 不是完全有界的. 那么存在某个$\varepsilon > 0$ 以及X 中的序列$\{x_n\}$ 使得当$n \neq m$ 时$d(x_n, x_m) > 3\varepsilon$. 由条件, 我们可以假设每个$x_n$ 都是X 的聚点. 对每个n 取一个元素y_n 使得$0 < d(x_n, x_m) < \varepsilon/n$ 并且设$r_n = d(x_n, x_m)$.记

$$C_n = \{x \in X : d(x, x_n) \geqslant r_n\},$$

并且如同习题7.12的解答定义函数f_n 和f (其中开球$B(x_n, \varepsilon)$ 换成$B(x_n, r_n)$). 那么函数f 是连续的并且对一切n 满足$f(y_n) = 0$. 取$z_n \in B(x_n, r_n)$ 使得$f(z_n) > n$ [1] , 并且注意到

$$|f(y_n) - f(z_n)| > n \quad 和 \quad \lim_{n \to \infty} d(y_n, z_n) = 0.$$

1. 原书中将$f(z_n) > n$错印成$f(x_n) > n$. ——译者注

这就证得连续函数f 不是一致连续的, 与条件矛盾. 因此, X 是完全有界的, 这就是所要证的.

习题7.14 考虑两个度量空间之间的函数$f:(X,d)\to(Y,\rho)$. f 的图像 G 是 $X\times Y$ 的子集定义为

$$G=\{(x,y)\in X\times Y: y=f(x)\}.$$

如果(Y,ρ) 是紧度量空间, 证明f 连续当且仅当G 是$X\times Y$ 的闭子集, 其中把$X\times Y$ 当作是在距离$D((x,y),(u,v))=d(x,u)+\rho(y,v)$ 下的度量空间(参见习题7.4). 如果(Y,ρ) 不是紧的结果是否正确?

解 观察到$X\times Y$ 中的任何序列$\{(x_n,y_n)\}$ 在$X\times Y$ 中满足$(x_n,y_n)\to(x,y)$ 当且仅当$x_n\to x$ 和$y_n\to y$ 都成立.

假设(Y,ρ) 是紧的并且G 是闭的. 如果f 不连续, 那么存在X 的序列$\{x_n\}$ 和某个$\varepsilon>0$, 使得$x_n\to x$, 并且对所有的n, $\rho(f(x_n),f(x))\geqslant\varepsilon$ (为什么?). 因为(Y,ρ) 是紧的, 通过一个子列, 我们可以假设$f(y_n)\to y$ 在Y 中成立. 于是, 观察到对一切n, $(x_n,f(x_n))\in G$ 成立, 而且$(x_n,f(x_n))\to(x,y)$ 在$X\times Y$ 中成立. 因为G 是闭的, 因此$(x,y)\in G$ 从而$y=f(x)$. 这就推得

$$\rho(f(x_n),f(x))\to\rho(f(x),f(x))=0,$$

此与对所有的n, $\rho(f(x_n),f(x))\geqslant\varepsilon$ 矛盾.

如果(Y,ρ) 不是紧的, 那么具有闭图像的函数未必是连续的. 例如, 考虑由

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

定义的函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

习题7.15 称集合X 的一个覆盖$\{V_i\}_{i\in I}$ 为一个点态有限覆盖, 如果每个$x\in X$ 属于至多有限个V_i.

证明度量空间是紧的, 当且仅当该空间的每个点态有限开覆盖都包含一个有限子覆盖.

解 显然, 如果X 是紧的, 那么X 的每个点态有限开覆盖都包含一个有限子覆盖. 反之, 假设X 的每个点态有限开覆盖都包含一个有限子覆盖. 为了证明度量空间X 是紧的, 只要证明X 中的每个序列都含有一个收敛子列.

设$\{x_n\}$ 是 X 中一个序列. 我们可以假设该序列由不同元素构成(为什么?). 由反证法假设$\{x_n\}$ 没有收敛子列. 那么x_1 不在集合$\{x_n:n\neq 1\}$ 的闭包内, 因此存在x_1 的以$0<\delta_1<1$ 为半径的开球$V_1=B(x_1,\delta_1)$ 使得对所有的$n\neq 1$, $x_n\notin V_1$. x_2 也不在集合$\{x_n:n\neq 2\}$ 的闭包内, 因此存在x_2 的以$0<\delta_2<1/2$ 为半径的开球$V_2=B(x_2,\delta_2)$ 使得对所有的$n\neq 2$, $x_n\notin V_2$. 依次进行下去, 我们看到对每个k 存在以$0<\delta_k<1/2^k$ 为半径的开球$V_k=B(x_k,\delta_k)$ 使得对所有的$n\neq k$, $x_n\notin V_k$.

因为集合$F=\{x_1,x_2,\cdots\}$ 不含收敛子列, 因此集合F 一定包含它的所有闭包点[1]. 所以, F 是闭集, 因而$G=X\backslash F$ 是一个开集. 那么, 集合$\mathcal{C}=\{G,V_1,V_2\cdots\}$ 是 X 的一个开覆盖. 事实

1. $x\in X$称为集合$A\subseteq X$的一个闭包点, 如果 x 的每个开球都至少含有 A 的一个点. ——译者注

上, 集合$\mathcal{C}$是 X 的一个点态有限开覆盖, 因为如果一个点x 属于集$\mathcal{C}$中的无穷多个集合, 那么x 属于无穷多个V_n 中. 然而, 这可推得$\{x_n\}$ 的一个子列收敛到点x. 因为序列$\{x_n\}$ 不含收敛子列, 所以我们得到$\mathcal{C}$是一个点态有限开覆盖.

因此, $\mathcal{C}$含有X 的一个有限子覆盖, 比如说, $V_1, V_2, \cdots, V_m, G$. 因为G 与$\{x_1, x_2, \cdots\}$ 不相交, 所以$\{x_1, x_2, \cdots\} \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_i$. 然而, 这与$n \neq k$ 时$x_n \notin V_k$ 矛盾. 这就得到结论: $\{x_n\}$ 一定含有一个收敛子列. 因此, 度量空间X 是紧的.

第2章 拓扑和连续

8. 拓扑空间

习题8.1 对一个拓扑空间的任何子集A 证明下列结论:

(a) $A^\circ = (\overline{A^c})^c$;

(b) $\partial A = \bar{A} \backslash A^\circ$;

(c) $(A \backslash A^\circ)^\circ = \varnothing$.

解 (a) 注意到

$x \in A^\circ \Leftrightarrow$ 存在x 的一个邻域V 使得$V \subseteq A$

$\Leftrightarrow$ 存在x 的一个邻域V 使得$V \cap A^c = \varnothing$

$\Leftrightarrow x \notin \overline{A^c} \Leftrightarrow x \in \left(\overline{A^c}\right)^c$.

(b) 利用(a), 我们看到$\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \backslash \left(\overline{A^c}\right)^c = \overline{A} \backslash A^\circ$.

(c) 如果$x \in (A \backslash A^\circ)^\circ$, 那么对某个开集$V$ 我们有

$$x \in V \subseteq A \backslash A^\circ \subseteq A.$$

这就推得$x \in A \backslash A^\circ$ 而且$x \in A^\circ$, 矛盾. 因此, $(A \backslash A^\circ)^\circ = \varnothing$.

习题8.2 如果A 和B 是一个拓扑空间的两个任意子集, 证明下列结论:

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(b) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

解 (a) 参见习题6.1.

(b) 显然, $A \subseteq B$ 蕴含着$A' \subseteq B'$, 从而$A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$. 对于相反的包含关系, 设$x \in (A \cup B)'$. 如果$x \notin A' \cup B'$, 那么存在x 的两个邻域V 和W 使得

$$A \cap (V \backslash \{x\}) = B \cap (W \backslash \{x\}) = \varnothing.$$

于是, 注意到点x 的邻域$U = V \cap W$ 满足

$$(A \cup B) \cap (U \backslash \{x\}) = \varnothing,$$

这就证得$x \notin (A \cup B)'$, 矛盾.

习题8.3 如果A 是一个Hausdorff拓扑空间[1] 的任意子集, 证明它的导集A' 是闭集.

---

1. 一个拓扑空间$(X,\ \tau)$被称为是Hausdorff拓扑空间, 如果对任何$x,\ y \in X,\ x \neq y$, 分别存在x的邻域U和y的邻域V使得$U \cap V = \varnothing$. ——译者注

解 设A是Hausdorff拓扑空间X的任意子集. 我们将证明$(A')^c$是一个开集(这就保证了A'是一个闭集). 为此, 设$x \in (A')^c$, 即, $x \notin A'$. 这意味着存在x的一个邻域V使得

$$V \cap (A \backslash \{x\}) = \varnothing. \qquad (\bigstar)$$

我们断言$V \subseteq (A')^c$成立. 为了说明这一点, 设$y \in V$使得$y \neq x$. 因为X是Hausdorff拓扑空间, 所以分别存在y的邻域U和x的邻域W使得$U \cap W = \varnothing$. 于是, 注意到$V \cap U$是y的一个邻域, 且满足$x \notin V \cap U$, 从而由($\bigstar$)我们看到$(V \cap U) \cap A = \varnothing$. 后者说明$y \notin A'$. 因此, $V \subseteq (A')^c$成立, 说明$(A')^c$的每个点是内点, 这就是所要证的.

习题8.4 设$X = \mathbb{R}$, 并且设τ是例题8.4中定义的X上的拓扑, 即, $A \in \tau$当且仅当对每个$x \in A$存在$\varepsilon > 0$和一个至多可数的集B (它们都依赖于x)使得$(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\backslash B \subseteq A$.

(a) 证明τ是X上的拓扑.

(b) 证明$0 \in \overline{(0,1)}$.

(c) 证明不存在(0,1)的序列$\{x_n\}$使得$\lim x_n = 0$.

解 (a) 直接得证.

(b) 因为对每个$\varepsilon > 0$和可数集B, 集合$(-\varepsilon,\varepsilon)\backslash B$是不可数的, 我们一定有$((-\varepsilon,\varepsilon)\backslash B) \cap (0,1) \neq \varnothing$. 由此容易得到$0 \in \overline{(0,1)}$.

(c) 如果$\{x_n\}$是(0,1)的一个序列, 那么$V = (-1,1)\backslash\{x_1, x_2, \cdots\}$是零的一个邻域, 并且对所有的$n$, $x_n \notin V$. 这就证得不存在(0,1)的序列收敛于0.

习题8.5 如果A是一个拓扑空间的稠密子集, 证明对每个开集$\mathcal{O}$, $\mathcal{O} \subseteq \overline{A \cap \mathcal{O}}$成立. 该结论的一般化如下: 如果$A$是开的, 那么对每个集合$B$有$A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

解 设$x \in \mathcal{O}$并且V是x的邻域. 因为$\mathcal{O}$是开的, 所以$V \cap \mathcal{O}$是x的邻域, 从而A的稠密性推得

$$V \cap (A \cap \mathcal{O}) = (V \cap \mathcal{O}) \cap A \neq \varnothing,$$

这意味着$x \in \overline{A \cap \mathcal{O}}$.

对于一般的情形, 假设A是开集并且$x \in A \cap \overline{B}$. 如果$V$是$x$的邻域, 那么$V \cap A$也是$x$的邻域. 因为$x \in \overline{B}$, 因此$V \cap (A \cap B) = (V \cap A) \cap B \neq \varnothing$. 这就证得$x \in \overline{A \cap B}$, 因而$A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

习题8.6 如果$\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$是一个拓扑空间$X$的开覆盖, 证明$X$的子集$A$是闭的当且仅当对一切$i \in I$, $A \cap \mathcal{O}_i$在$\mathcal{O}_i$内是闭的(其中$\mathcal{O}_i$被认为是赋予了限制拓扑).

解 如果A是闭的, 那么显然对一切$i \in I$, $A \cap \mathcal{O}_i$在$\mathcal{O}_i$内是闭的. 反之, 假设对一切$i \in I$, $A \cap \mathcal{O}_i$在$\mathcal{O}_i$内是闭的. 记

$$V_i = \mathcal{O}_i \backslash A \cap \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_i \backslash A,$$

并且注意到, 我们假设每个V_i在$\mathcal{O}_i$内是开的. 因为每个$\mathcal{O}_i$是X的开子集, 因此每个V_i也是X的开子集. 于是注意到

$$A^c = X \backslash A = \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i\right) \backslash A = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \backslash A) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

是X 的开子集, 从而A 是闭的.

习题8.7 如果(X,τ) 是一个Hausdorff拓扑空间, 证明以下结论:

(a) X 的每个有限子集是闭的;

(b) X 的每个序列至多收敛于一个点.

解 (a) 设$A=\{x\}$ 是一个点的集合. 如果$y\notin A$, 那么(因为X 是一个Hausdorff空间)存在y 的一个邻域V 使得$x\notin V$, 从而$V\subseteq A^c$. 因此, A^c 是开的, A 是闭的. 于是, 观察到每个有限集是单点集的有限并.

(b) 如果$x\neq y$, 那么分别存在x 和y 的邻域V_x 和V_y 使得$V_x\cap V_y=\varnothing$. 于是, X 的一个序列不能同时收敛于x 和y, 这是因为它的项最终不能既在V_x 内又在V_y 内.

习题8.8 对函数$f:(X,\tau)\to(Y,\tau_1)$ 证明以下结论:

(a) 如果τ 是离散拓扑, 那么f 是连续的;

(b) 如果τ 是密着拓扑[1] 并且τ_1 是Hausdorff拓扑, 那么f 是连续的当且仅当f 是一个常函数.

解 (a) 注意到X 每个子集是开的. 因此, 对Y 的每个子集A, $f^{-1}(A)$ 是开集, 从而f 是连续的.

(b) 回忆密着拓扑为$\tau=\{\varnothing,X\}$. 若f 是一个常函数, 那么$f^{-1}(A)$ 要么是$\varnothing$ 要么是X, 从而f 是连续的. 反之, 设f 是一个连续函数. 如果对$x,y\in X$ 我们有$f(x)\neq f(y)$, 那么存在$f(x)$ 的一个邻域V 使得$f(y)\notin V$. 于是注意到$f^{-1}(V)$ 既不等于$\varnothing$ 又不等于X, 从而$f^{-1}(V)$ 不是开的, 矛盾. 因此f 一定是一个常函数.

习题8.9 设f 和g 是从(X,τ) 到Hausdorff拓扑空间(Y,τ_1) 内的两个连续函数. 假设存在X 的一个稠密子集A 使得对所有的$x\in A, f(x)=g(x)$. 证明对一切$x\in X, f(x)=g(x)$ 成立.

解 假设对某个$x\in X$ 我们有$f(x)\neq g(x)$. 取$f(x)$ 的一个邻域V 和$g(x)$ 的一个邻域W 使得$V\cap W=\varnothing$. 因为$f^{-1}(V)\cap g^{-1}(W)$ 是x 的一个邻域并且A 在X 中稠密, 所以存在某个$y\in f^{-1}(V)\cap g^{-1}(W)\cap A$. 于是, 注意到$f(y)=g(y)\in V\cap W=\varnothing$ 一定成立, 这是荒谬的. 因此, 对一切$x\in X$, $f(x)=g(x)$ 成立.

习题8.10 设$f:(X,\tau)\to(Y,\tau_1)$ 是一个函数. 证明f 是连续的当且仅当对Y 的每个子集B, $f^{-1}(B^\circ)\subseteq[f^{-1}(B)]^\circ$ 成立.

解 重复习题6.4的解答.

习题8.11 如果$f:(X,\tau)\to(Y,\tau_1)$ 和$g:(Y,\tau_1)\to(Z,\tau_2)$ 是连续函数, 证明它们的复合$g\circ f:(X,\tau)\to(Z,\tau_2)$ 也是连续的.

解 利用恒等式$(g\circ f)^{-1}(V)=f^{-1}(g^{-1}(V))$. (参见习题1.8.)

---

1. 非空集合X上的拓扑$\tau=\{\varnothing,\ X\}$称为密着拓扑. ——译者注

习题8.12 设X 是一个拓扑空间, $a \in X$, $\mathcal{N}_a$ 表示a 点所有邻域构成的集合. 函数$f: X \to \mathbb{R}$ 在a 点的**振幅**是广义的非负实数

$$\omega_f(a) = \inf_{V \in \mathcal{N}_a} \{ \sup_{x,y \in V} |f(x) - f(y)| \}.$$

证明下列关于振幅的性质:

(a) 函数f 在a 点连续当且仅当$\omega_f(a) = 0$;

(b) 如果X 是$\mathbb{R}$ 的一个开区间并且$f: X \to \mathbb{R}$ 是一个单调函数, 那么

$$\omega_f(a) = \left| \lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x) \right|.$$

解 (a) 假设f 在a 点连续. 固定$\varepsilon > 0$. 那么存在某个$W \in \mathcal{N}_a$ (即, a 的某个邻域W)使得当$x \in W$ 时$|f(a) - f(x)| < \varepsilon$. 所以, 若$x, y \in W$, 则

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(y)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

因此对一切$\varepsilon > 0$,

$$0 \leqslant \omega_f(a) \leqslant \sup_{x,y \in W} |f(x) - f(y)| \leqslant 2\varepsilon$$

这就推得$\omega_f(a) = 0$.

反之, 假设$\omega_f(a) = 0$. 设$\varepsilon > 0$. 那么由振幅的定义, 我们看到存在a 的某个邻域V 使得$\sup_{x,y \in V} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 特别是, 对所有的$x \in V$ 我们有$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, 这就证得$f$ 在a 点连续.

(b) 我们可以假设f 是一个单调增函数. 注意到我们可以考虑a 的形如(c, d) 的邻域, 其中$a \in (c, d)$. 首先考虑a 的一个邻域(c, d) 并且假设$x, y \in (c, d)$ 满足$x < a < y$. 因为f 是单调增的, 所以$0 \leqslant \lim_{t \to a^+} f(t) - \lim_{t \to a^-} f(t) \leqslant f(y) - f(x)$, 并且由此, 我们得到

$$\lim_{t \to a^+} f(t) - \lim_{t \to a^-} f(t) \leqslant \omega_f(a).$$

另一方面, 如果给定$\varepsilon > 0$, 那么存在某个$\delta > 0$ 使得开区间$J = (a - \delta, a + \delta)$ 满足$J \subseteq X$ 和

$$\omega_f(a) \leqslant \sup_{x,y \in J} |f(x) - f(y)| < \left[\lim_{t \to a^+} f(t) - \lim_{t \to a^-} f(t) \right] + \varepsilon.$$

这就推得$\omega_f(a) \leqslant \lim_{t \to a^+} f(t) - \lim_{t \to a^-} f(t)$, 从而

$$\omega_f(a) = \lim_{t \to a^+} f(t) - \lim_{t \to a^-} f(t)$$

正确.

习题8.13 证明无处稠密集的有限并仍然是无处稠密集. 该结论对无处稠密集的可数并正确吗?

解 设A 和B 是两个无处稠密集. 利用恒等式$S^\circ = S^{c-c}$ (参见习题8.1), 我们有

$$(\overline{A \cup B})^\circ = (\overline{A} \cup \overline{B})^{c-c} = (A^{-c} \cap B^{-c})^{-c} \subseteq (A^{-c-} \cap B^{-c-})^c$$

$$= A^{-c-c} \cup B^{-c-c} = (\bar{A})^o \cup (\bar{B})^o = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing.$$

于是用归纳法就很容易地完成结论的证明.

无处稠密集的可数并未必是无处稠密集. 例如: 取$X = \mathbb{R}$, 设$E_n = \{r_n\}$, 其中$\{r_1, r_2, \cdots\}$是有理数的一种排列. 显然, 每个E_n 是无处稠密的, 而$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \{r_1, r_2, \cdots\}$ 不是无处稠密的.

习题8.14 证明开集和闭集的边界是无处稠密的.

解 重复习题6.5的解.

习题8.15 设$f: X \to \mathbb{R}$, D 是f 在X 中所有不连续点的集合. 如果D^c 在X 中稠密, 证明D 是一个贫集.

解 由$\overline{D^c} = X$ 可得$D^o = \left(\overline{D^c}\right)^c = \varnothing$. 于是, 观察到$D$ 是一个F_σ集(定理8.10)就可完成证明.

习题8.16 证明不存在$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 以无理数集为它的不连续点集.

解 设I 表示$\mathbb{R}$ 的所有无理数集. 如果I 是$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的不连续点集, 那么(由定理8.10)I 是一个F_σ集. 然而, 由习题6.6可知这是不可能的.

习题8.17 证明一个度量空间的每个闭子集是一个G_σ 集并且每个开集是一个F_σ集.

解 设A 是度量空间X 的一个非空闭子集. 那么由

$$f(x) = d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\},$$

定义的函数$f: X \to \mathbb{R}$ 是连续的(参见引理10.4的证明[1])并且满足

$$A = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right).$$

因此, A 是一个G_δ集. 由定理8.9每个开集是一个F_σ集.

习题8.18 设$\mathcal{B}$ 是拓扑空间(X, τ) 的一些开集构成的集合. 如果对任何开集V 内的每一点x 都存在某个$B \in \mathcal{B}$ 使得$x \in B \subseteq V$, 那么称$\mathcal{B}$为τ 的一组基. 一般地, 非空开集X 的子集构成的集合$\mathcal{B}$称为一组基, 如果

(1) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$;

(2) 对任何一对$A, B \in \mathcal{B}$ 和$x \in A \cap B$, 都存在某个$C \in \mathcal{B}$ 使得$x \in C \subseteq A \cap B$. 证明如果$\mathcal{B}$是集合$X$ 的一组基, 那么集合

$$\tau = \{V \subseteq X : \forall x \in V \text{存在} B \in \mathcal{B} \text{使得} x \in B \subseteq V\}$$

是X 上以$\mathcal{B}$为一组基的拓扑.

1. 是指利用不等式$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y)$可证得$f(x) = d(x, A)$是一致连续函数. ——译者注

解 明显地, $\mathcal{B} \subseteq \tau$ 成立. 显然, $\varnothing \in \tau$, 并且由条件(1)可得$X \in \tau$. 还有, 很明显τ 在任意并下是封闭的.

于是, 设$V, W \in \tau$ 而且$x \in V \cap W$. 取两个集合$A, B \in \mathcal{B}$ 使得$x \in A \subseteq V$ 而且$x \in B \subseteq W$. 由条件(2)知道, 存在某个$C \in \mathcal{B}$ 使得$x \in C \subseteq A \cap B \subseteq V \cap W$, 也就是, $V \cap W \in \tau$. 因此, τ 是一个拓扑.

$\mathcal{B}$是τ 的一组基的证明较直接.

习题8.19 设(X, τ) 是一个拓扑空间, 并且设$\mathcal{B}$是拓扑τ 的一组基(参见上一题的定义). 证明存在X 的一个稠密子集A 使得A 的势$\leqslant \mathcal{B}$ 的势.

解 如果$B \in \mathcal{B}$ 并且$B \neq \varnothing$, 那么固定$x_B \in B$ 并且考虑集合$A = \{x_B : B \in \mathcal{B} \backslash \{\varnothing\}\}$. 我们断言:

(1) A 在X 中是稠密的, 并且

(2) A 的势$\leqslant \mathcal{B}$ 的势.

为了看出(1), 设V 是一个非空开集. 如果$x \in V$, 那么存在$B \in \mathcal{B}$ 使得$x \in B \subseteq V$. 由此可得$x_B \in V$, 从而$V \cap A \neq \varnothing$. 这就证得$A$ 在X 中是稠密的.

对于(2), 注意到由$f(B) = x_B$ 定义的函数$f : \mathcal{B} \backslash \{\varnothing\} \to A$ 是到上的. 由选择公理知道, 存在对每个$x \in A$ 存在$\mathcal{B}$的一个子集$\mathcal{C}$使得$\mathcal{C} \cap f^{-1}(\{x\})$ 恰好由一个点构成. 那么$f : \mathcal{C} \to A$ 是一一的而且是到上的, 这就证得A 的势$=\mathcal{C}$的势$\leqslant \mathcal{B}$的势.

习题8.20 设$f : X \to Y$ 是一个函数. 如果τ 是Y 上的一个拓扑, 那么由f 确定的Y 上的等价拓扑τ_f 定义为$\tau_f = \{\mathcal{O} \subseteq Y : f^{-1}(\mathcal{O}) \in \tau\}$.

(a) 证明τ_f 的确是Y 上的一个拓扑并且$f : (X, \tau) \to (Y, \tau_f)$ 连续.

(b) 如果$g : (Y, \tau_f) \to (Z, \tau_1)$ 是一个函数, 证明复合函数$g \circ f : (X, \tau) \to (Z, \tau_1)$ 连续当且仅当g 连续.

(c) 假设$f : X \to Y$ 是到上的并且τ^* 是Y 上的一个拓扑使得$f : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ 是一个开映射(即, 它将X 的开集映为Y 的开集)并且是连续的. 证明$\tau^* = \tau_f$.

解 (a) (1) 因为$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \tau$, 并且$f^{-1}(Y) = X \in \tau$, 我们看到$\varnothing, Y \in \tau_f$.

(2) 如果$V, W \in \tau_f$, 那么恒等式$f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$ 推出$V \cap W \in \tau_f$.

(3) 如果$\{V_i : i \in I\}$ 是τ_f 的一个集族, 那么由恒等式$f^{-1}(\cup V_i) = \cup f^{-1}(V_i)$, 我们看到$\cup V_i \in \tau_f$.

(b) 假设$g \circ f$ 连续. 如果V 是Z 的一个开集, 那么$f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V) \in \tau$ 说明$g^{-1}(V) \in \tau_f$.

(c) 因为f 连续, 容易看到$\tau^* \subseteq \tau_f$ 成立. 另一方面, 设$V \in \tau_f$. 那么$f^{-1}(V) \in \tau$, 而且, 因为f 是一个开映射并且是到上的, 我们有$V = f(f^{-1}(V)) \in \tau^*$ (参见习题1.7). 这就是说, $\tau_f \subseteq \tau^*$ 也成立, 从而$\tau_f = \tau^*$.

习题8.21 本题提供了一个紧集的闭包不是紧集的例子. 首先考虑具有由度量$d(x, y) = |x - y|$ 生成的拓扑τ 的区间$[0, 1]$. 显然$([0, 1], \tau)$ 是一个紧拓扑空间. 其次, 记$X = [0, 1] \cup \mathbb{N} = [0, 1] \cup$

$\{2,3,4,\cdots\}$, 并且定义

$$\tau^* = \tau \cup \{[0,1] \cup A : A \subseteq \mathbb{N}\}.$$

(a) 证明τ^* 是X 上的一个非Hausdorff拓扑并且在$[0,1]$ 上τ^* 简化为τ.

(b) 证明(X,τ^*) 不是一个紧拓扑空间.

(c) 证明$[0,1]$ 是(X,τ^*) 的一个紧子集.

(d) 证明$[0,1]$ 在X 中是稠密的, 因此, 它的闭包不是紧的.

(e) 为什么这与定理8.12(1)不矛盾?

解 (a) (1) 显然, $\varnothing, X \in \tau^*$.

(2) 设$V, W \in \tau^*$. 那么我们有以下几种情形:

情形I. $V, W \in \tau^*$. 在此情形下, $V \cap W \in \tau \subseteq \tau^*$.

情形II. $V \in \tau$ 而且$W \notin \tau$ (反过来也一样). 注意到$V \cap W = V \in \tau \subseteq \tau^*$.

情形III. $V \notin \tau$ 而且$W \notin \tau$. 在此情形下, 我们有对某个$A \in \mathbb{N}$, $V \cap W = [0,1] \cup A$. 即, $V \cap W \in \tau^*$.

(3) 设$\{V_i : i \in I\}$ 是τ^* 的一个集族. 如果对每个$i \in I$, $V_i \in \tau$ 成立, 那么显然$\cup V_i \in \tau \subseteq \tau^*$ 成立. 另一方面, 如果某个V_i 具有$[0,1] \cup A$ 形式, 那么$\cup V_i$ 也具有相同的形式, 所以, 它属于τ^*.

因此, τ^* 是X 上的这样一个拓扑在$[0,1]$ 上简化为τ.

(b) 覆盖$X = \cup_{n=2}^{\infty}([0,1] \cup \{n\})$ 不能简化为一个有限覆盖.

(c) 因为$([0,1],\tau)$ 是一个紧拓扑空间并且在$[0,1]$ 上τ^* 简化为τ, 因此$[0,1]$ 是X 的紧子集.

(d) 如果$x \in X\backslash[0,1]$, 那么x 的每个邻域V 具有形式$V = [0,1] \cup A$, 其中$A \in \mathbb{N}$. 因此, 对x 的每个邻域V, $V \cap [0,1] = [0,1] \neq \varnothing$ 成立. 所以, $\overline{[0,1]} = X$ 成立.

(e) 这与定理8.12(1)不矛盾是因为(X,τ^*) 不是Hausdorff拓扑空间.

习题8.22　一个拓扑空间(X,τ) 被说成是**连通**的如果X 的一个既开又闭的子集(称为**闭开集**)要么是空集要么等于X.

(a) 证明(X,τ) 是连通的当且仅当从(X,τ) 到$\{0,1\}$ (具有离散拓扑)内的唯一连续函数是常数函数;

(b) 设$f : (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ 是到上的和连续的. 如果(X,τ) 是连通的, 证明(Y,τ^*) 也是连通的.

解 (a) 如果$f : X \to \{0,1\}$ 是一个非常数连续函数, 那么$f^{-1}(\{0\})$ 是异于X 的非空闭开集, 从而X 不是连通的.

反之, 假设从X 到$\{0,1\}$ 内的每个连续函数都是常数函数. 如果A 是X 的异于$\varnothing$ 和X 的闭开集, 那么由, $x \in A$ 时$f(x) = 1$, $x \notin A$ 时$f(x) = 0$, 定义的函数$f : X \to \{0,1\}$ 是一个非常数连续函数, 矛盾. 因此, X 是一个连通的拓扑空间.

(b) 设A 是Y 的闭开集. 由f 的连续性知道$f^{-1}(A)$ 是X 的闭开集. 因为X 是连通的, 所以$f^{-1}(A) = \varnothing$ 或者$f^{-1}(A) = X$. 另外, 因为f 是到上的, 所以$f(f^{-1}(A)) = A$ 成立(习题1.7). 因此, $A = \varnothing$ 或者$A = Y$, 这就证得Y 是一个连通的拓扑空间.

9. 连续的实值函数

习题9.1 如果u, v和w是一个向量格[1]中的向量，证明下列恒等式：

(a) $u \vee v + u \wedge v = u + v$;

(b) $u - v \vee w = (u - v) \wedge (u - w)$;

(c) $u - v \wedge w = (u - v) \vee (u - w)$;

(d) $\alpha(u \wedge v) = (\alpha u) \wedge (\alpha v)$若$\alpha \geqslant 0$;

(e) $|u - v| = u \vee v - u \wedge v$;

(f) $u \vee v = \frac{1}{2}(u + v + |u - v|)$;

(g) $u \wedge v = \frac{1}{2}(u + v - |u - v|)$.

解 我们利用教材第9节中的恒等式(a), (b)和(d)[2].

(a) 在$u \wedge v + w = (u + w) \wedge (v + w)$中用$-(u + v)$替换$w$得

$$u \wedge v - (u + v) = (-v) \wedge (-u) = -u \vee v.$$

(b) $u - v \vee w = u + (-v) \wedge (-w) = (u - v) \wedge (u - w)$.

(c) $u - v \wedge w = u + (-v) \vee (-w) = (u - v) \vee (u - w)$.

(d) 若$\alpha \geqslant 0$, 那么

$$\begin{aligned}\alpha(u \wedge v) &= \alpha[-(-u) \vee (-v)] = -\alpha[(-u) \vee (-v)] \\ &= -(-\alpha u) \vee (-\alpha v) = (\alpha u) \wedge (\alpha v).\end{aligned}$$

(e) 利用(a), 我们看到

$$\begin{aligned}u \vee v - u \wedge v &= u \vee v + [u \vee v - (u + v)] = 2(u \vee v) - (u + v) \\ &= (2u) \vee (2v) - (u + v) = (u - v) \vee (v - u) = |u - v|.\end{aligned}$$

(f) 利用(e)和(a), 我们得到

$$u + v + |u - v| = (u \vee v + u \wedge v) + (u \vee v - u \wedge v) = 2(u \vee v).$$

(g) 同(f)中一样, 我们得到

1. 一个向量格E是一个有序的向量空间, 它具有附加性质：对任何两个向量$u, v \in E$, 上确界$u \vee v$ 和下确界$u \wedge v$ 在E中存在. ——译者注

2. 这里是指如下恒等式：

(a) $u \vee v = -[(-u) \wedge (-v)]$;

(b) $u \vee v + w = (u + w) \vee (v + w)$;

(d) 对每个$\alpha \geqslant 0, \alpha(u \vee v) = (\alpha u) \vee (\alpha v)$

$$u+v-|u-v| = u\vee v + u\wedge v - (u\vee v - u\wedge v) = 2(u\wedge v).$$

习题9.2　如果u和v是一个向量格中的元素, 证明:

(a) $|u+v|\vee|u-v| = |u|+|v|$;

(b) $|u+v|\wedge|u-v| = \big||u|-|v|\big|$.

解　(a) 注意到

$$\begin{aligned}|u+v|\vee|u-v| &= [(u+v)\vee(-u-v)]\vee[(u-v)\vee(-u+v)]\\ &= [(u+v)\vee(-u+v)]\vee[(-u-v)\vee(u-v)]\\ &= [u\vee(-u)+v]\vee[(-u)\vee u-v]\\ &= [u\vee(-u)]+[v\vee(-v)] = |u|+|v|.\end{aligned}$$

(b) 利用分配律, 我们看到

$$\begin{aligned}|u+v|\wedge|u-v| &= [(u+v)\vee(-u-v)]\wedge[(u-v)\vee(-u+v)]\\ &= [(u+v)\wedge(u-v)]\vee[(-u-v)\wedge(u-v)]\\ &\quad\vee[(u+v)\wedge(-u+v)]\vee\cdots\vee[(-u-v)\wedge(-u+v)]\\ &= [u+v\wedge(-v)]\vee[(-u)\wedge u-v]\vee[u\wedge(-u)+v]\\ &\quad\vee[v\wedge(-v)-u]\\ &= (u-|v|)\vee(-u-|v|)\vee(v-|u|)\vee(-v-|u|)\\ &= [u\vee(-u)-|v|]\vee[v\vee(-v)-|u|] = (|u|-|v|)\vee(|v|-|u|)\\ &= \Big||u|-|v|\Big|.\end{aligned}$$

习题9.3　证明$|u|\wedge|v|=0$成立当且仅当$|u+v|=|u-v|$成立.

解　如果$|u|\wedge|v|=0$, 那么利用习题9.1的(a), (b)和(e)可得

$$\begin{aligned}|u+v|\wedge|u-v| &= \Big||u|-|v|\Big| = |u|\vee|v|-|u|\wedge|v| = |u|\vee|v|\\ &= |u|+|v|-|u|\wedge|v| = |u|+|v| = |u+v|\vee|u-v|.\end{aligned}$$

这容易推出$|u+v|=|u-v|$成立.

反之, 假设$|u+v|=|u-v|$, 那么由习题9.2的(a)和(b), 我们有

$$\begin{aligned}|u|+|v| &= \Big||u|-|v|\Big| = |u|\vee|v|-|u|\wedge|v|\\ &= (|u|+|v|-|u|\wedge|v|)-|u|\wedge|v| = |u|+|v|-2(|u|\wedge|v|),\end{aligned}$$

由此可得$|u| \wedge |v| = 0$.

习题9.4 证明$\mathbb{R}$上所有多项式(具有实系数)构成的向量空间不是一个函数空间.[1] 对$\mathbb{R}$上所有实值可微函数构成的向量空间证明类似的结果.

解 如果p 是由$p(x) = x$定义的多项式, 那么$|p|(x) = |p(x)| = |x|$成立, 显然, $|p|$是不可微的(因此, 它也不是一个多项式).

习题9.5 设X是拓扑空间, 考虑定义为
$L = \{f \in \mathbb{R}^X : \exists\{f_n\} \subseteq C(X)\text{使得}\lim f_n(x) = f(x), \forall x \in X\}$.[2]
的X上所有实值函数的集合L, 证明L是一个函数空间.

解 显然, L是一个向量空间. 于是, 设$f, g \in L$, 取$C(X)$的两个序列$\{f_n\}$ 和$\{g_n\}$, 使得对所有的x, $\lim f_n(x) = f(x)$ 而且$\lim g_n(x) = g(x)$.那么对一切n, $f_n \vee g_n \in C(X)$ 并且

$$\begin{aligned}\lim f_n \vee g_n(x) &= \lim \frac{1}{2}[f_n(x) + g_n(x) + |f_n(x) - g_n(x)|] \\ &= \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|] = f \vee g(x),\end{aligned}$$

因此$f \vee g \in L$, 类似地, $f \wedge g \in L$, 因此L是一个函数空间.

习题9.6 设L是定义在集合X上的实值函数构成的向量空间. 如果对每个函数$f \in L$, 函数$|f|$ (定义为$|f|(x) = |f(x)|$)属于L, 证明L是一个函数空间.

解 利用恒等式

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \quad \text{和} \quad f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|).$$

习题9.7 考虑一切写成m/n形式的有理数, 其中$n > 0$, 并且m和n是没有异于± 1的公因子的整数. 显然, 这种表示是唯一的. 于是, 定义$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为: x是无理数时$f(x) = 0$, $x = m/n$时$f(x) = 1/n$. 证明f在每个无理数上是连续的, 在每个有理数上是不连续的.

解 证明基于如下性质: 设$\{r_n\}$ 是有界的互不相同的有理数列. 如果$r_n = m_n/k_n$ (其中$k_n > 0$, 并且m_n 和k_n没有公因子), 那么$\lim k_n = \infty$.

为了看出这一点, 取某个数$M > 0$, 使得对一切n, $|r_n| \leqslant M$, 从而$|m_n| \leqslant Mk_n$. 于是, 如果对某个$C > 0$, 我们有对无穷多个n, $|k_n| \leqslant C$, 那么对这同样的无穷多个n, $|m_n| \leqslant MC$ 一定成立. 然而, 这与存在有限多个有理数m/n使得$|m| \leqslant MC$ 和$|n| < C$矛盾.

---

1. 定义在非空集合X上的实值函数构成的向量空间L称为一个函数空间, 如果对每一对$f, g \in L$, 函数$f \vee g$和$f \wedge g$属于L, 其中对一切$x \in X$

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}, (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$
$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, f^-(x) = \min\{-f(x), 0\}, |f|(x) = |f(x)|.$$ ——译者注

2. $\mathbb{R}^X$ 表示X上所有实值函数构成的向量空间, $C(X)$ 表示X上所有实值连续函数构成的向量空间. ——译者注

现在, 设x是无理数. 如果$\{x_n\}$ 是满足$x_n \to x$ 的无理数列, 那么$0 = f(x_n) \to 0 = f(x)$. 因此, 若f在x处不连续, 则存在一个满足$r_n \to x$ 和$\lim f(r_n) \neq 0$ 的有理数列$\{r_n\}$. 由于x是无理数, 我们可以假设$n \neq m$ 时$r_n \neq r_m$. 记$r_n = \frac{m_n}{k_n}$, 并且注意到$f(r_n) = \frac{1}{k_n} \not\to 0$ 可推得$k_n \not\to \infty$, 矛盾. 因此, f在每个无理数上连续.

现在, 设r是有理数, 取互不相同的有理数列$\{r_n\}$, 使得$r_n = \frac{m_n}{k_n} \to r$. 于是, 注意到$\lim f(r_n) = \lim \frac{1}{k_n} = 0 \neq f(r)$ 成立, 这说明f在r处不连续, 即f在每个有理数上不连续.

习题9.8 设$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是单调增的, 即$x < y$可推得$f(x) \leqslant f(y)$. 说明f不连续点的集合是至多可数的.

解 设$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是单调增的, 并且设D是f的不连续点集.对每个$x \in D$ 取有理数r_x, 使得$\lim_{t\uparrow x} f(t) < r_x < \lim_{t\downarrow x} f(t)$. 由于$x, y \in D$ 并且$x < y$可推得

$$r_x < \lim_{t\downarrow x} f(t) < \lim_{t\uparrow y} f(t) < r_y,$$

由此可知, 当$x \neq y$时, $r_x \neq r_y$. 因此, $x \mapsto r_x$ 是从D到有理数集内的一对一的函数, 从而D是至多可数的.

习题9.9 给出一个严格单调增函数$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, 它在每个无理数上连续, 在每个有理数上不连续.

解 对每个$t \in [0, 1]$, 设$f_t : [0, 1] \to [0, 1]$ 是严格单调增函数, 除了$x = t$外它处处连续. 例如, 对$0 < t \leqslant 1$, 设

$$f_t(x) = \begin{cases} 0.5x, & 0 \leqslant x < t, \\ x, & t \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

并且, 当$0 < x \leqslant 1$ 时$f_0(x) = 0.5 + 0.5x$, $f_0(0) = 0$.

如果$\{r_1, r_2, \cdots\}$是$[0, 1]$上有理数的一种排列, 那么由

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_{r_n}(x).$$

定义函数$f : [0, 1] \to [0, 1]$, 并且注意到f具有所要的性质.

习题9.10 回忆一下, 一个函数$f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ 叫做一个开映射, 如果当V是开的时候$f(V)$也是开的. 证明如果$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续的开映射, 那么f是严格的单调函数——因此, 是一个同胚.

解 设(a, b)是$\mathbb{R}$ 的有限开区间, 因为f在$[a, b]$ 上取到最大值并且$f((a, b))$是开集, 容易看到f在$[a, b]$ 上的最值在端点取到. 特别, 由此可得$f(a) \neq f(b)$. (若$f(a) = f(b)$, 则$f(a, b)$一定是一个单点集, 这与f是一个开映射矛盾.)其次, 我们断言f在(a, b)内是严格单调的. 为此, 假设$f(a) < f(b)$, 并且$a < x < y < b$. 那么首先注意到$f(a) < f(x) < f(b)$必须成立. 事实上, 若$f(x) \leqslant f(a)$ 成立, 则f在$[a, b]$的某个内点处取到它的最小值. 类似地, 若$f(x) \geqslant f(b)$ 成立, 则f在$[a, b]$的某个内点处取到它的最大值. 然而, (因为f是开映射)两种情况都不可能,

从而$f(a) < f(x) < f(b)$成立. 同理可得$f(x) < f(y) < f(b)$. 因此, f在(a,b)内是严格单调增的. 类似地, 若$f(a) > f(b)$成立, 则f在(a,b)内是严格单调减的.

于是, 假设f 在(a,b)内是严格单调增的, 并且设$x < y$, 取某个n使得$(0,1) \subseteq (-n,n)$ 并且$x,y \in (-n,n)$, 因为f在$(-n,n)$内严格单调, 并且在$(0,1)$内严格单调增, 容易看到f在$(-n,n)$内一定严格单调增. 因此, $f(x) < f(y)$成立, 这说明f在$\mathbb{R}$ 上是严格单调增的. (注意到f未必是到上的, 然而, 映射$f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ 是一个同胚.)

习题9.11 设X是一个非空集合, 并且对任何两个函数$f, g \in \mathbb{R}^X$,

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}.$$

证明如下结论:

(a) $(\mathbb{R}^X, d)$ 是度量空间;

(b) 对某个$f \in \mathbb{R}^X$, 一个序列$\{f_n\} \subseteq \mathbb{R}^X$ 满足$d(f_n, f) \to 0$ 当且仅当$\{f_n\}$ 一致收敛于f.

解 (a)显然, 对所有的$f, g \in \mathbb{R}^X$, $d(f,g) \geqslant 0$, 并且$d(f,g) = 0$当且仅当$f = g$. 另外, 对所有的f, $g \in \mathbb{R}^X$ 显然有$d(f,g) = d(g,f)$. 所要证的是三角不等式.为此, 我们需要下面两个性质:

(1) $0 \leqslant x \leqslant y$ 蕴含着$\frac{x}{1+x} \leqslant \frac{y}{1+y}$, 而且

(2) 对所有的$x, y \geqslant 0$, $\frac{x+y}{1+x+y} \leqslant \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y}$.

性质(1)由函数$f(t) = \frac{t}{1+t} (t \geqslant 0)$ 在$[0, \infty)$ 上是严格单调递增得到; 这只要注意到对一切$t > -1$有$f'(t) = (1+t)^{-2} > 0$. 对于(2), 固定$x, y \geqslant 0$, 并且注意到

$$\begin{aligned}
&(x+y)(1+x)(1+y) = x(1+x)(1+y) + y(1+x)(1+y) \\
&\leqslant [x(1+x)(1+y) + xy(1+y)] + [y(1+x)(1+y) + xy(1+x)] \\
&= x(1+y)(1+x+y) + y(1+x)(1+x+y).
\end{aligned}$$

两边同除以$(1+x)(1+y)(1+x+y)$, 就可证得(2)是正确的.

现在, 设$f, g, h \in \mathbb{R}^X$ 并且$x \in X$. 由

$$|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$

及(1)和(2), 我们得到对所有$x \in X$,

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} &\leqslant \frac{|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|} \\
&\leqslant \frac{|f(x) - h(x)|}{1 + |f(x) - h(x)|} + \frac{|h(x) - g(x)|}{1 + |h(x) - g(x)|} \\
&\leqslant d(f,h) + d(h,g),
\end{aligned}$$

这就推得

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} \leqslant d(f,h) + d(h,g).$$

(b) 设$\{f_n\} \subseteq \mathbb{R}^X$. 首先假设$\{f_n\}$ 一致收敛于某个函数$f \in \mathbb{R}^X$, 并且设$\varepsilon > 0$. 所以, 存在n_0 使得对所有的$n \geqslant n_0$ 和$x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 成立, 因此对所有的$n \geqslant n_0$ 和$x \in X$, $\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|} \leqslant |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 成立. 由此可得对所有的$n \geqslant n_0$.

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in X} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} \leqslant \varepsilon.$$

这就证得$d(f_n, f) \to 0$.

反之, 假设$d(f_n, f) \to 0$, 并且设$\varepsilon > 0$. 那么存在某个n_0 使得对所有的$n \geqslant n_0$.

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in X} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

因此, 对所有的$n \geqslant n_0$ 和$x \in X$, $\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. 这可推得, 对所有的$n \geqslant n_0$ 和$x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 此即说明$\{f_n\}$ 一致收敛于f.

习题9.12 设$f_1, f_2, \cdots$ 是定义在紧度量空间(X, d)上的实值函数, 使得在X内$x_n \to x$ 蕴涵着在$\mathbb{R}$ 内$f_n(x_n) \to f(x)$. 如果f是连续的, 证明函数列$\{f_n\}$ 一致收敛于f.

解 假设函数$f_1, f_1, f_2, \cdots$ 具有所述的条件, 并且设函数$f : X \to \mathbb{R}$ 是连续的. 而且, 由反证法假设序列$\{f_n\}$ 不一致收敛于f. 那么容易证明(如何证明?)存在$\varepsilon > 0$, 以及$\{f_n\}$ 的一个子列$\{g_n\}$ 和X的一个序列$\{x_n\}$ 使得对一切n,

$$|g_n(x_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon. \qquad (\bigstar)$$

因为X是紧的, 序列$\{x_n\}$ 在X内有一个收敛子列, 比如说$x_{k_n} \to x$. 由f的连续性, 我们看到$f(x_{k_n}) \to f(x)$. 而且, 由假设, 可得$g_{k_n}(x_{k_n}) \to f(x)$, 从而

$$|g_{k_n}(x_{k_n}) - f(x_{k_n})| \to |f(x) - f(x)| = 0,$$

与($\bigstar$)矛盾. 因此, 序列$\{f_n\}$ 一致收敛于f.

习题9.13 对于定义在拓扑空间X上的实值函数序列$\{f_n\}$, 如果它在X上一致收敛于实值函数f, 证明下列结论.

(a) 如果$x_n \to x$ 而且f在x处连续, 那么$f_n(x_n) \to f(x)$;

(b) 如果在某点$x_0 \in X$ 每个f_n 连续, 那么在x_0 点f也连续并且

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = f(x_0).$$

解 (a) 假设在x处f连续, $x_n \to x$ 并且设$\varepsilon > 0$. 取某个k使得对所有的$n > k$和所有的$y \in X$, $|f_n(y)-f(y)| < \varepsilon$. 由$f$在$x$处的连续性, 存在某个$m > k$使得对所有的$n > m$, $|f(x_n)-f(x)| < \varepsilon$. 因此, 对所有的$n > m$,

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| < 2\varepsilon$$

成立, 从而$\lim f_n(x_n) = f(x)$.

(b) 假设在$x_0 \in X$ 处每个f_n 连续并且设$\varepsilon > 0$. 因为$\{f_n\}$ 在X上一致收敛于f, 所以存在某个k满足对所有的$x \in X$, $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$. 于是, f_k 在x_0 点的连续性保证了存在x_0 的一个邻域V使得对一切$x \in V$, $|f_k(x) - f_k(x_0)| < \varepsilon$. 那么对所有的$x \in V$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

成立, 这就证得f在x_0处连续. 对于等式, 注意到

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

而

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

习题9.14 设$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ 定义为$x \in [0,1]$ 时$f_n(x) = x^n$. 证明$\{f_n\}$ 点态收敛并且求出它的极限函数. 收敛是一致的吗?

解 显然,

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

因为f不连续, 所以收敛不是一致的(参见定理9.2).

习题9.15 设$g : [0,1] \to \mathbb{R}$ 是满足$g(1) = 0$的连续函数. 证明定义为对一切$x \in [0,1]$, $f_n(x) = x^n g(x)$ 的函数列$\{f_n\}$ 一致收敛于常数函数零.

解 设$\varepsilon > 0$. 取某个$0 < \delta < 1$ 使得$\delta < x \leqslant 1$ 时$|g(x)| < \varepsilon$.于是, 取某个$M > 0$使得对所有的$x \in [0,1]$, $|g(x)| \leqslant M$, 然后取某个k使得当$n > k$时, $M\delta^n < \varepsilon$. 因此, 对一切$n > k$我们有, 当$0 \leqslant x \leqslant \delta$ 时, $|x^n g(x)| \leqslant M\delta^n < \varepsilon$, 并且对所有$\delta < x \leqslant 1$, $|x^n g(x)| \leqslant |g(x)| < \varepsilon$, 即, 序列$\{f_n\}$ 一致收敛于常数函数零.

习题9.16 设$\{f_n\}$ 是定义在$[a,b]$上的连续的实值函数列, 并且设$\{a_n\}$ 和$\{b_n\}$ 是$[a,b]$的两个数列, 满足$\lim a_n = a$ 和$\lim b_n = b$. 如果$\{f_n\}$ 在$[a,b]$上一致收敛于f, 证明

$$\lim_{n \to \infty} \int_{a_n}^{b_n} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

解 设$\varepsilon > 0$, 取某个k使得对所有的$n > k$我们有:

(1) $a_n - a < \varepsilon$ 而且$b - b_n < \varepsilon$;

(2) 对所有的$x \in [a,b]$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

另外, 因为f是连续的(定理9.2), 所以存在某个$M > 0$使得对所有的$x \in [a,b]$, $|f(x)| \leqslant M$. 因此, 对所有的$n > k$,

$$\left| \int_{a_n}^{b_n} f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right|$$

$$= \left|\int_{a_n}^{b_n} f_n(x)\mathrm{d}x - \int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x - \int_{a}^{a_n} f(x)\mathrm{d}x - \int_{b_n}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x + \int_a^{a_n} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} |f(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \varepsilon(b-a) + M(a_n - a) + M(b - b_n) < \varepsilon(2M + b - a)$$

成立, 并由此得到我们的结论.

习题9.17　设$\{f_n\}$ 是度量空间X上的连续的实值函数列. 如果在X的每个紧子集上$\{f_n\}$ 一致收敛于某函数f, 证明f是连续函数.

解　设在X中$x_n \to x$.记$K = \{x_1, x_2, \cdots\} \cup \{x\}$, 并且注意到$K$是一个紧集——$K$的每个开覆盖都可以简化为一个有限覆盖. 因为$\{f_n\}$ 是在K上一致收敛于f的连续函数列, 由定理9.2知道f在K上连续. 因为$x_n \to x$ 在K上成立, 所以我们得到$f(x_n) \to f(x)$. 即f是连续函数.

习题9.18　设$\{f_n\}$ 和$\{g_n\}$ 是集合X上的两个一致有界的实值函数列. 如果$\{f_n\}$ 和$\{g_n\}$ 在X上都一致收敛, 证明$\{f_ng_n\}$ 在X上也一致收敛.

解　假设$\{f_n\}$ 和$\{g_n\}$ 分别一致收敛于f 和g. 设$\varepsilon > 0$. 取某个k使得对所有的$n > k$和$x \in X$, $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ 而且$|g_n(x)-g(x)| < \varepsilon$. 另外, 取某个$M > 0$使得对所有的$n$和$x$, $|f_n(x)| \leqslant M$ 和$|g_n(x)| \leqslant M$ 成立. 于是, 注意到

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)|$$
$$\leqslant |f_n(x)| \cdot |g_n(x) - g(x)| + |g(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)| < 2M\varepsilon$$

对所有的$n > k$和$x \in X$ 成立.

习题9.19　假设$\{f_n\}$ 是定义在$[a,b]$上的单调实值函数列而且未必都是单调增的或单调减的. 证明如果$\{f_n\}$ 在$[a,b]$上点态收敛于一个连续函数f, 那么在$[a,b]$上$\{f_n\}$ 一致收敛于f.

解　设$\varepsilon > 0$. 因为f是一致连续的(定理7.7), 所以存在$\delta > 0$ 使得当$|x-y| < \delta$ 时, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ 成立. 固定有限个点$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ 使得当$1 \leqslant i \leqslant k$ 时, $x_i - x_{i-1} < \delta$, 然后取某个m使得对一切$0 \leqslant i \leqslant k$ 和$n > m$, $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ 成立.

于是, 设$n > m$. 假设f_n 是单调减的. 若$x \in [a,b]$, 则对某个$1 \leqslant i \leqslant k$ 有$x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$ 成立, 从而

$$|f_n(x) - f_n(x_i)| = f_n(x) - f_n(x_i) \leqslant f_n(x_{i-1}) - f_n(x_i)$$
$$= [f_n(x_{i-1}) - f(x_{i-1})] + [f(x_{i-1}) - f(x_i)] + [f(x_i) - f_n(x_i)]$$
$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

如果f_n 是单调增的, 类似的不等式也正确. 因此, 对所有的$x \in [a,b]$ 和$n > m$.

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)|$$

$$< 3\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 5\varepsilon$$

成立. 即, $\{f_n\}$ 一致收敛于f.

习题9.20 设X是一个拓扑空间, $\{f_n\}$ 是定义在X上的实值连续函数列. 假设存在一个函数$f: X \to \mathbb{R}$ 使得对所有的$x \in X$, $f(x) = \lim f_n(x)$ 成立. 证明f在a点连续当且仅当对一切$\varepsilon > 0$ 和m存在a的一个邻域V及某个$k > m$使得对所有的$x \in X$, $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$ 成立.

解 假设f在某点a连续. 设$\varepsilon > 0$ 和整数m都给定. 取a的一个邻域U使得对所有的$x \in U$, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ 成立. 因为$\lim f_n(a) = f(a)$ 成立, 所以存在一个整数$r > m$使得对所有的$n > r$, $|f(a) - f_n(a)| < \varepsilon$ 成立. 固定任何整数$k > r$并且注意到$k > m$. 因为f_k 是连续函数, 所以存在a的一个邻域W使得对所有的$x \in W$, $|f_k(a) - f_k(x)| < \varepsilon$ 成立. 于是, 注意到, 若$x \in V = U \cap W$, 则

$$|f(x) - f_k(x)| \leqslant |f(x) - f(a)| + |f(a) - f_k(a)| + |f_k(a) - f_k(x)| < 3\varepsilon.$$

反之, 假设f在a点满足所述的条件并且设$\varepsilon > 0$. 因为$f(a) = \lim f_n(a)$ 成立, 所以存在一个整数m使得对所有的$n > m$, $|f(a) - f_n(a)| < \varepsilon$ 成立. 由假设, 存在a的一个邻域V和一个整数$k > m$使得对所有的$x \in V$, $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$ 成立. 由f_k 的连续性, 存在a的另一个邻域U使得对所有的$x \in U$, $|f_k(a) - f_k(x)| < \varepsilon$ 成立. 于是, 注意到$x \in U \cap V$ 可推得

$$|f(a) - f(x)| \leqslant |f(a) - f_k(a)| + |f_k(a) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < 3\varepsilon.$$

这就证得f在a点连续.

习题9.21 设$\{f_n\}$ 是定义在闭区间$[a,b]$上的一致有界的连续实值函数列. 对一切$x \in [a,b]$, 定义函数列$\phi_n(x) = \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$, 证明函数列$\{\phi_n\}$含有一个在$[a,b]$上一致收敛的子列.

解 因为序列$\{f_n\}$ 是一致有界的, 所以存在某个$M > 0$使得对所有的$x \in [a,b]$ 和n, $|f_n(x)| < M$ 成立. 显然, 对所有的$x \in [a,b]$ 和n,

$$|\phi_n(x)| = \left|\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M(b-a)$$

成立. 因此, 序列$\{\phi_n\}$ 是一致有界的并且我们断言它是一个等度连续[1]序列.

为了看出这一点, 设$\varepsilon > 0$ 并且记$\delta = \varepsilon/M$. 于是, 注意到当$x, y \in [a,b]$ 并且$|x-y| < \delta$ 时,

$$|\phi_n(x) - \phi_n(y)| = \left|\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t - \int_a^y f_n(t)\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant \left|\int_x^y |f_n(t)|\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_x^y M\mathrm{d}t\right| = M|x-y| < \varepsilon.$$

1. 设X是一个拓扑空间, S是$C(X)$的一个子集, $x \in X$, 若对每个$\varepsilon > 0$ 都存在x的一个邻域V使得当$y \in V$ 时, $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ 对每个$f \in S$ 成立, 则称S在x点是等度连续的. 若S在X的每一点上都是等度连续的, 则称S是一个等度连续集. ——译者注

因此, 集合$A=\{\phi_1,\phi_2,\cdots\}$是等度连续的. 如果$\bar{A}$ 表示A在$C[a,b]$中的(一致)闭包, 那么$\bar{A}$是有界的, 闭的而且是等度连续的(为什么?). 由Ascoli-Arzel à 定理(定理9.10)可知, 集合$\bar{A}$ 是紧的. 因为$\{\phi_n\}$ 是$\bar{A}$ 的一个序列, 所以$\{\phi_n\}$ 有一个子列在$[a,b]$上一致收敛.

习题9.22 对每个n设$f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是单调(要么递增要么递减)函数. 如果存在$\mathbb{R}$ 的一个稠密子集A使得对一切$x\in A$, $\lim f_n(x)$ 在$\mathbb{R}$ 中存在, 证明$\lim f_n(x)$ 在$\mathbb{R}$ 中除了至多可数个x外都存在.

解 假设函数f_n 和$\mathbb{R}$ 的稠密子集A满足题目中的条件, 另外, 首先假设除了有限项以外f_n 是单调增函数.

定义函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为

$$f(x)=\limsup f_n(x), x\in\mathbb{R}.$$

注意到对每个$x\in\mathbb{R}$, $f(x)$ 是一个实数[1]. 事实上, 若$x\in\mathbb{R}$, 则存在$a,b\in A$ 使得$a<x<b$, 从而对所有充分大的n, $f_n(a)\leqslant f_n(x)\leqslant f_n(b)$ 成立. 因此,

$$\begin{aligned}-\infty<\lim f_n(a)&=\limsup f_n(a)\\&\leqslant\limsup f_n(x)=f(x)\\&\leqslant\limsup f_n(b)=\lim f_n(b)<\infty.\end{aligned}$$

显然, 对一切$x\in A$, $f(x)=\lim f_n(x)$ 成立. 其次, 注意到f是一个单调增函数. 事实上, 若$x<y$成立, 那么由$f_n(x)\leqslant f_n(y)$ 对充分大的n成立我们看到$f(x)=\limsup f_n(x)\leqslant\limsup f_n(y)=f(y)$. 由习题9.8我们知道, f在$\mathbb{R}$ 的每个闭子区间中有至多可数个不连续点. 因此, f有至多可数个不连续点(为什么?), 于是, 我们断言, 在f的每个连续点上

$$\lim f_n(x)=f(x)$$

成立. 为此, 设x_0是f的一个连续点并且设$\varepsilon>0$. 取$\delta>0$ 使得当$x_0-\delta<x<x_0+\delta$时$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 然后取$a,b\in A$ 使得$x_0-\delta<a<x_0<b<x_0+\delta$. 另外, 取某个$n_0$使得对一切$n\geqslant n_0$ 函数f_n 是单调增的并且满足

$$|f_n(b)-f(b)|<\varepsilon \quad 和 \quad |f_n(a)-f(a)|<\varepsilon.$$

于是, 注意到对$n\geqslant n_0$, 我们有

$$\begin{aligned}f(x_0)-f_n(x_0)&\leqslant f(x_0)-f_n(a)\\&=[f(x_0)-f(a)]+[f(a)-f_n(a)]<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon\end{aligned}$$

并且

$$f_n(x_0)-f(x_0)\leqslant f_n(b)-f(x_0)$$

1. 这里是指$f(x)$是一个有限实数. ——译者注

$$= [f_n(b) - f(b)] + [f(b) - f(x_0)] < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

因此, 对所有的$n \geqslant n_0$, $|f_n(x_0) - f(x_0)| < 2\varepsilon$ 成立, 这就证得$\lim f_n(x_0) = f(x_0)$.

对于一般情形, 假设有无穷多个单调增的和无穷多个单调减的f_n. 将序列$\{f_n\}$ 分成两个子列$\{g_n\}$ 和$\{h_n\}$ 使得每个g_n 是单调增的并且每个h_n 是单调减的. 记

$$g(x) = \limsup g_n(x) \quad 和 \quad h(x) = \liminf h_n(x) = -\limsup[-h_n(x)],$$

并且注意到对每个$a \in A$, $g(a) = h(a)$成立. 由上面的结论, g和h除了$\mathbb{R}$ 的一个至多可数子集C外是连续的, 因此对每个$x \notin C$ 我们有

$$\lim g_n(x) = g(x) \text{ 和 } \lim h_n(x) = h(x).$$

于是, 设$c \notin C$ 并且固定$\varepsilon > 0$. 取某个$\delta > 0$ 使得当$|x - c| < \delta$ 时$|g(x) - g(c)| < \varepsilon$ 而且$|h(x) - h(c)| < \varepsilon$. 取$a \in A$ 使得$|a - c| < \delta$ 并且注意到, 由$g(a) = h(a)$可得

$$|g(c) - h(c)| \leqslant |g(c) - g(a)| + |h(a) - h(c)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

因为$\varepsilon > 0$ 是任意的, 所以我们看到对一切$c \notin C$, $g(c) = h(c)$成立. 这就推得(如何推?)对一切$c \notin C$, $\lim f_n(c)$ 在$\mathbb{R}$ 中存在.

习题9.23 *考虑连续函数$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, 对每个$n$定义连续函数$f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ 为$f_n(x) = f(x^n)$. 证明连续函数的集合$\{f_1, f_2, \cdots\}$ 在$x = 1$处是等度连续的当且仅当f是一个常数函数.*

解 设$f \in C[0, \infty)$, $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ 定义为$f_n(x) = f(x^n)$, 并且设$E = \{f_1, f_2, \cdots\}$. 如果f是一个常数函数, 那么集合E在$x = 1$处显然是等度连续的.

反之, 假设集合E在$x = 1$处是等度连续的. 固定$a > 0$并且设$\varepsilon > 0$. E在$x = 1$处的等度连续性保证存在某个$0 < \delta < 1$ 使得当$|x - 1| < \delta$ 时对一切n有$|f_n(x) - f_n(1)| < \varepsilon$ 成立. 由$\lim \sqrt[n]{a} = 1$ (为什么?), 我们看到存在某个n_0使得对一切$n \geqslant n_0$, $|\sqrt[n]{a} - 1| < \delta$ 成立. 因此, 若$n \geqslant n_0$, 我们有

$$|f(a) - f(1)| = |f((\sqrt[n]{a})^n) - f(1^n)| = |f_n(\sqrt[n]{a}) - f_n(1)| < \varepsilon.$$

因为$\varepsilon > 0$ 是任意的, 所以对一切$a > 0$, $f(a) = f(1)$成立. 由连续性, 我们看到对一切$a \geqslant 0$, $f(a) = f(1)$, 从而f是一个常数函数.

习题9.24 *设(X, d)是紧度量空间并且$\mathcal{A}$是$C(X)$的一个等度连续集. 证明$\mathcal{A}$是一致等度连续的, 即, 证明对每个$\varepsilon > 0$ 存在某个$\delta > 0$ 使得当$x, y \in X$ 并且$d(x, y) < \delta$ 时对所有的$f \in \mathcal{A}$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

解 设(X, d)是紧度量空间, $\mathcal{A}$是$C(X)$的等度连续子集, 并且$\varepsilon > 0$. 对每个$x \in X$ 存在(由$\mathcal{A}$的等度连续性)某个$\delta_x > 0$ 使得当$d(x, y) < \delta_x$ 时对所有的$f \in \mathcal{A}$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 由$X = U_{x \in X} B\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)$ 和X的紧性, 我们看到存在$x_1, \cdots, x_n \in X$ 使得$X = \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$.

设$\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_{x_1}, \cdots, \delta_{x_n}\} > 0$ 并且$x, y \in X$ 满足$d(x,y) < \delta$. 于是, 取某个$1 \leqslant i \leqslant n$ 使得$d(x, x_i) < \frac{\delta_{x_i}}{2}$ 并且观察到对所有的$f \in \mathcal{A}$, $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$. 另外, 由

$$d(y, x_i) \leqslant d(y, x) + d(x, x_i) < \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i}.$$

我们看到对所有的$f \in \mathcal{A}$, $|f(y) - f(x_i)| < \varepsilon$. 因此, 综上所述, 当$d(x,y) < \delta$ 时, 对所有的$f \in \mathcal{A}$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

成立. 即, $\mathcal{A}$是$C(X)$的一致等度连续子集.

习题9.25　设X是连通的拓扑空间(参见第8节习题8.22的定义)并且$\mathcal{A}$是$C(X)$的一个等度连续子集. 如果对某个$x_0 \in X$, 实数集$\{f(x_0) : f \in \mathcal{A}\}$ 是有界的, 证明对一切$x \in X$, $\{f(x) : f \in \mathcal{A}\}$ 也是有界的.

解　设X是连通的拓扑空间, $\mathcal{A}$是$C(X)$的一个等度连续子集, 并且设$x_0 \in X$ 是使得实数集$\{f(x_0) : f \in \mathcal{A}\}$ 有界的点. 考虑集合

$$E = \{x \in X : \text{集合} f(x) : f \in \mathcal{A} \text{ 有界}\}.$$

因为$x_0 \in E$, 我们看到E是非空的. 我们断言E既是开的又是闭的. 如果这是正确的, 那么由X的连通性我们一定有$E = X$, 并且由此得到所要的结论.

我们首先证明E是一个闭集. 为此, 设$y \in \bar{E}$. 由$\mathcal{A}$的等度连续性, 存在y的一个邻域V使得对所有的$x \in V$, $f \in \mathcal{A}$,

$$|f(x) - f(y)| < 1$$

成立, 由$y \in \bar{E}$, 我们看到$V \cap E \neq \varnothing$. 固定某个$z \in V \cap E$, 然后取某个$M > 0$使得对一切$f \in \mathcal{A}$, $|f(z)| \leqslant M$ 成立. 特别是, 对所有的$f \in \mathcal{A}$, 我们有

$$|f(y)| \leqslant |f(y) - f(z)| + |f(z)| < 1 + M.$$

这意味着$y \in E$, 从而$\bar{E} = E$, 即, E是闭集.

其次, 我们证明E是一个开集. 为此设$y \in E$. 取某个$C > 0$使得对一切$f \in \mathcal{A}$, $|f(y)| \leqslant C$ 成立. 由$\mathcal{A}$的等度连续性, 存在y的一个邻域W使得对一切$x \in W$ 和所有的$f \in \mathcal{A}$, $|f(x) - f(y)| < 1$ 成立. 特别是, 若$x \in W$, 则对所有的$f \in \mathcal{A}$

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(y)| + |f(y)| < 1 + C$$

成立, 从而$x \in E$. 即, $W \subseteq E$ 成立, 这就证得y是E的一个内点. 因此, E也是一个开集.

习题9.26　设$\{f_n\}$ 是$C(X)$中的一个等度连续序列, 其中X未必是紧的. 如果对某个函数$f : X \to \mathbb{R}$ 我们有对一切$x \in X$, $\lim f_n(x) = f(x)$ 成立, 证明$f \in C(X)$.

解　设$x \in X$ 并且$\varepsilon > 0$. 因为$\{f_n\}$ 是一个等度连续的序列, 所以存在点x的一个邻域V使得对所有的n和一切$y \in V$, $|f_n(y) - f_n(x)| < \varepsilon$ 成立.

于是，设$y \in V$，取某个k使得$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ 并且$|f_k(y) - f(y)| < \varepsilon$，而且注意到

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| < 3\varepsilon.$$

即，f在任意点x处连续.

习题9.27 设X是紧拓扑空间，而且$\{f_n\}$是$C(X)$的一个等度连续序列. 假设存在某个$f \in C(X)$和X的稠密子集A使得对一切$x \in A$，$\lim f_n(x) = f(x)$ 成立. 证明$\{f_n\}$ 一致收敛于f.

解 设$\varepsilon > 0$. 由$\{f_n\}$ 的等度连续性和f的连续性，对每个$x \in X$，存在x的某个邻域V_x 使得

(1) 对所有的$y \in V_x$ 和n，$|f_n(y) - f_n(x)| < \varepsilon$ 成立；而且

(2) 对所有的$y \in V_x$，$|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ 成立. 由X的紧性知道，存在$x_1, \cdots, x_k \in X$ 使得$X = \bigcup_{i=1}^k V_{x_i}$.

于是，设$y \in V_{x_i}$. 取某个$x \in A \cap V_{x_i}$，然后取某个m_i使得对所有的$n > m_i$有$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. 显然，$|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$. 因此，对所有的$y \in V_{x_i}$ 和所有的$n > m_i$，

$$\begin{aligned}&|f_n(y) - f(y)|\\ \leqslant\ &|f_n(y) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)|\\ <\ &5\varepsilon\end{aligned}$$

成立.

最后，记$m = \max\{m_i : 1 \leqslant i \leqslant k\}$，并且注意到对所有的$y \in X$ 和$n > m$，$|f_n(y) - f(y)| < 5\varepsilon$.

习题9.28 对任何固定的整数$n > 1$，考虑$C[0,1]$中这样的函数f构成的集合，存在某个$x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ 使得当$0 < h < \frac{1}{n}$ 时，

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant nh.$$

证明该集合在$C[0,1]$(具有一致度量)中是无处稠密的.

利用上述结论和Baire定理证明存在一个定义在[0,1]上的连续实值函数在[0, 1]的任何点上都不可微.

解 设$D(f,g) = ||f - g||_\infty = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$. 对$n \geqslant 2$ 定义

$A_n = \{f \in C[0,1]\} : \exists x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ 使得当$0 < h < \frac{1}{n}$ 时$|f(x+h) - f(x)| \leqslant nh\}$. 我们断言：

(1) 每个A_n是闭的；

(2) 每个A_n在$C[0,1]$中是无处稠密的(即，$(A_n)^\circ = \varnothing$).

为了看出每个A_n是闭的，设$\{f_k\} \subseteq A_n$ 满足$\lim D(f_k, f) = 0$ (即，$\{f_k\}$ 在[0, 1]上一致收敛于f). 对每个k取某个$x_k \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ 使得对所有的$0 < h < \frac{1}{n}$，$|f_k(x_k + h) - f_k(x_k)| \leqslant nh$. 因为$[0, 1 - 1/n]$是紧的，所以存在$\{x_k\}$ 的一个子列收敛于某个$x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$. 我们可以假设$\lim x_k = x$. 由习题9.13可知，$\lim f_k(x_k + h) = f(x+h)$ 而且$\lim f_k(x_k) = f(x)$，从而对所有的$0 < h < 1/n$，$|f(x+h) - f(x)| \leqslant nh$ 成立. 因此，$f \in A_n$，并且A_n是$C[0,1]$的一个闭子集.

于是, 设$f \in A_n$ 而且$\varepsilon > 0$. 考虑函数$g \in C[0,1]$, 它的图像如图2.1所示.

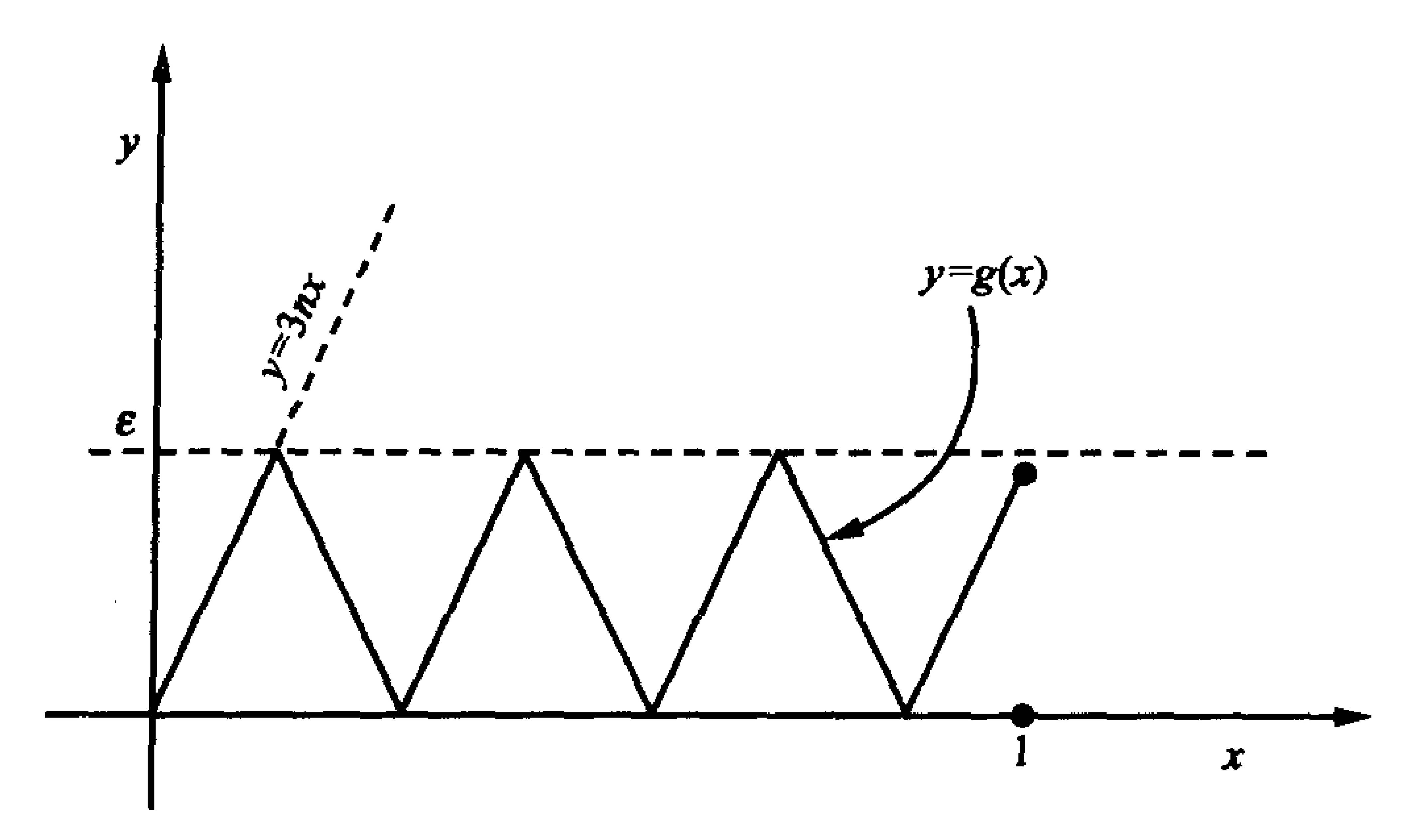


图2.1　无处可微函数的结构

注意到对每个$x \in [0,1)$, 当$h > 0$充分小时我们有$|g(x+h) - g(x)| = 3nh$. 记$f_1 = f + g$, 并且注意到$D(f, f_1) = ||g||_\infty = \varepsilon$. 另一方面, 若$x \in [0,1)$ 固定, 则对所有充分小的$h > 0$我们有

$$\begin{aligned} nh < 2nh = 3nh - nh &\leqslant |g(x+h) - g(x)| - |f(x+h) - f(x)| \\ &\leqslant |g(x+h) - g(x) - [f(x) - f(x+h)]| = |f_1(x+h) - f_1(x)|. \end{aligned}$$

因此, $f_1 \notin A_n$, 从而对所有的$\varepsilon > 0$, $B(f, 2\varepsilon) \not\subseteq A_n$. 这就证得$(A_n)^\circ = \varnothing$.

于是, 对一切$n \geqslant 2$ 设

$$B_n = \{f \in C[0,1] : \exists x \in [1/n, 1] \text{ 使得当} 0 < h < 1/n \text{ 时} |f(x-h) - f(x)| \leqslant nh\}.$$

同理可得, 每个B_n是闭的和无处稠密的. 因此, 由Baire定理6.17, 我们有

$$C[0,1] \neq \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n\right).$$

特别是, 注意到每个$f \in C[0,1] \setminus \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n\right)$ 在[0, 1]的任何点没有任何单侧导数.

习题9.29　证明下列关于可微性和一致收敛性的结果. 设$\{f_n\}$ 是定义在有界开区间(a,b)的可微的实值函数列满足:

(a) 对某个$x_0 \in (a,b)$ 实数列$\{f_n(x_0)\}$ 在$\mathbb{R}$ 中收敛;

(b) 导数序列$\{f_n'\}$ 一致收敛于一个函数$g : (a,b) \to \mathbb{R}$. 那么序列$\{f_n\}$ 一致收敛于一个函数$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, 它在x_0点可微并且满足$f'(x_0) = g(x_0)$.

解　首先, 我们来证$\{f_n\}$ 是一个一致Cauchy序列. 为此, 设$\varepsilon > 0$ 并且取某个$M > 0$使得对一切$x \in (a,b)$, $|x - x_0| \leqslant M$. 然后, 取某个k使得对所有的$m, n \geqslant k$ 和$x \in (a,b)$,

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon, \qquad (\bigstar)$$

而且对所有的$m, n \geqslant k$,

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon. \qquad (\bigstar\bigstar)$$

利用中值定理, ($\bigstar$)和($\bigstar\bigstar$), 我们看到对一切$x \in (a,b)$ 和每一对$n, m \geqslant k$ 都存在某个$t \in (a,b)$ 使得

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_m(x)| &\leqslant |[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(x_0) - f_m(x_0)]| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\ &= |f_n'(t) - f_m'(t)| \cdot |x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\ &\leqslant M\varepsilon + \varepsilon = (1+M)\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证得$\{f_n\}$ 是一个一致Cauchy序列, 因此, $\{f_n\}$ 一致收敛于一个函数$f : (a,b) \to \mathbb{R}$.

其次, 对每个n我们考虑定义为, $x \neq x_0$ 时$\phi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ 而且$\phi_n(x_0) = f_n'(x_0)$, 的连续函数$\phi_n : (a,b) \to \mathbb{R}$. 利用中值定理和($\bigstar$), 我们看到对每个$x \in (a,b)$ 存在某个$c_x \in (a,b)$ 使得对所有的$n, m \geqslant k$,

$$|\phi_n(x) - \phi_m(x)| = \left|\frac{[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(x_0) - f_m(x_0)]}{x - x_0}\right| = |f_n'(c_x) - f_m'(c_x)| < \varepsilon.$$

这就证得$\{\phi_n\}$ 是一个一致Cauchy序列, 因此, 它一致收敛于定义为, $x \neq x_0$ 时$\phi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 而且$\phi(x_0) = g(x_0)$ 的函数$\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$.

最后, 由习题9.13, 我们得到

$$\begin{aligned}g(x_0) &= \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}\phi_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}\phi_n(x) \\ &= \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(x) - f(x)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.\end{aligned}$$

这就证得f在x_0点可微并且$f'(x_0) = g(x_0)$.

10. 连续函数的分离性质

习题10.1 设(X,d)是一个度量空间并且A是X的一个非空子集. A的距离函数是由

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}.$$

定义的函数$d(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}$. 证明$d(x,A) = 0$当且仅当$x \in \bar{A}$.

解 显然, 对一切$x \in X$, $d(x,A) \geqslant 0$. 假设$x \in \bar{A}$ 并且$\varepsilon > 0$. 那么$B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$, 从而存在某个$y \in A$ 使得$d(x,y) < \varepsilon$. 由距离函数的定义, 我们看到$0 \leqslant d(x,A) \leqslant d(x,y) < \varepsilon$. 由于$\varepsilon > 0$ 是任意的, 由此可得$d(x,A) = 0$.

反之, 假设$d(x,A) = 0$. 若$\varepsilon > 0$, 则由$d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\} < \varepsilon$ 可得存在某个$a \in A$ 使得$d(x,a) < \varepsilon$. 因此, 对一切$\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$, 这就推得$x \in \bar{A}$.

习题10.2 设(X,d)是一个度量空间, A 和B 是两个互不相交的非空闭子集, 并且考虑定义为$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$ 的函数$f : X \to [0,1]$, 证明:

(a) f是一个连续函数；

(b) $f^{-1}(\{0\}) = A$ 而且$f^{-1}(\{1\}) = B$ ；

(c) 若$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A$ 而且$b \in B\} > 0$, 则f是一致连续的.

解　设C是X的任意非空子集. 我们将首先证明函数$x \mapsto d(x,C)$ 是一致连续的. 为此, 固定$x, y \in X$, 取某个$c \in C$ 我们看到

$$d(x,C) \leqslant d(x,c) \leqslant d(x,y) + d(y,c) \leqslant d(x,y) + d(y,C)$$ [1],

或者$d(x,C) - d(y,C) \leqslant d(x,y)$. 在上述不等式中互换$x$和$y$的角色, 我们得到$d(y,C) - d(x,C) \leqslant d(x,y)$. 因此,

$$|d(x,C) - d(y,C)| \leqslant d(x,y).$$

$x \mapsto d(x,C)$的一致连续性由此可得.

(a) 观察到当A和B是互不相交的闭集时, 由习题10.1可得对一切$x \in X, d(x,A) + d(x,B) > 0$. 这与函数$d(\cdot,A)$ 和$d(\cdot,B)$ 的(一致)连续性一起可推得f是连续函数.

(b) 注意到$f(x) = 0$当且仅当$d(x,A) = 0$. 于是, 由习题10.1, 我们有$d(x,A) = 0$当且仅当$x \in \bar{A} = A$. 换句话说, 我们有$f(x) = 0$当且仅当$x \in A$. 这意味着$f^{-1}(\{0\}) = A$. 类似地, 注意到$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)} = 1$ 当且仅当$d(x,B) = 0$. 同上面一样, 这说明$f^{-1}(\{1\}) = B$.

(c) 固定某个$\varepsilon > 0$ 使得对所有的$u \in A$ 和$v \in B$, $d(u,v) \geqslant \varepsilon$. 若$a \in A$ 和$b \in B$ 是任意的, 那么对一切$z \in X$ 我们有

$$\varepsilon \leqslant d(a,b) \leqslant d(z,a) + d(z,b) \leqslant d(z,A) + d(z,B)$$ [2].

于是, 若$x, y \in X$, 那么不等式

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left|\frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)} - \frac{d(y,A)}{d(y,A) + d(y,B)}\right| \\
&= \frac{|[d(y,A) + d(y,B)]d(x,A) - [d(x,A) + d(x,B)]d(y,A)|}{[d(x,A) + d(x,B)][d(y,A) + d(y,B)]} \\
&= \frac{|[d(x,A) - d(y,A)]d(x,B) + [d(y,B) - d(x,B)]d(x,A)|}{[d(x,A) + d(x,B)][d(y,A) + d(y,B)]} \\
&\leqslant \frac{[d(x,B) + d(x,A)]d(x,y)}{[d(x,A) + d(x,B)][d(y,A) + d(y,B)]} \\
&\leqslant \frac{d(x,y)}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

保证了f是一致连续的.

---

1. 这里是: 对任何正数ε, 由$d(y,C)$的定义知道, 存在$c_\varepsilon \in C$ 使得$d(y,c_\varepsilon) < d(y,C) + \varepsilon$. 对此$c_\varepsilon$ 有

$$d(x,C) \leqslant d(x,c_\varepsilon) \leqslant d(x,y) + d(y,c_\varepsilon) < d(x,y) + d(y,C) + \varepsilon.$$

由$\varepsilon > 0$ 的任意性可得$d(x,C) \leqslant d(x,y) + d(y,C)$. ——译者注

2. 最后一个不等式是指$\varepsilon \leqslant d(z,A) + d(z,B)$. 这是由$\varepsilon \leqslant d(z,a) + d(z,b)$ 分别关于$a \in A$ 和$b \in B$ 取下确界得到的. ——译者注

习题10.3 设A和B是度量空间X的两个非空子集, 满足$A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \varnothing$. 证明存在两个互不相交的开集$U$和$V$使得$A \subseteq U$ 和$B \subseteq V$.

解 由习题10.2的解答, 我们知道对X的每个非空子集C, 函数$x \mapsto d(x, C)$ 是(一致)连续的. 于是, 考虑函数$f : X \to \mathbb{R}$, 定义为

$$f(x) = d(x, A) - d(x, B).$$

由上面的结论, 我们知道f是连续函数. 由$A \cap \bar{B} = \varnothing$ 和习题10.1, 我们看到对一切$x \in A$, $f(x) = -d(x, B) < 0$ 成立. 类似地, 对一切$x \in B$, $f(x) > 0$成立. 因此, 两个互不相交的开集$U = f^{-1}((-\infty, 0))$ 和$V = f^{-1}((0, \infty))$ 满足$A \subseteq U$ 和$B \subseteq V$.

习题10.4 证明一个正规空间[1]的闭子集本身是一个正规空间.

解 设C是一个正规空间X的闭子集. 我们认为C是赋予了由X诱导的拓扑. 于是, 假设A 和B是C 的两个互不相交的闭子集. 因为C是闭的, 容易看到A和B也是X的闭子集. 取X的两个开集V_1和W_1满足$A \subseteq V_1$, $B \subseteq W_1$ 而且$V_1 \cap W_1 = \varnothing$. 于是, 如果$V = C \cap V_1$, 而且$W = C \cap W_1$, 那么$V$和$W$是$C$的两个互不相交的开子集, 满足$A \subseteq V$ 和$B \subseteq W$. 这就证得赋予了相对拓扑的C是一个正规空间.

习题10.5 设X是一个正规空间并且A和B是X的两个互不相交的闭子集. 证明存在开集V 和W使得$A \subseteq V$, $B \subseteq W$ 并且$\overline{V} \cap \overline{W} = \varnothing$.

解 假设A和B是正规空间X的两个互不相交的闭子集. 取两个互不相交的开集V和W_1满足$A \subseteq V$ 和$B \subseteq W_1$. 我们断言$\overline{V} \cap W_1 = \varnothing$, 事实上, 若$x \in \overline{V} \cap W_1$, 则一方面$W_1$是$x$的一个邻域, 另一方面, x属于V的闭包, 这可推得$W_1 \cap V \neq \varnothing$, 矛盾.

于是, 因为$\overline{V} \cap B = \varnothing$ 并且X是正规的, 所以存在两个互不相交的开集V_1和W使得$\overline{V} \subseteq V_1$和$B \subseteq W$. 同前面一样, $V_1 \cap \overline{W} = \varnothing$, 并且显然开集$V$和$W$具有所要的性质.

另一解法: 如果函数$f : X \to [0, 1]$ 满足$A \subseteq f^{-1}(\{0\})$ 和$B \subseteq f^{-1}(\{1\})$, 那么开集$V = f^{-1}([0, 1/2))$ 和$W = f^{-1}((3/4, 1])$ 满足$A \subseteq \overline{V}$, $B \subseteq \overline{W}$, 而且$\overline{V} \cap \overline{W} = \varnothing$.

习题10.6 证明一个拓扑空间是正规的当且仅当对每个闭集A和开集V, $A \subseteq V$, 都存在开集W使得$A \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq V$.

解 设X是拓扑空间. 首先假设X是一个正规空间并且设闭集A和开集V满足$A \subseteq V$. 那么$A \cap V^c = \varnothing$ 并且V^c 是闭集. 取两个互不相交的开集W和U使得$A \subseteq W$ 并且$V^c \subseteq U$. 特别是, $\overline{W} \cap U = \varnothing$. 这就推得$\overline{W} \cap V^c = \varnothing$, 从而$\overline{W} \subseteq V$.

反之, 假设条件满足并且设A和B是两个互不相交的非空闭集. 如果$V = B^c$, 那么V^c 是开集并且$A \subseteq V$. 由条件存在一个开集W使得$A \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq V = B^c$. 若$U = \overline{W}^c$, 那么$U$是一个与$W$不相交的开集并且满足$B \subseteq U$. 这说明$X$是一个正规空间.

---

1. 设X是一个拓扑空间, 如果X的任何两个互不相交的闭子集A和B都可以被开集分离, 即, 存在互不相交的开子集U和V使得$A \subseteq U$ 而且$B \subseteq V$, 则称X是正规空间. ——译者注

习题10.7 对一个正规拓扑空间X的闭子集A, 证明下列结论：

(a) 存在一个连续函数$f: X \to [0,1]$ 满足$f^{-1}(\{0\}) = A$ 当且仅当A是一个G_δ集；

(b) 如果A是一个G_δ集并且B是另一个闭子集满足$A \cap B = \varnothing$, 那么存在一个连续函数$g: X \to [0,1]$ 使得$g^{-1}(\{0\}) = A$ 并且对一切$b \in B, g(b) = 1$.

解 设A是一个正规拓扑空间X的闭子集.

(a) 如果存在一个连续函数$f: X \to [0,1]$ 使得$f^{-1}(\{0\}) = A$, 那么恒等式

$$A = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[0, \frac{1}{n}\right)\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{n}\right)\right)$$

说明A是一个G_δ集.

反之, 假设A是一个G_δ集. 取一个开集列$\{V_n\}$ 使得$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$. 因为$A \cap V_n^c = \varnothing$, 所以由Uryson引理可得存在一个连续函数$f_n: X \to [0,1]$ 满足对一切$a \in A, f_n(a) = 0$, 而且对所有的$x \in V_n^c$, $f_n(x) = 1$. 于是, 考虑定义为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$$

的函数$f: X \to [0,1]$, 由Weierstrass M-判别法(定理9.5)和定理9.2, 容易看到f是连续函数, 并且我们断言$f^{-1}(\{0\}) = A$. 显然, 对一切$x \in A, f(x) = 0$. 于是, 假设$f(x) = 0$, 那么对所有的n, $f_n(x) = 0$, 从而(由于对一切$v \in V_n^c, f_n(v) = 1$)对一切n我们有$x \in V_n$, 即, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = A$. 因此, $f^{-1}(\{0\}) = A$.

(b) 现在假设A是一个G_δ集并且B是另一个闭子集使得$A \cap B = \varnothing$. 所以, 存在两个互不相交的开集V和W使得$A \subseteq V$ 而且$B \subseteq W$. 这就推得可以假设(a)中引入的序列$\{V_n\}$ 满足对一切n, $V_n \subseteq V$. 特别是, 每个f_n 满足对一切$b \in B, f_n(b) = 1$. 于是, 容易看到前面构造的函数f满足所要的条件.

习题10.8 证明一个局部紧[1]的Hausdorff拓扑空间中的紧子集A是一个G_δ集, 当且仅当存在一个连续函数$f: X \to [0,1]$ 使得$A = f^{-1}(\{0\})$.

解 若$A = f^{-1}(\{0\})$, 则如上一题(a)中的解答, A是一个G_δ集. 反之, 假设$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, 其中$V_n$ 是开集, 由定理10.8知道, 对一切n存在连续函数$f_n : X \to [0,1]$ 使得, 对一切$x \in A, f_n(x) = 1$, 而且对一切$x \notin V_n$, $f_n(x) = 0$. 于是, 如上一题(a)中的解答, 注意到定义为$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$ 的函数$f: X \to [0,1]$ 具有所要的性质.

习题10.9 一个拓扑空间被称为是完全正规的如果对每一对互不相交的闭集A和B, 存在连续函数$f: X \to [0,1]$ 使得$A = f^{-1}(\{0\})$ 和$B = f^{-1}(\{1\})$. 习题10.2的(b)证得每个度量空间是完全正规的.

证明一个正规的 Hausdorff 拓扑空间是完全正规的当且仅当每个闭集是一个G_δ集.

---

1. 拓扑空间(X, τ) 称为局部紧的, 如果X的每一点都存在一个邻域其闭包是紧集. ——译者注

解 设X是一个正规的Hausdorff拓扑空间. 首先假设X是完全正规的并且设A是X的一个真闭子集. 若$a \in X$ 满足$a \notin A$, 则$A \cap \{a\} \neq \varnothing$ 并且$\{a\}$ 是一个闭集. 因此, 存在一个连续函数$f: X \to [0,1]$ 使得$f^{-1}(\{0\}) = A$. 这可推得(如习题10.7的解答)A是一个G_δ集.

反之, 假设每个闭集是G_δ集. 设A和B是两个互不相交的闭集. 由习题10.7知道存在两个连续函数$g, h: X \to [0,1]$ 使得:

i. $g^{-1}(\{0\}) = A$ 并且对一切$b \in B, g(b) = 1$;

ii. $h^{-1}(\{0\}) = B$ 并且对一切$a \in A, h(a) = 1$. 于是, 设$f = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}(1-h)$, 并且注意到$f: X \to [0,1]$, $A = f^{-1}(\{0\})$ 而且$B = f^{-1}(\{1\})$.

习题10.10 *证明一个非空的连通正规Hausdorff空间*[1]*要么是一个单点集要么是不可数的.*

解 设X是一个(非空的)连通正规Hausdorff空间, 若X不是单点集, 则存在$a, b \in X$ 使得$a \neq b$. 因为X是Hausdorff的, 那么单点集是闭集, 而且我们有$\{a\} \cap \{b\} = \varnothing$. 于是, 取一个连续函数$f: X \to [0,1]$ 使得$f(a) = 0$并且$f(b) = 1$. X是连通的这一条件(根据习题6.11(g))保证了$f(X)$是一个区间, 从而$f(X) = [0,1]$. 由此容易推出X是不可数的——事实上, 它的势不小于连续统的势.

习题10.11 *设X是一个正规空间, C是X的闭子集, 并且I是一个非空区间——有可能$I = (-\infty, \infty)$. 如果$f: C \to I$ 是连续函数, 证明f可以开拓到整个X上并且取值于I中.*

解 假设C是正规空间X的一个闭子集并且$f: X \to I$ 是连续函数, 其中I是一个区间. 区间I一定是下列类型中的一个: $(a,b), [a,b], [a,b), (a,b]$. 所以, 我们分几步来建立$f$的连续开拓.

第 I 步: I形如$[a,b)$ 或$(a,b]$.

在此情形下, 存在一个同胚$h: I \to [0,1)$. 例如, 若$-\infty < a < b < \infty$, 则$h(x) = (b-x)/(b-a)$ 是$(a,b]$ 和$[0,1)$ 之间的同胚. 同样, 若$a \in R$, 则$h(x) = (a-x)/(1+a-x)$ 定义了$(-\infty, a]$ 和$[0,1)$ 之间的同胚.

固定同胚$h: I \to [0,1)$ 并且考虑连续(复合)函数$h \circ f: C \to [0,1) \subseteq [0,1]$. 由定理10.6(Tietze开拓定理)知道, 存在一个连续函数$g: X \to [0,1]$ 使得对所有的$x \in C, g(x) = h(f(x))$. g的连续性保证了集合$A = g^{-1}(\{1\})$ 是X 的闭子集. 另外, 对一切$x \in C$, 我们有$g(x) = h(f(x)) \in [0,1)$, 由此可见$C \cap A = \varnothing$. 由Uryson引理知道, 存在连续函数$\theta: X \to [0,1]$ 使得对一切$a \in A, \theta(a) = 0$, 并且对一切$c \in C, \theta(c) = 1$.

于是, 考虑定义为$\phi(x) = \theta(x)g(x)$ 的函数$\phi: X \to [0,1]$. 我们断言$\phi(X) \subseteq [0,1)$. 为此, 设$x \in X$. 若$x \in A$, 则$\phi(x) = \theta(x)g(x) = 0 \cdot 1 = 0$, 若$x \notin A$, 则$0 \leqslant g(x) < 1$ 从而$\phi(x) = \theta(x)g(x) < 1$ 也正确.

其次, 定义函数$\hat{f}: X \to I$ 为

$$\hat{f}(x) = (h^{-1} \circ \phi)(x) = h^{-1}(\theta(x)g(x)).$$

1. 原书中少了Hausdorff这一条件. ——译者注

若$x \in C$, 则$\theta(x)g(x) = g(x) = h(f(x))$, 因此,

$$\hat{f}(x) = h^{-1}(h(f(x))) = f(x).$$

这就证得$\hat{f} : X \to I$ 是f到整个X上的连续开拓.

第 II 步: $I = [a, b]$并且$-\infty < a < b < \infty$.

由$h(x) = (x - a)/(b - a)$ 定义的函数$h : [a, b] \to [0, 1]$ 是一个同胚. 由Tietze开拓定理知道, 存在一个连续函数$g : X \to [0, 1]$ 使得对一切$x \in C$, $g(x) = (h \circ f)(x)$. 那么连续函数$\hat{f} = h^{-1} \circ g : X \to [a, b]$ 满足对一切$c \in C$, $\hat{f}(c) = f(c)$.

第 III 步: 假设$I = (a, b)$并且$-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$.

在这种情形下, 存在同胚$h : (a, b) \to (-1, 1)$. (例如, 对$-\infty < a < b < \infty$, 设$h(x) = \frac{2(x-a)}{b-a} - 1$, 而对$(a, b) = (-\infty, \infty)$ 取$h(x) = \frac{2}{\pi}\arctan x$.)于是, 考虑连续函数$h \circ f : C \to (-1, 1) \subseteq [-1, 1]$ 并且由第II步注意到存在连续函数$g : X \to [-1, 1]$ 满足对一切$c \in C$, $g(c) = (h \circ f)(c)$.

其次, 设$B = g^{-1}(\{-1, 1\})$, 那么B是一个闭集而且$B \cap C = \varnothing$. 由Uryson引理知道, 存在连续函数$\theta : X \to [0, 1]$ 满足对一切$b \in B, \theta(b) = 0$, 而且对一切$c \in C, \theta(c) = 1$. 同前面一样, 定义连续函数$\phi : X \to [-1, 1]$ 为$\phi(x) = \theta(x)g(x)$. 那么容易看出$\phi(X) \subseteq (-1, 1)$ 并且由$\hat{f} = h^{-1} \circ \phi$ 定义的函数$f : X \to (a, b)$ 就是f的连续开拓.

11. Stone-Weierstrass逼近定理

习题11.1 设X是一个紧拓扑空间, 对$C(X)$的一个子集L, 设$\bar{L}$ 表示L在$C(X)$中的一致闭包.证明如下结论:

(a) 若L是一个函数空间, 则$\bar{L}$ 也是;

(b) 若L是一个代数[1], 则$\bar{L}$ 也是.

解 设$f, g \in \bar{L}$. 取L 的两个序列$\{f_n\}$ 和$\{g_n\}$, 它们分别一致收敛于f和g. 另外, 取某个$M > 0$, 使得对所有的n, $||f_n||_\infty \leqslant M$ 和$||g_n||_\infty \leqslant M$ 都成立.

(a) 不等式$||f_n| - |f|| \leqslant |f_n - f|$, 说明$\{|f_n|\}$ 一致收敛于$|f|$. 因为对一切n, $|f_n| \in L$, 所以$|f| \in \bar{L}$. 这就推出$\bar{L}$ 是一个函数空间.

(b) 由不等式

$$\begin{aligned} ||f_n g_n - fg||_\infty &\leqslant ||g||_\infty \cdot ||f_n - f||_\infty + ||f_n||_\infty \cdot ||g_n - g||_\infty \\ &\leqslant M(||f_n - f||_\infty + ||g_n - g||_\infty), \end{aligned}$$

可得L的序列$\{f_n g_n\}$ 一致收敛于fg. 因此, $fg \in \bar{L}$, 从而$\bar{L}$ 是一个代数.

1. 定义在集合X上的实值函数的向量空间A称为一个**代数**, 如果A中任何两个函数的乘积仍然在A中.
——译者注

习题11.2 设L是定义在[0,1]上逐段线性的连续函数全体. 即, $f \in L$ 当且仅当$f \in C[0,1]$ 并且存在有限个点$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ (依赖于f)使得f在每个区间$[x_{m-1}, x_m]$ 上是线性的. 证明L是一个函数空间但不是代数. 而且, 证明L在$C[0,1]$中关于一致度量是稠密的.

解 L是函数空间的证明是常规的. 因为$f(x) = x$满足$f \in L$ 而且$f^2 \notin L$, 由此可知L不是一个代数.

为了看出L是稠密的, 设$f \in C[0,1]$ 并且$\varepsilon > 0$. 由f的一致连续性知道, 存在某个$\delta > 0$ 使得当$|x-y| < \delta$ 时$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, 设$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ 是使得对一切$1 \leqslant i \leqslant n$, $x_i - x_{i-1} < \delta$ 的有限点集. 在每个区间$[x_{i-1}, x_i]$ 上定义为

$$g(t) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(t - x_{i-1})$$

的函数g属于L并且满足$\|f-g\|_\infty < \varepsilon$.

证明L的稠密性的另一种方法如下: 注意到 $\mathbf{1} \in L$ 并且L分离[0,1]中的点[1](为什么?). 因此, 由定理11.3(Stone-Weierstrass定理)知道L在$C[0,1]$中是稠密的.

习题11.3 证明一个连续函数$f:(0,1) \to \mathbb{R}$ 是多项式序列在(0, 1)上的一致极限当且仅当它可以连续开拓到[0, 1]上.

解 设$f:(0,1) \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数. 首先假设f有一个到[0, 1]上的连续开拓——我们用$\hat{f}$ 表示它. 那么, 由推论11.6知道, $\hat{f}$ 是多项式序列在[0, 1]上的一致极限. 因此$f:(0,1) \to \mathbb{R}$ 也是多项式序列在(0, 1)上的一致极限.

反之, 假设存在一个多项式序列$\{p_n\}$ 在(0, 1)上一致收敛于f, 设$\varepsilon > 0$, 然后取某个n_0使得对所有$x \in (0,1)$ 和$n \geqslant n_0$, $|p_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. 由三角不等式我们看到, 对所有的$x \in (0,1)$ 和$n, m \geqslant n_0$,

$$|p_n(x) - p_m(x)| \leqslant |p_n(x) - f(x)| + |p_m(x) - f(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

成立. 由连续性, 我们得到, 对所有的$x \in [0,1]$ 和$n, m \geqslant n_0$,

$$|p_n(x) - p_m(x)| \leqslant 2\varepsilon$$

成立. 这说明$\{p_n\}$ 是$C[0,1]$的一个Cauchy序列, 从而(由定理9.3)序列$\{p_n\}$ 在$C[0,1]$中一致收敛, 比如说收敛于$g \in C[0,1]$. 由此可得, 对所有的$x \in (0,1)$, $f(x) = g(x)$, 从而g是$f:(0,1) \to \mathbb{R}$ 到[0, 1]上的一个连续开拓.

习题11.4 如果[0, 1]上的连续函数f满足, 对$n = 0, 1, \cdots$, $\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$, 证明对所有的$x \in (0,1)$, $f(x) = 0$.

解 由推论11.6知道, 存在多项式序列$\{p_n\}$ 一致收敛于f, 容易得到$\{p_n f\}$ 也一致收敛于f^2, 并且由题设我们看到, 对一切n, $\int_0^1 p_n(x) f(x)\mathrm{d}x = 0$ 成立. 于是, 应用习题9.16可得$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \lim \int_0^1 p_n(x) f(x)\mathrm{d}x = 0$. 由此容易推出对一切$x \in [0,1]$, $f(x) = 0$.

---

1. 定义在集合 X 上的实值函数全体 L 称为分离 X 中的点, 如果对 X 的任何两个不同的点 x 和 y 都存在一个函数$f \in L$ 使得$f(x) \neq f(y)$. ——译者注

习题11.5　证明由集合$\{1,x^2\}$生成的代数在$C[0,1]$中稠密但在$C[-1,1]$中不稠密.

解　因为函数$f(x)=x^2$分离$[0,1]$中的点, 所以由$\{1,x^2\}$生成的代数也分离$[0,1]$中的点. 因此, 由定理11.5知, 该代数在$C[0,1]$中一定稠密.

为了看出由$\{1,x^2\}$生成的代数在$C[-1,1]$中不稠密, 注意到对该代数闭包中的每个f, 我们有$f(-1)=f(1)$. 因此, 该代数在$C[-1,1]$中不稠密.

习题11.6　我们称一个多项式是奇的(偶的)只要它不含任何偶次(奇次)单项式.

证明一个连续函数$f:[0,1]\to\mathbb{R}$在零处等于零(即$f(0)=0$)当且仅当它是奇多项式序列在$[0,1]$上的一致极限.

解　如果f是一个奇多项式序列的一致极限, 那么显然f在零处等于零. 反之, 假设$f\in C[0,1]$满足$f(0)=0$并且设$\varepsilon>0$. 定义函数$g:[-1,1]\to\mathbb{R}$为

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ -f(-x), & -1\leqslant x<0\end{cases}$$

并且注意到$g\in C[-1,1]$. 由Stone-Weierstrass定理知道存在一个多项式p使得对一切$x\in[-1,1]$, $|g(x)-p(x)|<\varepsilon$.

其次, 记$p=q+r$, 其中q是由p的所有奇次项的和构成的奇多项式而r是由p的所有偶次项(包括常数项)的和构成的偶多项式. 尤其, 注意到对一切x,$q(-x)=-q(x)$和$r(-x)=r(x)$成立. 因此, 当$0\leqslant x\leqslant 1$时, 那么

$$|f(x)-q(x)-r(x)|=|g(x)-p(x)|<\varepsilon,$$

和$g(-x)=-f(x)$可以推出

$$|f(x)-q(x)+r(x)|=|p(-x)-g(-x)|<\varepsilon.$$

由此可得$|f(x)-q(x)|<\varepsilon$.(这里我们利用了初等性质：如果$|a+b|<\varepsilon$而且$|a-b|<\varepsilon$, 那么$|a|=\left|\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right|\leqslant\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|<\varepsilon$而且$|b|<\varepsilon$.)换句话说, 奇多项式$q$在$[0,1]$上是$\varepsilon$-一致近似于$f$, 并由此得到所要的结论.

习题11.7　如果$f:[0,1]\to\mathbb{R}$是使得$\int_0^1 f(\sqrt[2n+1]{x})\mathrm{d}x=0$, 对$n=0,1,2,\cdots$都成立的连续函数, 证明对所有$x\in[0,1]$, $f(x)=0$.如果用区间$[-1,1]$代替区间$[0,1]$, 同样的结论正确吗?

解　假设连续函数$f\in C[0,1]$满足, 对一切$n=0,1,2,\cdots$, $\int_0^1 f(\sqrt[2n+1]{x})\mathrm{d}x=0$. 那么由变量替换$u=\sqrt[2n+1]{x}$(或者$x=u^{2n+1}$)可得

$$\int_0^1 f(\sqrt[2n+1]{x})\mathrm{d}x=(2n+1)\int_0^1 u^{2n}f(u)\mathrm{d}u=0,$$

从而对所有的$n=0,1,2,\cdots$, $\int_0^1 x^{2n}f(x)\mathrm{d}x=0$成立, 于是由习题11.5立刻得到结论.

如果我们用区间$[-1,1]$代替区间$[0,1]$, 那么结论不正确. 例如, 对所有的$x\in[-1,1]$, $f(x)=x$, 注意到对所有的$n=0,1,2,\cdots$, $\int_{-1}^1 f(\sqrt[2n+1]{x})\mathrm{d}x=0$成立.

习题11.8 假设函数$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 要么是多项式要么是连续的有界函数. 证明f恒等于零(即,证明$f=0$)当且仅当对所有的$n=1,2,3,\cdots$ $\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x=0$.

解 设$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是连续的有界函数, 若$f=0$, 则$\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x=0$ 显然对所有的$n=1,2,3,\cdots$ 成立.

反之, 假设对所有的$n=1,2,3,\cdots$

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x=0 \qquad (\bigstar)$$

成立. 由变量替换$u=\mathrm{e}^{-x}$, 从($\bigstar$)可得

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x=\int_{0+}^1 f(-\ln u)u^{n-1}\mathrm{d}u=0,n=1,2,\cdots. \qquad (\bigstar\bigstar)$$

特别是, 对一切$n=0,1,\cdots$, $\int_{0+}^1 g(u)u^n\mathrm{d}u=0$ 成立, 其中$g(u)=uf(-\ln u)$. 因为f是有界的, 注意到$\lim_{u\to 0+}g(u)=0$ 成立, 从而g定义了[0, 1]上的一个连续函数. 由($\bigstar\bigstar$), 我们看到对所有的$n=0,1,2,\cdots$, $\int_0^1 g(x)x^n\mathrm{d}x=0$ 成立. 习题11.4可推得$g=0$, 因此$f=0$.

仔细观察上面的推理过程发现我们其实证明了如下结果.

- 假设$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是使得对所有的$n=k,k+1,k+2,\cdots$

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x=0$$

成立的连续函数, 其中k是正整数. 如果对某个自然数m有$\lim_{u\to 0+}u^m f(-\ln u)=0$, 那么函数$f$恒等于零.

事实上, 在($\bigstar\bigstar$)中用$n+k+m+1$代替n, 我们得到

$$\int_{0+}^1 u^{m+k}f(-\ln u)u^n\mathrm{d}u=0,n=0,1,2,\cdots,$$

由此可得(同上面一样)$f=0$. 读者容易证得函数f如果对某个$C>0$, $\alpha>0$ 和所有的$x\geqslant x_0$ 满足$|f(x)|\leqslant C\mathrm{e}^{\alpha x}$, 那么对某个自然$m$它也满足$\lim_{u\to 0+}u^m f(-\ln u)=0$. 特别是, 读者应该注意到每个多项式$p$ 满足形如$|p(x)|\leqslant C\mathrm{e}^{\alpha x}$ 的估计.

关于上面讨论的问题还有进一步的说明. 回想起如果$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是一个"好"函数, 那么公式

$$\mathcal{L}(f)(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t$$

称为f的Laplace变换. Laplace变换是一个线性算子并且在许多应用领域起着重要的作用. 读者应该注意到其实性质(•)表明了Laplace变换定义在一个恰当的函数的线性空间上是一个一对一的算子.(也可参见教材中第5章第30节的例题.)

习题11.9 证明连续有界的函数$f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$恒等于零当且仅当对一切$n=8,9,10,\cdots$, $\int_1^\infty x^{-n}f(x)\mathrm{d}x=0$.

解 只需证明充分性. 因此, 假设函数$f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足对一切$n=8,9,10,\cdots$, $\int_1^\infty x^{-n}f(x)\mathrm{d}x=0$. 利用变量替换$u=x^{-1}$, 我们看到

$$\int_1^\infty x^{-n}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0^+}^1 u^{n-2}f(\frac{1}{u})\mathrm{d}u=\int_{0^+}^1 u^{n-8}g(u)\mathrm{d}u=0, \qquad (\bigstar\bigstar\bigstar)$$

其中$g(u)=u^6f(1/u)$. 因为f是有界的, 我们看到$\lim_{u\to 0^+}g(u)=0$, 从而g定义了[0, 1]上的一个连续函数. 另外, 由($\bigstar\bigstar\bigstar$), 我们看到对一切$n=0,1,2,\cdots$, $\int_0^1 x^n g(x)\mathrm{d}x=0$ 成立. 由习题11.4, 可得$g=0$, 因此, $f=0$.

习题11.10 *设$\mathcal{A}$是由定义在紧拓扑空间X上并且分离X中的点的连续实值函数构成的代数. 证明$\mathcal{A}$在$C(X)$中关于一致度量的闭包$\overline{\mathcal{A}}$要么是$C(X)$的全体要么存在$a\in X$使得$\overline{\mathcal{A}}=\{f\in C(X):f(a)=0\}$.*

解 设$\mathcal{A}\subseteq C(X)$是一个代数, 其中$X$是紧的. 于是考虑在[0, 1]上由
$P_1(x)=0, P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac{1}{2}[x-(P_n(x))^2]$, $n=1,2,\cdots$,
定义的多项式序列$\{P_n(x)\}$. 由归纳法容易证得每个$P_n(x)$的常数项等于零. 这就保证了若$f\in\overline{\mathcal{A}}$, 那么对一切$n$, $P_n(f)$[1] $\in\overline{\mathcal{A}}$. 另外, 由引理11.4, 我们知道序列$\{P_n(x)\}$在[0, 1]上一致收敛于$\sqrt{x}$.[2]
因此, 如果$f\in\overline{\mathcal{A}}$是非零的, 那么记$c=\|f\|_\infty$, 并且注意到:

(1) 序列$\left\{P_n\left(\frac{f^2}{c^2}\right)\right\}\subseteq\overline{\mathcal{A}}$一致收敛于$\frac{|f|}{c}$. 因此$|f|\in\overline{\mathcal{A}}$;

(2) 因为$\left\{P_n\left(\frac{|f|}{c}\right)\right\}\subseteq\overline{\mathcal{A}}$一致收敛于$\sqrt{\frac{|f|}{c}}$, 所以我们看到$\sqrt{\frac{|f|}{c}}\in\overline{\mathcal{A}}$.

因此, 如果$f\in\overline{\mathcal{A}}$, 那么$|f|$和$\sqrt{|f|}$都属于$\overline{\mathcal{A}}$. 特别是, $\overline{\mathcal{A}}$是一个代数而且是一个函数空间.

于是, 假设$\overline{\mathcal{A}}$不是对某个$a\in X$具有形式$\{f\in C(X):f(a)=0\}$. 这就得到对一切$x\in X$, 存在某个$f\in\overline{\mathcal{A}}$使得$f(x)\neq 0$. 因此, 对一切$x\in X$, 存在某个$f_x\in\overline{\mathcal{A}}$和$x$的一个邻域$V_x$使得对所有的$y\in V_x$, $f_x(y)\neq 0$. 由X的紧性, 存在$x_1,\ldots,x_n\in X$使得$X=\bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. 注意到$\overline{\mathcal{A}}$中的函数$g=f_{x_1}^2+\cdots+f_{x_n}^2$满足对一切$x\in X$, $g(x)>0$. 乘以适当的常数, 我们可以假设对所有的$x\in X$, $g(x)>1$. 记$h_n=\sqrt[2^n]{g}$, 并且注意到$h_n\in\overline{\mathcal{A}}$而且对一切$x\in X$, $h_n(x)\downarrow 1$. 由定理9.4(Dini定理), $\{h_n\}$一致收敛于常数函数**1**, 从而$\mathbf{1}\in\overline{\mathcal{A}}$. 于是, 定理11.5保证了$\overline{\mathcal{A}}=C(X)$一定成立.

习题11.11 *设$\mathcal{A}$是由定义在[0, 1]上的函数*

$$\mathbf{1},\sin x,\sin^2 x,\sin^3 x,\cdots$$

生成的一个向量空间. 即, $f\in\mathcal{A}$当且仅当存在一个非负整数k和实数$\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_k$(都依赖于$f$)使得对一切$x\in[0,1]$, $f(x)=\sum_{n=0}^k\alpha_n\sin^n x$. 证明$\mathcal{A}$是一个代数并且$\mathcal{A}$在$C[0,1]$中关于一致度量稠密.

解 显然, $\mathcal{A}$是一个包含常数函数**1**的代数. 而且, 因为函数$f(x)=\sin x$分离[0, 1]的点, 所以$\mathcal{A}$也分离[0, 1]的点. 由Stone-Weierstrass定理, $\mathcal{A}$在$C[0, 1]$中稠密.

---

1. $P_n(f)$是多项式$P_n(x)$中用f代替x所得到的函数. ——译者注
2. 引理11.4的证明过程中构造的多项式序列就是本题中的$P_n(x)$. ——译者注

习题11.12 设X是$\mathbb{R}$ 的一个紧子集. 证明$C(X)$ 是一个可分的度量空间(关于一致度量).

解 有理函数的多项式全体构成了一个可数集(为什么?). 由推论11.6可知该集合在$C(X)$中稠密.

习题11.13 将上一题一般化如下: 证明如果(X,d)是一个紧度量空间, 那么$C(X)$是一个可分的度量空间.

解 由习题7.2, 我们知道X是一个可分的度量空间. 固定X的一个可数稠密子集$\{x_1,x_2,\cdots\}$并且对一切n设$f_n: X\to\mathbb{R}$是由$f_n(t)=d(t,x_n), t\in X$ 定义的函数.

于是, 设$x,y\in X$ 满足$x\neq y$. 记$d(x,y)=2\delta>0$. 取某个n使得$d(x,x_n)<\delta$, 并且注意到

$$f_n(y)=d(y,x_n)\geqslant d(x,y)-d(x,x_n)\geqslant 2\delta-\delta=\delta>d(x,x_n)=f_n(x),$$

从而$f_n(x)\neq f_n(y)$. 这就推得由$\{\mathbf{1},f_1,f_2,\cdots\}$ 生成的代数分离X的点. 由Stone-Weierstrass定理(定理11.5), 该代数在$C(X)$中稠密.

其次, 考虑由可数个全体$\{\mathbf{1},f_1,f_2,\cdots\}$ 中所有有限个乘积构成的集合$\mathcal{C}$并且注意到$\mathcal{C}$是一个可数集, 比如说$\mathcal{C}=\{g_1,g_2,\cdots\}$. 为了完成证明, 注意到$\{\mathbf{1},g_1,g_2,\cdots\}$ 的有理函数的有限线性组合形成了$C(X)$的一个可数稠密子集.

习题11.14 设X和Y是两个紧度量空间. 考虑赋予了习题7.4中距离D_1的Cartesian乘积$X\times Y$, 因此$X\times Y$ 是一个紧度量空间. 证明如果$f\in C(X\times Y)$ 并且$\varepsilon>0$, 那么存在函数$\{f_1,\cdots,f_n\}\subseteq C(X)$ 和$\{g_1,\cdots,g_n\}\subseteq C(Y)$ 使得对所有的$(x,y)\in X\times Y$,

$$\left|f(x,y)-\sum_{i=1}^{n}f_i(x)g_i(y)\right|<\varepsilon$$

成立.

解 考虑集合

$$\mathcal{A}=\left\{h\in C(X\times Y):\exists\{f_1,\cdots,f_n\}\subseteq C(X),\{g_1,\cdots,g_n\}\subseteq C(Y)\text{使得}\right.$$
$$\left.h(x,y)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)g_i(y)\forall(x,y)\in X\times Y\right\}.$$

那么, $\mathcal{A}$是$C(X\times Y)$ 的一个代数并且$\mathbf{1}\in\mathcal{A}$. 另一方面, 如果 $(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$, 那么要么 $x_1\neq x_2$, 要么$y_1\neq y_2$. 如果$x_1\neq x_2$, 则取某个$f\in C(X)$ 使得$f(x_1)\neq f(x_2)$, 并且对所有的 $(x,y)\in X\times Y$ 设$F(x,y)=f(x)$. 如果$y_1\neq y_2$, 则取某个$g\in C(Y)$ 使得$g(y_1)\neq g(y_2)$, 并且记$F(x,y)=g(y)$. 任何一种情形下, $F\in\mathcal{A}$ 并且$F(x_1,y_1)\neq F(x_2,y_2)$ 成立, 所以 $\mathcal{A}$ 分离$X\times Y$ 的点. 于是由 Stone-Weierstrass 定理(定理11.5), 我们有$\overline{\mathcal{A}}=C(X\times Y)$, 并由此得到所要的结论.

第3章　测　度　论

12. 集的半环和代数

习题12.1　如果X是一个拓扑空间, 证明集合

$\mathcal{S}=\{C\cap O: C$ 是闭的并且O是开的$\}=\{C_1\backslash C_2: C_1, C_2$ 是闭集$\}$是X的一个子集半环[1].

解　由$\varnothing=\varnothing\cap\varnothing$ 和$X=X\cap X$, 我们看到$\varnothing, X\in\mathcal{S}$. 其次, 注意到$C_1\cap O_1$, $C_2\cap O_2\in\mathcal{S}$可推得

$$(C_1\cap O_1)\cap(C_2\cap O_2)=(C_1\cap C_2)\cap(O_1\cap O_2)\in\mathcal{S}.$$

于是, 如果$C_1\cap O_1, C_2\cap O_2\in\mathcal{S}$, 那么

$$\begin{aligned}C_1\cap O_1\backslash C_2\cap O_2&=(C_1\cap O_1)\cap(C_2\cap O_2)^{c}\\&=(C_1\cap O_1)\cap(C_2^{c}\cup O_2^{c})\\&=(C_1\cap O_1)\cap[C_2^{c}\cup(O_2^{c}\cap C_2)]\\&=[C_1\cap(O_1\cap C_2^{c})]\cup[(C_1\cap C_2\cap O_2^{c})\cap O_1]\\&=A\cup B,\end{aligned}$$

其中$A=C_1\cap(O_1\cap C_2^{c})\in\mathcal{S}$ 和$B=(C_1\cap C_2\cap O_2^{c})\cap O_1\in\mathcal{S}$ 满足$A\cap B=\varnothing$.

习题12.2　设$\mathcal{S}$是集合X的一个子集半环, 并且设$Y\subseteq X$. 证明$\mathcal{S}_Y=\{Y\cap A: A\in\mathcal{S}\}$ 是Y的一个半环(称为$\mathcal{S}$到Y上的**限制半环**).

解　由下列恒等式可得结论:

(a) $Y\cap\varnothing=\varnothing$;

(b) $(Y\cap A)\cap(Y\cap B)=Y\cap(A\cap B)$;

(c) $Y\cap A\backslash Y\cap B=Y\cap(A\backslash B)$.

习题12.3　设$\mathcal{S}$是$[0, 1)$的子集A的全体, 其中A可以表示成有限个形如$[a,b)$ 的子集的并. 证

---

1. 设X是一个非空集合, X的一个子集族$\mathcal{S}$称为一个半环如果它满足下列性质:

(1) $\varnothing\in\mathcal{S}$;

(2) 若$A,B\in\mathcal{S}$, 则$A\cap B\in\mathcal{S}$;

(3) $\mathcal{S}$中任何两个集合的差可以表示成$\mathcal{S}$中有限个互不相交集合的并.　　——译者注

明$\mathcal{S}$是一个集合代数[1]但不是一个σ 代数[2].

解 设$A=\bigcup_{i=1}^n[a_i,b_i)$ 并且$B=\bigcup_{j=1}^m[c_j,d_j)$. 那么我们有

(a) $A\cup B\in\mathcal{S}$;

(b) $A\cap B=\bigcup_{i=1}^n\bigcup_{j=1}^m[a_i,b_i)\cap[c_j,d_j)\in\mathcal{S}$;

(c) $[0,1)\backslash A=\bigcap_{i=1}^n([0,1)\backslash[a_i,b_i))\in\mathcal{S}$ ，其中最后一步成立, 是由于每个$[0,1)\backslash[a_i,b_i)$ 都可以表示成有限个形如$[a,b)$ 的子集并.

注意到$\bigcap_{n=1}^\infty[0,1/n)=\{0\}\notin\mathcal{S}$. 可看出$\mathcal{S}$不是一个$\sigma$ 代数.

习题12.4 证明半环

$$\mathcal{S}=\{[a,b):a,b\in\mathbb{R}\}$$

的σ 集[3] 全体构成了实数集的一个拓扑.

解 设τ 是$\mathcal{S}$的所有σ 集构成的集合. 显然, $\varnothing\in\tau$ 而且$\mathbb{R}=\bigcup_{n=1}^\infty[-n,n)\in\tau$. 又显然, τ 在有限交下是封闭的. 因此, 为了证明τ 是一个拓扑, 我们必须证明τ 在任意并下是封闭的. 即, 如果$\{[a_i,b_i):i\in I\}$ 是$\mathcal{S}$中元素构成的一个非空集合, 那么我们一定要证明$A=\bigcup_{i\in I}[a_i,b_i)$ 属于τ (即, A是一个σ 集).

为了看出这一点, 设$V=\bigcup_{i\in I}(a_i,b_i)$.那么$V$是一个开集, 因此, 存在至多可数个两两不相交的开区间构成的族$\{(c_j,d_j):j\in J\}$ (参见习题6.11中的(g))使得$V=\bigcup_{j\in J}(c_j,d_j)$. 对每个$j\in J$, 若对某个$i\in I$, $c_j=a_i$, 则设$A_j=[c_j,d_j)$, 若对所有的$i\in I$, $c_j\neq a_i$, 则设$A_j=(c_j,d_j)$. 显然, 每个A_j是一个σ 集. 而且, 容易看到$A=\bigcup_{j\in J}A_j$ 成立, 这就证得A是一个σ集.

习题12.5 设$\mathcal{S}$是非空集合X的一个子集半环. 要使得$\mathcal{S}$成为X上的一组拓扑基应该加上什么条件?(参见习题8.18中基的定义). 证明一旦如此, $\mathcal{S}$的每个元素在该拓扑中既是开的又是闭的.

解 因为在有限交下$\mathcal{S}$已经是封闭的, 所以由基的定义可得$\mathcal{S}$是一组基当且仅当$\bigcup_{A\in\mathcal{S}}A=X$.

现在, 假设$\bigcup_{A\in\mathcal{S}}A=X$ 成立. 首先注意到如果$A,B\in\mathcal{S}$, 那么(因为$\mathcal{S}$是一个半环)$A\backslash B$可以表示成$\mathcal{S}$中(不相交)元素的有限并. 由此可得$A\backslash B$ 属于由$\mathcal{S}$生成的拓扑. 因此, 若$B\in\mathcal{S}$, 那么关系式

$$B^c=X\backslash B=\left(\bigcup_{A\in\mathcal{S}}A\right)\backslash B=\bigcup_{A\in\mathcal{S}}(A\backslash B),$$

说明B^c属于由$\mathcal{S}$生成的拓扑. 即, 在此情形下, $B\in\mathcal{S}$ 是开集而且是闭集.

习题12.6 设A是集合X的一个固定子集. 确定X的由

(a) $\{A\}$;

---

1. 设$\mathcal{S}$是集合X的一个子集族, 如果$\mathcal{S}$在有限交和余集运算下是封闭的, 则称$\mathcal{S}$是X的一个集合代数.
——译者注

2. 设$\mathcal{S}$是集合X的一个集合代数, 如果$\mathcal{S}$在可列并运算下是封闭的, 则称$\mathcal{S}$是X的一个σ 代数.
——译者注

3. 设$\mathcal{S}$ 是集合X 的一个半环, A 是X 的一个子集, 如果存在$\mathcal{S}$ 中互不相交的集列$\{A_n\}$ 使得$A=\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ 成立, 则称A 是一个(关于$\mathcal{S}$ 的) σ 集. ——译者注

(b) $\{B : A \subseteq B \subseteq X\}$

生成的两个σ 代数.

解 (a) $\{\varnothing, A, A^c, X\}$; (b)$\{B : A \subseteq B$ 或 $A \subseteq B^c\}$.

习题12.7 设X 是一个不可数集, 并且设

$$\mathcal{S} = \{E \subseteq X : E\text{或}E^c\text{是至多可数的}\}.$$

证明$\mathcal{S}$是由X的单点集生成的σ 代数.

解 显然, $\mathcal{S}$包含X的单点集, 并且$\mathcal{S}$的每个元素一定是由X的单点集生成的σ 代数的元素. 因此, 仍然要证$\mathcal{S}$是一个σ 代数.

显然, $\varnothing, X \in \mathcal{S}$ 并且在余集运算下$\mathcal{S}$是封闭的. 设$\{A_n\} \subseteq \mathcal{S}$. 如果每个A_n是至多可数的, 那么$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是至多可数的, 因此$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$. 另一方面, 如果某个A_k 是不可数的, 那么$(A_k)^c$ 是至多可数的并且包含关系$(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c \subseteq (A_k)^c$ 说明$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$.

习题12.8 刻画开集构成σ 代数的度量空间.

解 我们将证明度量空间X的开集构成一个σ代数当且仅当X是离散度量空间(即, 当且仅当X的每个子集是开集).

设τ 是所有开集全体. 若$\tau = \mathcal{P}(X)$, 那么显然τ 是一个σ 代数. 另一方面, 若τ 是一个σ 代数并且$x \in X$, 那么$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x, 1/n)$ 说明$\{x\}$ 是一个开集. 由此容易推得X的每个子集是开的(即, $\tau = \mathcal{P}(X)$ 成立).

习题12.9 确定由拓扑空间的无处稠密子集生成的σ 代数.

解 设X是拓扑空间. 定义

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A\text{是贫集或}A^c\text{是贫集}\}.$$

回想起一个集合叫做贫集, 如果它可以表示成无处稠密集的可数并——集合A叫做无处稠密的, 如果$(\overline{A})^\circ = \varnothing$. 我们断言$\mathcal{A}$是由X的无处稠密集生成的σ 代数. 显然, 每个无处稠密集属于$\mathcal{A}$, 而且$\mathcal{A}$的每个元素属于由无处稠密集生成的σ 代数. 所以, 只要证明$\mathcal{A}$是一个集合的σ 代数.

显然, $\varnothing, X \in \mathcal{A}$. 而且, 在余集运算下$\mathcal{A}$显然是封闭的. 于是, 设$\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$. 如果每个A_n是贫集, 那么显然$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. 另一方面, 如果对某个k, $(A_k)^c$ 是贫集, 那么集合的包含关系$(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c \subseteq (A_k)^c$ 推得$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. 因此, $\mathcal{A}$是一个σ 代数.

习题12.10 设X是非空集合, 并且设$\mathcal{F}$是X的子集构成的不可数族. 证明由$\mathcal{F}$生成的σ 代数的任何元素属于由$\mathcal{F}$的某可数子族生成的σ 代数.

解 假设$\mathcal{F}$是不可数的. 设$\mathcal{A}$是由$\mathcal{F}$生成的σ 代数. 用$\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ 表示所有这样的σ 代数族, 每个$\mathcal{A}_i$都是由$\mathcal{F}$的可数子族生成的σ代数, 只要证明$\mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ 是一个σ 代数(因为这时候$\mathcal{A} = \mathcal{B}$ 一定成立, 由此可得结论).

显然, $\varnothing \in \mathcal{B}$, 而且, 如果$A \in \mathcal{B}$, 那么容易看到$A^c \in \mathcal{B}$ 也成立. 于是, 设$\{A_n\} \subseteq \mathcal{B}$. 因为每个A_n属于一个由$\mathcal{F}$的可数子族生成的σ 代数, 所以容易得到某个$i \in I$ 使得$\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}_i$. 因此, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{B}$. 即, $\mathcal{B}$是一个σ 代数, 这就是所要证的.

习题12.11 证明拓扑空间的每个F_σ 集和G_δ 集都是Borel集[1].

解 Borel集是由开集生成的σ 代数中的元素. 所以, 开集的可数交(或闭集的可数并)总是Borel 集.

习题12.12 证明每个无穷σ 代数都含有不可数个集合.

解 设$\mathcal{A}$是集合X的无穷σ 代数. 如果$\mathcal{A}$含有两两互不相交的非空序列$\{A_n\}$, 那么$\mathcal{A}$含有不可数个元素. 事实上, 这时, 对每个自然数构成的子集s, 设$A_s = \bigcup_{n \in s} A_n \in \mathcal{A}$, 并且注意到当$s \neq t$时, $A_s \neq A_t$. 由习题5.6, 集合$\{A_s : s \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ 有不可数个元素, 从而$\mathcal{A}$也一定有不可数个元素.

接下来, 我们将证明存在一个序列$\{B_n\} \subseteq \mathcal{A}$ 使得对所有的n, $B_{n+1} \subseteq B_n$, 并且$B_{n+1} \neq B_n$. 如果这能做得到, 那么设$A_n = B_n \backslash B_{n+1}$, 并且利用上面的推断可以看到$\mathcal{A}$是一个不可数集.

由归纳法, 我们将证明存在一个序列$\{B_n\}$ 使得:

1. 对所有的$n, B_{n+1} \subseteq B_n$ 并且$B_{n+1} \neq B_n$, 而且
2. $\{B_n \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ 是一个无限集.

归纳法的基本步骤如下: 假设$B_n \in \mathcal{A}$ 已经被取得使$\{B_n \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ 有无穷多个元素. 取$C \in \mathcal{A}$ 使得$\varnothing \subsetneq B_n \cap C \subsetneq B_n$ 的两端是真包含关系. 由

$$B_n \cap A = [(B_n \cap C) \cap A] \cup [(B_n \backslash C) \cap A],$$

我们看到要么$\{(B_n \cap C) \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ 是无限的, 要么$\{(B_n \backslash C) \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ 是无限的. 如果$\{(B_n \cap C) \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ 是无限的, 设$B_{n+1} = B_n \cap C$. 如果$\{(B_n \cap C) \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ 是无限的, 设$B_{n+1} = B_n \backslash C$.

从$B_1 = X$开始进行归纳法.

习题12.13 设(X, τ) 是拓扑空间, 设$\mathcal{B}$是它的Borel集构成的σ 代数, 并且设Y是X的任意子集. 如果Y被赋予了限制拓扑并且用$\mathcal{B}_Y$表示(Y, τ) 的Borel集构成的σ 代数, 证明

$$\mathcal{B}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{B}\}.$$

解 设(X, τ) , Y和$\mathcal{B}_Y$如题中所设, 并且设

$$\mathcal{A} = \{A \cap Y : A \in \mathcal{B}\}.$$

我们必须证明$\mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{A}$ 和$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_Y$ 都成立.

---

1. 拓扑空间的开集生成的σ 代数中的元素称为Borel集. ——译者注

显然, $\mathcal{A}$是Y的子集σ 代数并且对一切$O \in \tau$. $O \cap Y \in \mathcal{A}$ 成立. 因此, $\mathcal{A}$包含Y的开集, 从而$\mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{A}$. 现在, 考虑集族

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B} : A \cap Y \in \mathcal{B}_Y\}.$$

容易看出$\mathcal{C}$是X的子集σ 代数, 它满足$\tau \subseteq \mathcal{C}$. 因此, $\mathcal{C} = \mathcal{B}$, 这就推得$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_Y$. 所以, $\mathcal{B}_Y = \mathcal{A}$, 结论得证.

习题12.14　设$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是某半环$\mathcal{S}$中的集合. 证明存在$\mathcal{S}$的有限个两两不相交的集合 $B_1, \cdots, B_m$ 使得每个A_i都可以表示成$B_1, \cdots, B_m$ 中集合的并.

解　我们关于n进行归纳法. 对于$n = 1$结论显然. 因此, 假设对某个n结论正确, 并且假设$A_1, \cdots, A_n, A_{n+1}$ 是$\mathcal{S}$的元素. 取$\mathcal{S}$的有限个两两不相交的元素$B_1, \cdots, B_m$ 使得每个$A_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, 可以表示成$B_1, \cdots, B_m$ 中集合的并. 显然, $\bigcup_{i=1}^n A_i \subseteq \bigcup_{j=1}^m B_j$. 集合$B_1 \cap A_{n+1}, \cdots, B_m \cap A_{n+1}$ 是$\mathcal{S}$的两两不相交元素. 另一方面, 对每个$1 \leqslant i \leqslant m$ 存在由有限个两两不相交的集合构成的集族$\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{S}$ 使得$B_i \backslash A_{n+1} = \bigcup_{C \in \mathcal{F}_i} C$ (由半环的定义). 因此, 集族

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_m \cup \{B_1 \cap A_{n+1}, \cdots, B_m \cap A_{n+1}\} \subseteq \mathcal{S}$$

是有限的并且它的元素是两两不相交的. 而且, 每个$A_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 可以表示成$\mathcal{F}$中元素的并. 于是, 观察到,

$$A_{n+1} = (A_{n+1} \backslash \bigcup_{j=1}^m B_j) \cup (B_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (B_m \cap A_{n+1}).$$

由定理12.2(1)存在$\mathcal{S}$的两两不相交的集合$D_1, \cdots, D_k$使得$A_{n+1} \backslash \cup_{j=1}^m B_j = \cup_{r=1}^k D_r$. 最后, 集族$\mathcal{F} \cup \{D_1, \cdots, D_k\} \subseteq \mathcal{S}$ 是有限的并且它的元素是两两不相交的, 每个集合$A_i (1 \leqslant i \leqslant n+1)$ 都可以表示成该集族中集合的并.

13. 半环上的测度

习题13.1　设$\{a_n\}$是非负实数列, $\mu(\varnothing) = 0$, 而且对N的每个非空子集A定义$\mu(A) = \sum_{n \in A} a_n$. 证明$\mu : \mathcal{P}(\mathrm{N}) \to [0, \infty]$ 是一个测度.

解　如果$\{A_n\}$ 是N的互不相交的子集序列, 并且$A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, 那么注意到

$$\mu(A) = \sum_{k \in A} a_k = \sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{k \in A_n} a_k \right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n).$$

习题13.2　设$\mathcal{S}$是一个半环, 并且设$\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ 是对某个$A \in \mathcal{S}$, 使得$\mu(A) < \infty$ 的集函数. 如果μ 是σ 可加的, 证明μ 是一个测度.

解　记$A = A \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$. 那么,

$$\mu(A) = \mu(A) + \mu(\varnothing) + \mu(\varnothing) + \cdots .$$

如果$\mu(\varnothing) > 0$，那么$\mu(A) = \infty$，与我们的假设矛盾. 因此, $\mu(\varnothing) = 0$，从而μ 是一个测度.

习题13.3 设X是不可数集, $\mathcal{S}$是σ 代数

$$\mathcal{S} = \{E \subseteq X : E\text{或者}E^c\text{是至多可数的}\};$$

也可参见习题12.7. 定义$\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ 为, 当E是至多可数集时$\mu(E) = 0$，当E^c是至多可数集时$\mu(E) = 1$，证明μ 是$\mathcal{S}$上的一个测度.

解 显然, $\mu(\varnothing) = 0$. 对于μ的σ可加性, 设$\{E_n\} \subseteq \mathcal{S}$ 是一个互不相交的序列. 记$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. 若每个$E_n$是至多可数的, 则$E$本身也是至多可数的, 从而$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0$ 成立. 另一方面, 如果对某个k, E_k^c 是至多可数的, 那么(由$n \neq k$ 时, $E_n \cap E_k = \varnothing$)当$n \neq k$ 时, 我们一定有, $E_n \subseteq E_k^c$，从而E_n是至多可数的. 因此,

$$1 = \mu(E) = \mu(E_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

有趣的是, 注意到, 如果$X = [0, 1]$，则$\mathcal{S}$是由[0, 1]的Lebegue可测子集构成的σ 代数, 并且μ 是限制在$\mathcal{S}$上的Lebesgue测度.

习题13.4 设X是一个非空集合, 并且设$f : X \to [0, \infty]$ 是一个函数. 定义$\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ 为, 若$A \neq \varnothing$ 并且是至多可数的, 则$\mu(A) = \sum_{x \in A} f(x)$，若$A$是不可数的, 则$\mu(A) = \infty$，并且$\mu(\varnothing) = 0$. 证明$\mu$ 是一个测度.

解 对于μ 的σ 可加性, 设$\{A_n\}$ 是X的互不相交的子集序列. 记$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，若某个$A_n$是不可数的, 则$A$也是不可数的, 因此, 这种情形下, $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty$ 成立. 另一方面, 若每个A_n都是至多可数的, 那么A也是至多可数的, 从而

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{x \in A_n} f(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

也成立.

习题13.5 设$\mathcal{S}$是半环, 并且$\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ 是一个有限可加测度. 如果μ 是σ 半可加的, 证明μ 是一个测度.

解 设$\{A_n\} \subseteq \mathcal{S}$ 是两两互不相交的并且$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$. 由假设, $\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ 成立. 另一方面, 如果k 固定, 那么存在两两不相交的集$B_1, \cdots, B_m \in \mathcal{S}$ 使得$A \setminus \bigcup_{n=1}^{k} A_n = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$ (参见定理12.2). 因为$A = [\bigcup_{n=1}^{k} A_n] \cup [\bigcup_{i=1}^{m} B_i]$ 是$\mathcal{S}$的互不相交元素的有限并, 所以μ 的有限可加性可推得

$$\sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) + \sum_{i=1}^{m} \mu(B_i) = \mu(A).$$

因为k是任意的, 所以$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(A)$ 也成立, 从而μ 是一个测度.

习题13.6 设$\{\mu_n\}$是半环$\mathcal{S}$上测度的一个单调增序列；即，对所有的$A \in \mathcal{S}$和n，$\mu_n(A) \leqslant \mu_{n+1}(A)$成立. 定义$\mu : \mathcal{S} \to [0,\infty]$为，对一切$A \in \mathcal{S}$，$\mu(A) = \sup\{\mu_n(A)\}$. 证明$\mu$是一个测度.

解 显然，$\mu(\varnothing) = 0$. 于是，设$\{A_n\} \subseteq \mathcal{S}$是使得$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathcal{S}$的两两互不相交的序列. 因为每个$\mu_i$是测度，所以

$$\mu_i(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_i(A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

成立，从而$\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. 另一方面，对每个$k$我们有

$$\sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) = \lim_{i\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu_i(A_n) = \lim_{i\to\infty} \mu_i\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \leqslant \mu(A).$$

因此，$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(A)$也成立，这就证得$\mu$是$\sigma$可加的.

习题13.7 考虑半环$\mathcal{S} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{是至多可数的}\}$，并且定义$\mu : \mathcal{S} \to [0,\infty]$为，若$A$是有限的，则$\mu(A) = 0$，若$A$是可数的，则$\mu(A) = \infty$. 证明$\mu$是一个有限可加测度但不是一个测度.

解 设$A_1, \cdots, A_n$是$\mathcal{S}$的两两不相交的元素. 设$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. 如果每个$A_i$是有限集，那么$A$也是有限集，并且$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu(A) = 0$成立. 另一方面，如果$A_i$中有一个是可数的，那么$A$也是可数的，并且$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu(A) = \infty$成立. 因此，$\mu$是一个有限可加的测度.

为了看出μ不是σ可加的，注意到$\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\}$，而

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{n\}) < \mu(\mathbb{N}) = \infty.$$

习题13.8 证明任何有限可加测度是单调的.

解 假设$\mu : \mathcal{S} \to [0,\infty]$是一个有限可加测度. 设$A, B \in \mathcal{S}$满足$A \subseteq B$，取$\mathcal{S}$的有限个互不相交的集合$C_1, \cdots, C_n$，使得$B \backslash A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$. 那么，

$$B = A \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$$

是$\mathcal{S}$的两两不相交集合的有限并. 因此，由μ的有限可加性，我们有

$$\mu(A) \leqslant \mu(A) + \mu(C_1) + \cdots + \mu(C_n) = \mu(B).$$

习题13.9 考虑例题13.6中定义的集函数μ. 即，考虑不减的左连续函数$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，然后定义集函数$\mu : \mathcal{S} \to [0,\infty)$为$\mu([a,b)) = f(b) - f(a)$，其中$\mathcal{S}$是半环$\mathcal{S} = \{[a,b) : -\infty < a \leqslant b < \infty\}$. 用另一种方法证明$\mu$是测度[1].

1. 当$f(x) = x$时，这种测度μ称为$\mathcal{S}$上的Lebegue测度，习惯上用λ表示，即，$\lambda([a,b)) = b - a$.
——译者注

解 证明μ 的σ 可加性的另一种方法如下. 设$a < b$ 并且设$[a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n)$, 其中序列$\{[a_n,b_n)\}$ 是两两互不相交的. 对每个$a < x \leqslant b$ 设

$$s_x = \sum_i [f(b_i) - f(a_i)],$$

其中的和(可能是级数)求遍使得$[a_i,b_i) \subseteq [a,x)$ 成立的所有i; 如果这样的区间不存在我们设$s_x = 0$. 因为f是非减的, 我们有$s_x \leqslant f(x) - f(a)$. 其次, 注意到集合

$$A = \{x \in (a,b] : s_x = f(x) - f(a)\}$$

是非空的. 设$t = \sup A$, 并且注意到$a < t \leqslant b$. 于是, 对$x \in A$, 我们有

$$f(x) - f(a) = s_x \leqslant s_t \leqslant f(t) - f(a),$$

从而, 由f的左连续性, 我们得到$s_t = f(t) - f(a)$. 也就是, $t \in A$.

我们的目的是证明$t = b$成立, 由反证法, 假设$a < t < b$. 那么对某个k, $a_k \leqslant t < b_k$ 一定成立. 因为序列$\{[a_n,b_n)\}$ 是互不相交的, 观察到$[a_i,b_i) \subseteq [a,t)$ 成立当且仅当$[a_i,b_i) \subseteq [a,a_k)$. 因此, $s_t = s_{a_k}$ 成立. 特别是, 关系式

$$f(t) - f(a) = s_t = s_{a_k} \leqslant f(a_k) - f(a) \leqslant f(t) - f(a)$$

保证了$a_k \in A$. 然而, 这可推得$b_k \in A$, 这是不可能的. 因此$t = b$成立, 这就保证了

$$\mu([a,b)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu([a_n,b_n)).$$

14. 外测度[1]和可测集

习题14.1 证明可数个零集[2]的并仍然是零集.

解 由不等式

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

即得结论.

---

1. 如果不特别说明, 本节习题中的μ 都是指某集合X上的外测度, 即, 定义在X的幂集$\mathcal{P}(X)$上的集函数$\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty)$, 满足:
(1) $\mu(\varnothing) = 0$; (2) 若$A \subseteq B$, 则$\mu(A) \leqslant \mu(B)$ (μ是单调的); (3) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (μ 是半可加的). ——译者注
2. 设$E \subseteq X$, 若$\mu(E) = 0$, 则称E是零集. ——译者注

习题14.2　如果μ 是集合X上的一个外测度并且A是零集，证明

$$\mu(B)=\mu(A\cup B)=\mu(B\backslash A)$$

对X的每个子集B成立.

解　由不等式

$$\begin{aligned}\mu(B)&\leqslant \mu(B\cup A)=\mu((B\backslash A)\cup A)\\&\leqslant \mu(B\backslash A)+\mu(A)=\mu(B\backslash A)\leqslant \mu(B)\end{aligned}$$

即得结论.

习题14.3　设μ 是集合X上的一个外测度. 如果X的子集列$\{A_n\}$ 满足$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\infty$，证明集合

$$E=\{x\in X: x\text{属于无穷多个}A_n\}$$

是零集.

解　假设序列$\{A_n\}$ 满足$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\infty$. 对一切$n$, 设$E_n=\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i$，并且注意到$E\subseteq E_n$成立. 因此,

$$0\leqslant \mu(E)\leqslant \mu(E_n)\leqslant \sum_{i=n}^{\infty}\mu(A_i)\to 0,$$

由此可得$\mu(E)=0$.

习题14.4　如果E是X的一个可测子集[1], 证明下列等式:

$$\mu(E\cap A)+\mu(E\cup A)=\mu(E)+\mu(A)$$

对X的每个子集A都成立.

解　由E的可测性可得

$$\mu(E\cup A)=\mu((E\cup A)\cap E)+\mu((E\cup A)\cap E^c)=\mu(E)+\mu(A\cap E^c).$$

因此,我们有

$$\mu(E\cup A)+\mu(E\cap A)=\mu(E)+\mu(A\cap E^c)+\mu(A\cap E)=\mu(E)+\mu(A).$$

习题14.5　设μ 是集合X上的一个外测度. 如果A是X的不可测子集而E是可测集满足$A\subseteq E$，说明$\mu(E\backslash A)>0$.

解　若$\mu(E\backslash A)=0$ 成立, 则$E\backslash A\in\Lambda$[2]. 因此, $A=E\backslash(E\backslash A)\in\Lambda$，矛盾. 所以, $\mu(E\backslash A)>0$.

习题14.6　设A是X的子集, 并且设$\{E_n\}$ 是互不相交的可测集列. 证明

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A\cap E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A\cap E_n).$$

---

1. $E\subseteq X$ 称为(关于μ)可测的, 如果对所有的$A\subseteq X$ 有$\mu(A)=\mu(A\cap E)+\mu(A\cap E^c)$ 成立.
——译者注

2. Λ 表示可测集全体. ——译者注

解 由μ 的σ 半可加性, 我们看到

$$\mu\left(A\cap\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right]\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A\cap E_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A\cap E_n).$$

另一方面, 引理14.5可推得对一切k,

$$\sum_{n=1}^{k}\mu(A\cap E_n)=\mu\left(A\cap\left[\bigcup_{n=1}^{k}E_n\right]\right)\leqslant\mu\left(A\cap\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right]\right),$$

从而$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A\cap E_n)\leqslant\mu(A\cap[\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n])$ 也成立.

习题14.7 *设$\{A_n\}$ 是X的子集列. 假设存在互不相交的可测子集列$\{B_n\}$ 使得对一切n, $A_n\subseteq B_n$ 成立. 证明*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

解 设$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 并且注意到对一切n, $A\cap B_n=A_n$ 成立. 因此, 由上一题, 我们看到

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\mu\left(A\cap\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right]\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A\cap B_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

习题14.8 *设μ 是集合X上的一个外测度. 证明X的一个子集E是可测的当且仅当对一切$\varepsilon>0$ 存在一个可测集F使得$F\subseteq E$, 并且$\mu(E\backslash F)<\varepsilon$.*

解 如果E是可测的, 那么$F=E$对一切$\varepsilon>0$ 满足条件. 反之, 假设条件满足.

首先, 对一切n, 取可测集F_n使得$F_n\subseteq E$, 并且$\mu(E\backslash F_n)<1/n$. 记$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\subseteq E$, 并且注意到$F$是可测的. 因此, 对一切$n$, $\mu(E\backslash F)\leqslant\mu(E\backslash F_n)<1/n$, 可推得$\mu(E\backslash F)=0$, 从而$E\backslash F$可测. 于是$E$的可测性可由等式$E=F\cup(E\backslash F)$ 得到.

前面部分的另一证法如下: 设A是X的一子集满足$\mu(A)<\infty$. 如果$\varepsilon>0$ 给定, 取一个可测集下使得$F\subseteq E$ 并且$\mu(E\backslash F)<\varepsilon$. 那么

$$\begin{aligned}\mu(A\cap E)&=\mu(A\cap[F\cup(E\backslash F)])\\&\leqslant\mu(A\cap F)+\mu(A\cap(E\backslash F))\leqslant\mu(A\cap F)+\varepsilon\end{aligned}$$

可推得$\mu(A\cap F)-\mu(A\cap E)>-\varepsilon$, 从而对所有$\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}\mu(A)&=\mu(A\cap F)+\mu(A\cap F^{c})\\&\geqslant\mu(A\cap F)+\mu(A\cap E^{c})\\&=\mu(A\cap E)+\mu(A\cap E^{c})+[\mu(A\cap F)-\mu(A\cap E)]\\&>\mu(A\cap E)+\mu(A\cap E^{c})-\varepsilon.\end{aligned}$$

这可推出$\mu(A)\geqslant\mu(A\cap E)+\mu(A\cap E^{c})$, 说明$E$是可测集.

习题14.9 设μ 是集合X上的一个外测度. 假设X的子集E具有性质: 对一切$\varepsilon > 0$ ，存在可测集F使得$\mu(E\Delta F) < \varepsilon$. 证明E是可测集.

解 设$\varepsilon > 0$. 根据上一题, 只要证明对某个可测集$G, G \subseteq E$, 有$\mu(E\backslash G) < \varepsilon$ 成立.

对每个n, 取$F_n \in \Lambda$ 使得$\mu(E\Delta F_n) < 2^{-n}\varepsilon$. 设$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in \Lambda$. 因为$F\backslash E \subseteq F_n\backslash E$ 成立, 所以对一切n我们有

$$\mu(F\backslash E) \leqslant \mu(F_n\backslash E) < 2^{-n}\varepsilon.$$

从而$\mu(F\backslash E) = 0$. 因此, $F\backslash E \in \Lambda$, 并且由此可知$F \cap E = F\backslash(F\backslash E)$ 也是可测集. 于是, 注意到$F \cap E \subseteq E$ 成立并且

$$\mu(E\backslash E \cap F) = \mu(E\backslash F) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\backslash F_n)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E\backslash F_n) < \varepsilon.$$

习题14.10 设$X = \{1,2,3\}, \mathcal{F} = \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}\}$ 并且考虑定义为, $\mu(\varnothing) = 0, \mu(\{1\}) = 2$ 和$\mu(\{1,2\}) = 1$ 的集函数$\mu : \mathcal{F} \to [0,\infty]$.

(a) 描述由集函数μ 生成的外测度μ^*;[1]

(b) 描述X的所有μ^*可测子集构成的σ 代数(并且推出集合$\{1\} \in \mathcal{F}$ 不是可测集).

解 (a)外测度$\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ 由

$$\mu^*(\varnothing) = 0, \mu^*(\{1\}) = \mu^*(\{2\}) = 1, \mu^*(\{3\}) = \infty,$$
$$\mu^*(\{1,2\}) = 1, \mu^*(\{1,3\}) = \mu^*(\{2,3\}) = \mu^*(\{1,2,3\}) = \infty,$$

给出.

(b) 所有可测集的σ 代数是$\Lambda = \{\varnothing, \{3\}, \{1,2\}, X\}$.

习题14.11 设$\nu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ 是一个集函数. 证明ν 是外测度当且仅当存在X的一个包含空集的子集集合$\mathcal{F}$以及一个集函数$\mu: \mathcal{F} \to [0,\infty]$ 使得, $\mu(\varnothing) = 0$. 对所有的$A \in \mathcal{P}(X), \nu(A) = \mu^*(A)$.

解 首先, 假设$\nu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ 是外测度. 设$\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$并且$\mu = \nu$. 我们断言, 对一切$A \in \mathcal{P}(X)$, $\nu(A) = \mu^*(A)$ 成立, 其中

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) : \{A_n\} \subseteq \mathcal{F} \quad 并且 \quad A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\},$$

并且$\inf\ \varnothing = \infty$. 为了说明这一点, 设$A \in \mathcal{P}(X)$. 由$A = A \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing \cdots$, 我们看到$\mu^*(A) \leqslant \mu(A) = \nu(A)$. 另一方面, 若$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 正确, 则由ν 的σ 半可加性, 我们看到

$$\nu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n),$$

---

1. 设$\mathcal{F}$是X的一个子集族, $\mu : \mathcal{F} \to [0,\infty]$ 是满足$\mu(\varnothing) = 0$ 的集函数. 对X的每个子集A定义$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) : \{A_n\}$ 是$\mathcal{F}$的一个序列使得$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\}$, 如果这样的序列不存在, 则定义$\mu^*(A) = \infty$ (简记为$\inf\ \varnothing = \infty$). 这样定义的集函数$\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ 是一个外测度, 称之为由μ 生成的外测度. ——译者注

从而$\nu(A) \leqslant \mu^*(A)$ 也正确. 因此, 对X的一切子集A, 有$\nu(A) = \mu^*(A)$.

反之, 假设由集函数$\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ 生成的外测度μ^* 满足$\mu(\varnothing) = 0$ 并且对一切$A \in \mathcal{P}(X)$ 有$\nu(A) = \mu^*(A)$. 我们通过证明ν 是一个测度所要满足的三个性质来证明ν 是一个外测度.

(1) 由$0 \leqslant \nu(\varnothing) = \mu^*(\varnothing) \leqslant \mu(\varnothing) + \mu(\varnothing) + \mu(\varnothing) + \cdots = 0$, 我们看到$\nu(\varnothing) = 0$.

(2) (单调性)设$A \subseteq B$ 并且设$\{A_n\}$ 是满足$B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 的$\mathcal{F}$的序列. 那么, $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 从而$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. 因此,
$\nu(A) = \mu^*(A) \leqslant \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : \{A_n\} \subseteq \mathcal{F}\text{并且}B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} = \mu^*(B) = \nu(B).$
(如果不存在$\mathcal{F}$的序列$\{A_n\}$ 使得$B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 那么$\mu^*(B) = \infty$, 并且$\nu(A) \leqslant \nu(B) = \mu^*(B)$ 显然正确.)

(3) (σ 半可加性)设$\{E_n\}$ 是X的子集序列并且设$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. 如果$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = \infty$, 那么$\nu(E) = \mu^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ 显然正确. 所以, 假设$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) < \infty$, 并且设$\varepsilon > 0$. 对每个n取$\mathcal{F}$的序列$\{A_n^k\}$ 使得$E_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^k$, 并且

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_n^k) < \mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon = \nu(E_n) + 2^{-n}\varepsilon.$$

显然, $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^k$ 成立, 从而

$$\nu(E) = \mu^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_n^k) < \sum_{n=1}^{\infty} [\nu(E_n) + 2^{-n}\varepsilon] = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) + \varepsilon.$$

因为$\varepsilon > 0$ 是任意的, 所以$\nu(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$, 这就证完了.

习题14.12 *考虑集合X上的外测度μ 并且设Λ表示X的具有有限测度的可测集全体. 即, 考虑集族$\mathcal{A} = \{A \in \Lambda : \mu(A) < \infty\}$.*

(a) 证明$\mathcal{A}$是半环;

(b) 在$\mathcal{A}$上定义关系$\simeq$ 为, 如果$\mu(A \Delta B) = 0$, 则$A \simeq B$. 证明关系$\simeq$ 为$\mathcal{A}$上的等价关系;

(c) 设D表示$\mathcal{A}$的所有等价类构成的集合. 对$A \in \mathcal{A}$ 用$\dot{A}$ 表示D中A的等价类. 于是, 对$\dot{A}$, $\dot{B} \in D$, 定义$d(\dot{A}, \dot{B}) = \mu(A \Delta B)$. 证明$d$是定义明确的并且$(D, d)$ 是完备的度量空间.

解 注意到如果A, B 和C是三个任意集合, 那么

$$A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C).$$

(a) 直接证. (注意到其实$\mathcal{A}$是一个集合环.)

(b) 如果A, B , 和C属于$\mathcal{A}$满足$A \simeq B$ 和$B \simeq C$, 那么关系式

$$\mu(A \Delta C) \leqslant \mu((A \Delta B) \cup (B \Delta C)) \leqslant \mu(A \Delta B) + \mu(B \Delta C) = 0\text{说明}A \simeq C.$$

(c) 如果$A \simeq A_1$ 并且$B \simeq B_1$, 那么

$$\begin{aligned}\mu(A \Delta B) &\leqslant \mu((A \Delta A_1) \cup (A_1 \Delta B_1) \cup (B_1 \Delta B)) \\ &\leqslant \mu(A \Delta A_1) + \mu(A_1 \Delta B_1) + \mu(B_1 \Delta B) = \mu(A_1 \Delta B_1).\end{aligned}$$

类似地, $\mu(A_1\Delta B_1)\leqslant\mu(A\Delta B)$, 从而$\mu(A\Delta B)=\mu(A_1\Delta B_1)$. 这说明$d(\dot{A},\dot{B})=\mu(A\Delta B)$ 是定义明确的.

对于三角不等式, 注意到

$$d(\dot{A},\dot{B})=\mu(A\Delta B)\leqslant\mu(A\Delta C)+\mu(C\Delta B)=d(\dot{A},\dot{C})+d(\dot{C},\dot{B}).$$

因此, (D,d) 是一个度量空间, 剩下来要证的是(D,d) 是一个完备的度量空间.

为此, 设$\{\dot{A}_n\}$ 是D的一个Cauchy序列. 通过一个子列, 我们可以假设对每个n,

$$d(\dot{A}_{n+1},\dot{A}_n)=\mu(A_{n+1}\Delta A_n)<2^{-n-1}$$

成立. 集合$A=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}A_i\in\Lambda$. 于是, 让n固定并且注意到$A\subseteq\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i=A_n\cup(\bigcup_{i=n}^{\infty}(A_{i+1}\backslash A_i))$ 成立. 因此,

$$\mu(A)\leqslant\mu(A_n)+\sum_{i=n}^{\infty}\mu(A_{i+1}\backslash A_i)<\mu(A_n)+2^{-n}<\infty,$$

从而$\dot{A}\in D$. 而且, 我们有

$$\mu(A\backslash A_n)\leqslant\mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}(A_{i+1}\backslash A_i)\right)\leqslant\sum_{i=n}^{\infty}\mu(A_{i+1}\backslash A_i)<2^{-n}.$$

另一方面, 若$x\in A_n\backslash A$, 则$x\in A_n$ 并且$x\notin A=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}A_i$. 因此, 存在某个$k\geqslant n$ 使得当$i\geqslant k$ 时$x\notin A_i$. 这可推得$A_n\backslash A\subseteq\bigcup_{i=n}^{\infty}(A_i\backslash A_{i+1})$, 从而$\mu(A_n\backslash A)\leqslant\sum_{i=n}^{\infty}\mu(A_i\backslash A_{i+1})<2^{-n}$ 也成立. 因此, 对一切n

$$d(\dot{A}_n,\dot{A})=\mu(A_n\Delta A)=\mu(A_n\backslash A)+\mu(A\backslash A_n)<2^{1-n}$$

成立. 这说明$\lim d(\dot{A}_n,\dot{A})=0$, 从而(D,d)是一个完备的度量空间. (这部分的另一证法, 参见习题31.3).

15. 由一个测度生成的外测度

习题15.1 设$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是一个测度空间[1], 并且设E是X的一个可测子集. 令$\mathcal{S}_E=\{E\cap A:A\in\mathcal{S}\}$, 它是$\mathcal{S}$在$E$上的限制. 证明$(E,\mathcal{S}_E,\mu^*)$ 是一个测度空间.

解 设E是X的一个可测子集并且$\{A_n\}$ 是Λ 中的一个序列, 满足

(a) $\{A_n\cap E\}$ 是两两不相交的序列; 而且

(b) 存在某个$A\in\mathcal{S}$ 使得$A\cap E=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\cap E$.

利用$\mu^*:\Lambda\to[0,\infty]$ 是一个测度, 我们看到

$$\mu^*(A\cap E)=\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap E)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n\cap E),$$

1. 三元组$(X,\mathcal{S},\mu)$ 中, X是一个非空集合, $\mathcal{S}$是X的子集半环, μ 是$\mathcal{S}$上的一个测度, 则称$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是一个测度空间. $E\subseteq X$ 称为可测的(μ 可测的)如果E关于μ^* 是可测的. ——译者注

从而当μ^* 限制在半环$\mathcal{S}_E$ 上时它是一个测度.

习题15.2 设$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间, 证明

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu^*(B) : B是一个\sigma集, 使得A \subseteq B\}$$

对X的每个子集A成立.

解 设$\{A_n\} \subseteq \mathcal{S}$ 并且$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. 由定理12.2(3),[1] 存在$\mathcal{S}$的两两互不相交的序列$\{B_n\}$ 使得$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. 因此, 对于$A \subseteq X$, 存在$\mathcal{S}$的序列$\{A_n\}$ 使得$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 成立当且仅当存在一个σ 集B使得$A \subseteq B$ 成立. 所要的等式于是就可由关系式

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu^*(B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

得到.

习题15.3 证明$\mathbb{R}$的每个区间I是Lebesgue可测[2]的并且$\lambda^*(I) = |I|$ ($=I$的长度).

解 在例15.5[3]中, 我们证得形如$[a, b]$ 和$[a, \infty)$ 的区间I是Lebesgue可测的并且在这种情形下$\lambda^*(I) = |I|$ 成立. 我们将分别考虑其他情形. 假设$-\infty < a < b < \infty$.

(a) $I = (a, b]$. 取实数列$\{x_n\}$使得$x_n \downarrow a$ 并且对一切n有$a < x_n < b$. 因此, 由例15.5, 我们有

$\lambda^*((a, b]) = \lim_{n\to\infty} \lambda^*([x_n, b]) = \lim_{n\to\infty} (b - x_n) = b - a = |I|$.

(b) $I = (a, b)$. 取$a < x_n < b$ 使得$x_n \downarrow a$ 并且观察到$[x_n, b) \uparrow (a, b)$.

(c) $I = (-\infty, a)$. 注意到$[a - n, a) \uparrow (-\infty, a)$, 从而

$$\lambda^*((-\infty, a)) = \lim_{n\to\infty} \lambda([a - n, a)) = \lim_{n\to\infty} n = \infty = |I|.$$

(d) $I = (-\infty, a]$. 注意到$(-\infty, a) \subseteq (-\infty, a]$, 从而由不等式

$$\infty = |(-\infty, a)| = \lambda^*((-\infty, a)) \leqslant \lambda^*((-\infty, a]),$$

我们看到$|I| = \lambda^*(I) = \infty$.

(e) $I = (a, \infty)$. 结论可由明显的包含关系$[a + 1, \infty) \subseteq (a, \infty)$ 立刻得到.

(f) $I = (-\infty, \infty)$. 注意到$[0, \infty) \subseteq (-\infty, \infty)$.

---

1. 定理12.2(3): 设$\mathcal{S}$是一个半环, 则σ 集的可数并和有限交都是σ 集. 这里应该是指定理12.2(2). 定理12.2(2): 设$\mathcal{S}$是一个半环, $\{A_n\} \subseteq \mathcal{S}$ 则$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是一个σ 集. ——译者注

2. 由半环$\mathcal{S} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ 上的Lebesgue测度λ 生成的外测度λ^* 称为$\mathbb{R}$上的Lebesgue测度. ——译者注

3. 例题15.5的证明主要利用定理15.4: 对于可测空间$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 和可测集列$\{E_n\}$, 下列结论正确:
   a. 若$E_n \uparrow E$ (即, 对一切n,$E_n \leqslant E_{n+1}$,并且$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$), 则$\mu^*(E_n) \uparrow \mu^*(E)$.
   b. 若$E_n \downarrow E$ (即, 对一切n, $E_{n+1} \leqslant E_n$, 并且$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$), 而且存在某个$k$, 使得$\mu^*(E_k) < \infty$, 则$\mu^*(E_n) \downarrow \mu^*(E)$. ——译者注

习题15.4　证明$\mathbb{R}$的每个可数子集的Lebesgue测度为零.

解　设$a\in\mathbb{R}$. 那么, 对一切$\varepsilon>0$有$\{a\}\subseteq[a-\varepsilon,a+\varepsilon)$成立, 从而对所有的$\varepsilon>0$有$\lambda^*(\{a\})\leqslant\lambda^*([a-\varepsilon,a+\varepsilon))=2\varepsilon$. 因此, 对所有的$a\in\mathbb{R}$, $\lambda^*(\{a\})=0$成立. 如果$A=\{a_1,a_2,\cdots\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n\}$是可数集, 那么注意到$\lambda^*(A)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(\{a_n\})=0$, 因此$\lambda^*(A)=0$.

习题15.5　对于$\mathbb{R}$的子集A和实数a,b, 定义集合$aA+b=\{ax+b:x\in A\}$. 证明

(a) $\lambda^*(aA+b)=|a|\lambda^*(A)$;

(b) 若A是Lebesgue可测的, 则$aA+b$也是Lebesgue可测的.

解　设$A\subseteq\mathbb{R}$并且固定两个实数a和b. 因为$A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n)$成立当且仅当$A+b\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n+b,b_n+b)$成立, 所以容易看到$\lambda^*(A+b)=\lambda^*(A)$成立. 恒等式

$$E\cap(b+A)=b+(E-b)\cap A\text{和}E\cap(b+A)^c=b+(E-b)\cap A^c$$

可推得

$$\lambda^*(E\cap(b+A))+\lambda^*(E\cap(b+A)^c)=\lambda^*((E-b)\cap A)+\lambda^*((E-b)\cap A^c),$$

这说明A可测当且仅当对一切$b\in\mathbb{R}$, $b+A$可测.

其次, 注意到$\lambda^*(c(s,t))=|c|\lambda^*((s,t))=|c|(t-s)$成立. 另一方面, 因为$A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$成立当且仅当对一切$a\in\mathbb{R}$, $aA\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}a(a_n,b_n)$成立, 而且$\lambda^*([a_n,b_n))=\lambda^*((a_n,b_n))$, 所以对一切$a\in\mathbb{R}$, $\lambda^*(aA)=|a|\lambda^*(A)$. 于是, 恒等式($a\neq0$)

$$E\cap aA=a((a^{-1}E)\cap A)\text{和}E\cap(aA)^c=a((a^{-1}E)\cap A^c),$$

可推得

$$\lambda^*(E\cap aA)+\lambda^*(E\cap(aA)^c)=|a|[\lambda^*((a^{-1}E)\cap A)+\lambda^*((a^{-1}E)\cap A^c)],$$

这说明A可测当且仅当对一切$a\in\mathbb{R}$, aA可测.

于是, (a)和(b)可由上面的讨论得到.

习题15.6　设$\mathcal{S}$是集合X的子集半环, 并且设$\mu:\mathcal{S}\to[0,\infty]$是一个有限可加测度而不是一个测度. 对一切$A\subseteq X$ (和通常一样)定义

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n):\{A_n\}\subseteq\mathcal{S}\text{并且}A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right\}.$$

举例说明在$\mathcal{S}$上可能有$\mu\neq\mu^*$. 这与定理15.1为什么不矛盾?

解　考虑习题13.7中的有限可加测度. 显然, $\mu(\mathbb{N})=\infty$. 因为$\mathbb{N}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{n\}\in\mathcal{S}$, 我们有$\mu^*(\mathbb{N})\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{n\})=0$, 从而$0=\mu^*(\mathbb{N})<\mu(\mathbb{N})=\infty$.

该结论与定理15.1不矛盾是因为在它的证明中测度的σ可加性是本质的.

习题15.7 设E是测度空间$(X,\mathcal{S},\mu)$的任意可测子集并且考虑测度空间$(E,\mathcal{S}_E,\nu)$，其中$\mathcal{S}_E=\{E\cap A: A\in\mathcal{S}\}$ 而且$\nu(E\cap A)=\mu^*(E\cap A)$；参见习题15.1. 证明测度空间$(E,\mathcal{S}_E,\nu)$ 的如下性质:

(a) 外测度$\nu*$ 是μ^* 在E上的限制, 即, 对一切$B\subseteq E$，$\nu^*(B)=\mu^*(B)$.

(b) 测度空间$(E,\mathcal{S}_E,\nu)$ 的ν可测集恰好是形如$E\cap A$ 的集, 其中A是X的μ可测集, 即, $\Lambda_\nu=\{F\subseteq E: F\in\Lambda_\mu\}$.

解 设$(X,\mathcal{S},\mu)$，E, 和ν 是题目中所定义的.

(a) 设B是E的一个任意子集. 如果$\{A_n\}$ 是$\mathcal{S}$的满足$B\subseteq\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ 的序列, 那么注意到$B\subseteq\bigcup_{n=1}^\infty E\cap A_n$ 从而

$$\nu^*(B)\leqslant\sum_{n=1}^\infty\nu(E\cap A_n)=\sum_{n=1}^\infty\mu^*(E\cap A_n)\leqslant\sum_{n=1}^\infty\mu(A_n).$$

这可推得$\nu^*(B)\leqslant\mu^*(B)$. 另一方面, 如果$\{A_n\}$ 是$\mathcal{S}$的满足$B\subseteq\bigcup_{n=1}^\infty E\cap A_n$ 的序列, 那么我们有

$$\mu^*(B)\leqslant\sum_{n=1}^\infty\mu^*(E\cap A_n)=\sum_{n=1}^\infty\nu(E\cap A_n).$$

因此, $\mu^*(B)\leqslant\nu^*(B)$ 也成立, 从而对E的一切子集B有$\nu^*(B)=\mu^*(B)$.

(b) 设F是E的一个子集. 首先, 假设F是ν 可测的. 如果$A\in\mathcal{S}$，那么注意到

$$\begin{aligned}\mu(A)&=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap(X\backslash E))\\&=\nu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap(X\backslash E))\\&=\nu^*((A\cap E)\cap F)+\nu^*((A\cap E)\cap(E\backslash F))+\mu^*(A\cap(X\backslash E))\\&\geqslant\mu^*(A\cap F)+\mu^*([A\cap(E\backslash F)]\cup[A\cap(X\backslash E)])\\&=\mu^*(A\cap F)+\mu^*(A\cap(X\backslash F)),\end{aligned}$$

这说明F是μ 可测的.

反之, 假设F是μ可测的. 如果A是E的任意子集, 那么注意到

$$\begin{aligned}\nu^*(A)=\mu^*(A)&=\mu^*(A\cap F)+\mu^*(A\cap(X\backslash F))\\&=\mu^*(A\cap F)+\mu^*(A\cap(E\backslash F))\\&=\nu^*(A\cap F)+\nu^*(A\cap(E\backslash F)),\end{aligned}$$

这意味着F也是ν 可测的.

习题15.8 证明测度空间$(X,\mathcal{S},\mu)$ 的子集E是可测的当且仅当对一切$\varepsilon>0$ 存在一个可测集A_ε 和两个子集B_ε 和C_ε 满足

$$E=(A_\varepsilon\cup B_\varepsilon)\backslash C_\varepsilon,\mu^*(B_\varepsilon)<\varepsilon,和\mu^*(C_\varepsilon)<\varepsilon.$$

解　设E是测度空间$(X,\mathcal{S},\mu)$的一个子集. 如果E是一个可测集并且$\varepsilon>0$给定, 那么取$A_\varepsilon=E$而且$B_\varepsilon=C_\varepsilon=\varnothing$, 并且注意到这些集合具有所要的性质.

反之, 假设对一切$\varepsilon>0$存在一个可测集A_ε和两个子集B_ε和C_ε满足

$$E=(A_\varepsilon\cup B_\varepsilon)\backslash C_\varepsilon,\mu^*(B_\varepsilon)<\varepsilon,\mu^*(C_\varepsilon)<\varepsilon. \qquad (\bigstar)$$

用$(A_\varepsilon\cup B_\varepsilon)\cap C_\varepsilon$代替$C_\varepsilon$, 我们可以假设$C_\varepsilon$是$A_\varepsilon\cup B_\varepsilon$的一个子集. 由($\bigstar$), 我们看到

$$E\cup C_\varepsilon=A_\varepsilon\cup B_\varepsilon. \qquad (\bigstar\bigstar)$$

于是,由定理15.11, 存在一个可测集D_ε使得$B_\varepsilon\subseteq D_\varepsilon$并且$\mu^*(D_\varepsilon)=\mu^*(B_\varepsilon)$. 利用($\bigstar\bigstar$), 我们得到

$$E\cup C_\varepsilon\cup(D_\varepsilon\backslash B_\varepsilon)=A_\varepsilon\cup B_\varepsilon\cup(D_\varepsilon\backslash B_\varepsilon)=A_\varepsilon\cup D_\varepsilon.$$

显然, $A_\varepsilon\cup D_\varepsilon$是一个可测集而且

$$\mu^*(C_\varepsilon\cup(D_\varepsilon\backslash B_\varepsilon))\leqslant\mu^*(C_\varepsilon)+\mu^*(D_\varepsilon)<2\varepsilon.$$

换句话说, 前面证得对一切$\varepsilon>0$存在一个可测集F_ε和一个子集G_ε使得

$$E\cup G_\varepsilon=F_\varepsilon\text{而且}\mu^*(G_\varepsilon)<\varepsilon.$$

于是, 对每个n取一个可测集F_n和一个子集G_n使得$\mu^*(G_n)<1/n$而且$E\cup G_n=F_n$, 显然, $F=\bigcap_{n=1}^\infty F_n$是可测的. 并且, 集合$G=\bigcap_{n=1}^\infty G_n$是一个零集——因此$G\backslash E$也是可测的. 由于

$$E\cup G=\bigcap_{n=1}^\infty(E\cup G_n)=\bigcap_{n=1}^\infty F_n=F,$$

我们看到$E\cup G$是一个可测集. 最后, E的可测性可由恒等式

$$E=(E\cup G)\backslash(G\backslash E)=F\backslash(G\backslash E)$$

立刻得到.

习题15.9　设$(X,\mathcal{S},\mu)$是一个测度空间, 并且A是X的一个子集. 证明如果存在X的一个可测子集E使得$A\subseteq E$, $\mu^*(E)<\infty$, 而且$\mu^*(E)=\mu^*(A)+\mu^*(E\backslash A)$, 那么$A$是可测的.

解　由习题15.7, 我们知道由测度空间$(E,\mathcal{S}_E,\mu^*)$生成的外测度与μ^*相同并且测度空间中所有可测集的σ代数是$\{A\in\Lambda_\mu:A\subseteq E\}$.

于是, 为了完成证明, 假设$E\in\Lambda_\mu$并且E的子集A满足$\mu^*(A)+\mu^*(E\backslash A)=\mu^*(E)$. 如果$\mu^*(E)<\infty$成立, 那么由定理15.8可得$A$是$(E,\mathcal{S}_E,\mu^*)$的可测集. 因此, 由前面的讨论可知, $A\in\Lambda_\mu$.

习题15.10　设A是满足$\lambda^*(A)>0$的$\mathbb{R}$的子集, 证明存在一个$\mathbb{R}$的不可测子集B使得$B\subseteq A$.

解　如果A是不可测的, 那么没什么可证, 所以, 假设A是可测的. 因为某个$[n,n+1]\cap A$一定有非零的测度(为什么?), 通过适当的平移(并且利用习题15.5), 我们可以假设$A\subseteq[0,1]$.

如同例15.13, 我们定义A上的等价关系$\simeq$ 为, 当$x-y$ 是有理数时, 则称$x \simeq y$. 由选择公理, 存在A的子集B恰好含有每个等价类中的一个元素. 设$\{r_1, r_2, \cdots\}$是$[-1, 1]$中有理数的一种排列并且设$B_n = r_n + B$, 那么

(a) 序列$\{B_n\}$ 是互不相交的;

(b) 对每个n(由习题15.5), $\lambda^*(B_n) = \lambda^*(B)$成立; 而且

(c) $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq [-1, 2]$.

于是, 注意到如果B是可测集, 那么每个B_n也是可测集(再次参见习题15.5). 因此, 由(c)可得

$$0 < \lambda^*(A) \leqslant \lambda^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(B_i)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda^*(B_i) = \lim_{n\to\infty} n\lambda^*(B) \leqslant 3,$$

这是不可能的. 所以, B是A的一个不可测子集.

习题15.11 举出一个测度空间$(X, \mathcal{S}, \mu)$的互不相交的子集列$\{E_n\}$ 使得

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

解 设E_n 是例15.13中描述的互不相交的不可测集列, 其中$E_n = r_n + E$[1]. 因为E是不可测集, 所以$\lambda^*(E) > 0$ 成立, 从而$\lambda^*(E_n) = \lambda^*(E) > 0$. 尤其是, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) = \infty$. 另一方面, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq [-1, 2]$ 可推得$\lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leqslant 3 < \infty$.

习题15.12 设$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间, 并且$\{A_n\}$ 是对所有n满足$A_n \subseteq A_{n+1}$ 的X的子集列. 若$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 证明$\mu^*(A_n) \uparrow \mu^*(A)$.

解 取$E \in \Lambda$ 使得$A \subseteq E$ 并且$\mu^*(A) = \mu^*(E)$ (由定理15.11这是可能的). 并且由该定理, 对每个n存在$E_n \in \Lambda$ 使得$A_n \subseteq E_n \subseteq E$ 并且$\mu^*(A_n) = \mu^*(E_n)$. 于是, 对每个n令$F_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \in \Lambda$, 然后令$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \Lambda$. 那么, 我们有:

(a) 对每个n, $A_n \subseteq F_n$ 并且$\mu^*(A_n) = \mu^*(F_n)$;

(b) $F_n \uparrow F$ 而且$\mu^*(A) = \mu^*(F)$.

由定理15.4, 可得

$$\mu^*(A_n) = \mu^*(F_n) \uparrow \mu^*(F) = \mu^*(A).$$

习题15.13 对于测度空间$(X, \mathcal{S}, \mu)$的子集, 我们定义如下的几乎处处(a.e.)关系:

(a) $A \subseteq B$ a.e.成立如果$\mu^*(A \setminus B) = 0$;

(b) $A = B$ a.e.成立如果$\mu^*(A \Delta B) = 0$;

1. 在例15.13中, E是[0, 1]中的不可测集, $\{r_1, r_2, \cdots\}$ 是$[-1, 1]$ 中的全体有理数的一种排列, $E_n = r_n + E$, 其中E的作法同习题15.10中B的作法一样. ——译者注

(c) $A_n \uparrow A$ a.e.成立如果对所有的n, $A_n \subseteq A_{n+1}$ a.e.而且$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ a.e.($A_n \downarrow A$ a.e.的意思是类似的).

通过证明可测集列$\{E_n\}$ 的下列性质推广定理15.4:

(i) 如果$E_n \uparrow E$ a.e., 那么$\mu^*(E_n) \uparrow \mu^*(E)$;

(ii) 如果$E_n \downarrow E$ a.e.并且对某个k, $\mu^*(E_k) < \infty$, 那么$\mu^*(E_n) \downarrow \mu^*(E)$.

对集合E_n 不假设可测性(i)正确吗?

解 (i) 假设$\{E_n\}$ 是一个使得$E_n \uparrow E$ a.e.成立的可测集列. 设

$$A = \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \Delta E\right] \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \backslash E_{n+1})\right]$$

并且注意到$\mu^*(A) = 0$. 于是, 定义$F = E \cup A$ 并且对一切n定义$F_n = E_n \cup A$. 显然, $\mu^*(E) = \mu^*(F)$ 并且对一切n, $\mu^*(E_n) = \mu^*(F_n)$ (参见习题14.2), 而且有$F_n \uparrow F$.

于是, 应用定理15.4(1)可得

$$\mu^*(E_n) = \mu^*(F_n) \uparrow \mu^*(F) = \mu^*(E).$$

(ii) 假设$\{E_n\}$ 是一个使得$E_n \downarrow E$ a.e.成立并且对某个k, $\mu^*(E_k) < \infty$ 成立的可测集列. 定义$B = [(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)\Delta E] \cup [\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_{n+1} \backslash E_n)]$. 显然, $\mu^*(B) = 0$. 然后, 应用定理15.4(2)可得$E_n \cup E \cup B \downarrow E \cup B$.

对集合E_n 不假设可测性结论(i)也正确. 这可由前面(i)的证明和习题15.12得到.

习题15.14 举例说明存在一个测度空间$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 的可测集列$\{E_n\}$使得对所有n, $E_{n+1} \subseteq E_n$ 成立并且

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(E_n) > \mu^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

解 考虑具有Lebesgue测度的$\mathbb{R}$, 并且对一切n, 设$E_n = (n, \infty)$. 那么, $E_n \downarrow \varnothing$ 成立, 而对一切n有$\lambda^*(E_n) = \infty$.

习题15.15 对集合X的子集列$\{A_n\}$定义

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \text{和} \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i.$$

于是, 设$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间并且$\{E_n\}$ 是可测集列. 证明下列结论:

(a) $\mu^*(\liminf\ E_n) \leqslant \liminf \mu^*(E_n)$;

(b) 若$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) < \infty$, 则$\mu^*(\limsup\ E_n) \geqslant \limsup \mu^*(E_n)$.

解 (a) 注意到$\bigcap_{i=n}^{\infty} E_i \uparrow \liminf E_n$ 并且$\bigcap_{i=n}^{\infty} E_i \subseteq E_n$ 对一切n成立. 由定理15.4(a), 我们得到

$$\mu^*(\liminf E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu^*\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} E_i\right) \leqslant \liminf \mu^*(E_n).$$

(b) 用类似的方法和定理15.4(b).

习题15.16 举例说明存在一个测度空间$(X,\mathcal{S},\mu)$ 的子集列$\{A_n\}$ 使得对一切n , $A_{n+1}\subseteq A_n$ 成立, 并且, $\mu^*(A_1)<\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\mu^*(A_n)>\mu^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right).$$

解 设$A_n=\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i$ ，其中$\{E_n\}$ 是例15.13中的序列. 注意到$A_n\downarrow\varnothing$ 成立. 事实上, 如果$x\in A_n$, 那么存在$k\geqslant n$ 使得$x\in E_k$. 因为当$i\neq j$ 时, $E_i\cap E_j=\varnothing$, 所以$x\notin A_{k+1}$, 因此$A_n\downarrow\varnothing$ 成立. 于是, 观察到对所有的n , $\lambda^*(A_n)\geqslant\lambda^*(E_n)=\lambda^*(E)>0$ 成立.

习题15.17 设$(X,\mathcal{S}_1,\mu_1)$ 和$(X,\mathcal{S}_2,\mu_2)$ 是两个测度空间. 证明μ_1 和μ_2 在X上生成相同的外测度当且仅当在$\mathcal{S}_1$ 上$\mu_1=\mu_2^*$ 和在$\mathcal{S}_2$ 上$\mu_2=\mu_1^*$ 都成立.

解 如果μ_1 和μ_2 生成相同的外测度, 那么显然在$\mathcal{S}_1$ 上$\mu_1=\mu_2^*$ 和在$\mathcal{S}_2$ 上$\mu_2=\mu_1^*$ 都成立.

反之, 假设在$\mathcal{S}_1$ 上$\mu_1=\mu_2^*$ 和在$\mathcal{S}_2$ 上$\mu_2=\mu_1^*$ 都成立. 设$A\subseteq X$. 如果$\mu_2^*(A)=\infty$, 那么$\mu_1^*(A)\leqslant\mu_2^*(A)$ 成立. 如果$\mu_2^*(A)<\infty$, 那么给定$\varepsilon>0$ 存在$\mathcal{S}_2$ 的一个序列$\{A_n\}$ 使得$A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 并且$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_2(A_n)<\mu_2^*(A)+\varepsilon$. 因此, 对所有$\varepsilon>0$,

$$\mu_1^*(A)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu_1^*(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_2(A_n)<\mu_2^*(A)+\varepsilon$$

成立, 从而$\mu_1^*(A)\leqslant\mu_2^*(A)$.

类似地, $\mu_1^*(A)\geqslant\mu_2^*(A)$ 成立, 因此对所有的$A\subseteq X$ 有$\mu_1^*(A)=\mu_2^*(A)$ 成立.

习题15.18 设$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是一个测度空间. A是一个可测集使得$\mu^*(A)>0$, 如果对A的每个可测子集E我们要么有$\mu^*(E)=0$ 要么有$\mu^*(A\backslash E)=0$, 则称A是一个**原子**. 如果$(X,\mathcal{S},\mu)$ 没有原子, 则称之为**非原子测度空间**.

(a) 求下列测度空间的原子:

(i) 计数测度[1];

(ii) 基于点a的Dirac测度[2].

(b) 证明具有Lebesgue测度的实直线是一个非原子测度空间.

解 (a) (i) 在一个集合上的计数测度的原子恰好是单点集.

(ii) 基于点a的Dirac测度的原子恰好是含有a的集合.

(b) 设$A\subseteq\mathbb{R}$ 可测并且$\lambda^*(A)>0$. 取某个整数n使得$\lambda^*([n,n+1]\cap A)=\delta>0$. 将$[n,n+1]$分割成有限个长度相同的子区间, 并且使它们的长度小于δ . 对其中的一个, 比如说I, 我们一定有

$$\lambda^*([n,n+1]\cap A\cap I)>0.$$

1. 设X是一个集合, $\mathcal{S}=\mathcal{P}(X)$. $\mu:\mathcal{S}\to[0,\infty]$ 定义为, 当A是X的无限子集时, $\mu(A)=\infty$, 当A是X的有限子集时, $\mu(A)=A$ 中的元素个数, 那么称μ 为X上的计数测度. ——译者注

2. 设X是一个集合, $\mathcal{S}=\mathcal{P}(X)$. $a\in X$, $\mu:\mathcal{S}\to[0,\infty)$ 定义为, 当$a\notin A$ 时, $\mu(A)=0$, 当$a\in A$ 时, $\mu(A)=1$, 那么称μ 为X上的Dirac测度. ——译者注

于是，注意到$E=[n,n+1]\cap A\cap I\subseteq A$ 并且E是可测集满足$0<\lambda^*(E)<\delta\leqslant\lambda^*(A)$．这就说明$A$不是一个原子，因此具有Lebesgue测度的$\mathbb{R}$是非原子的．(关于本题更进一步的结果，参见习题18.19．)

习题15.19　本题提供了这样一个测度，它有无穷多种开拓方式可以开拓到由$\mathcal{S}$生成的σ代数上．固定集合X的一个非空真子集A(即，$A\neq X$)并且考虑子集族$\mathcal{S}=\{\varnothing,A\}$．

(a) 证明$\mathcal{S}$是一个半环；

(b) 证明定义为$\mu(\varnothing)=0,\mu(A)=1$ 的集函数$\mu:\mathcal{S}\to[0,\infty]$ 是一个测度；

(c) 描述μ 的Carathéodory开拓[1] μ^*；

(d) 确定可测集的σ代数Λ_μ；

(e) 证明μ有不可数种开拓方式可以开拓到由$\mathcal{S}$生成的σ代数上．这与定理15.10为什么不矛盾？

解　(a)和(b)的正确性显然．

(c) μ 的Carathéodory开拓为

$$\mu^*(B)=\begin{cases}0, & B=\varnothing;\\ 1, & B\neq\varnothing\text{并且}B\subseteq A;\\ \infty, & B\not\subseteq A.\end{cases}$$

(d) 由$\mathcal{S}$生成的σ代数为

$$\mathcal{A}=\{\varnothing,A,A^c,X\}.$$

(e) 如果a是任何非负广义实数，那么定义集函数$\nu:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ 为

$$\nu(\varnothing)=0,\nu(A)=1,\nu(A^c)=a,\nu(X)=1+a,$$

它是一个测度并且是μ 到$\mathcal{A}$上的开拓．这说明μ 到由$\mathcal{S}$生成的σ代数上有不可数种开拓．

最后一个结论与定理15.10不矛盾是因为μ 不是一个σ有限测度．

16. 可测函数

习题16.1　设$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是一个测度空间．对于函数$f:X\to\mathbb{R}$ 证明下列结论是等价的：

(a) f是可测函数；

(b) 对每个$a\in\mathbb{R}$，$f^{-1}((-\infty,a))$ 是可测的；

(c) 对每个$a\in\mathbb{R}$，$f^{-1}((a,\infty))$ 是可测的．

解　(a)⇒(b)注意到$f^{-1}((-\infty,a))$ 是可测的只是因为区间$(-\infty,a)$ 是一个开集．(b)⇒(c)观察到恒等式．

$$f^{-1}((-\infty,a])=\bigcap_{n=1}^{\infty}f^{-1}\left((-\infty,a+\frac{1}{n})\right)$$

1. 由测度μ 生成的外测度μ^* 称为μ 的Carathéodory开拓(参见习题14.10中的注)．——译者注

可推出对每个$a \in \mathbb{R}$，$f^{-1}((-\infty,a])$ 是可测集. 因此, 对每个$a \in \mathbb{R}$，$f^{-1}((a,\infty)) = X \setminus f^{-1}((-\infty,a])$ 也是可测的. (c)⇒ (a)显然, 对每个$a \in \mathbb{R}$，$f^{-1}((-\infty,a]) = X \setminus f^{-1}((a,\infty))$ 是可测的. 因此, 由定理16.2的条件(5)知道, f是可测的.

习题16.2 设$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是一个测度空间, A是$\mathbb{R}$的一个稠密子集. 证明函数$f: X \to \mathbb{R}$ 是可测的当且仅当对每个$a \in A$，集合$\{x \in X : f(x) \geqslant a\}$ 是可测的.

解 只有“充分性”需要证明. 设$a \in \mathbb{R}$. 因为A在R内稠密, 所以存在A的一个点列$\{a_n\}$ 使得对每个n, $a_n < a$，并且$a_n \uparrow a$. 于是, 注意到恒等式

$$f^{-1}([a,\infty)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}([a_n,\infty))$$

说明集合$f^{-1}([a,\infty))$ 是可测的. 因此, 由定理16.2知道, 函数f是可测的.

习题16.3 举出一个不可测函数f使得$|f|$ 是一个可测函数并且对每个$a \in \mathbb{R}$，$f^{-1}(\{a\})$ 是可测集.

解 取$[0,1]$ 的一个Lebesgue不可测集E并且考虑定义为

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in E \\ -x, & x \in [0,1] \setminus E \end{cases}$$

的函数$f:[0,1] \to \mathbb{R}$. 直接可以验证函数f满足所要的性质.

习题16.4 证明如果$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是a.e.连续的, 那么f是Lebesgue可测函数.

解 设$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是几乎处处连续的函数. 令$E = \{x \in \mathbb{R} : f\text{在}x\text{ 处连续}\}$并且注意到$\lambda^*(\mathbb{R} \setminus E) = 0$. 因此, $\mathbb{R} \setminus E$ 和E都是可测集.

于是, 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}$ 的任意开子集. 显然, 集合$f^{-1}(\mathcal{O}) \cap (\mathbb{R} \setminus E)$ (作为一个零集)是可测的. 因为f限制在E上是连续的, 所以$f^{-1}(\mathcal{O}) \cap E$是$E$中的开集, 由此可知存在$\mathbb{R}$ 的一个开子集V使得$f^{-1}(\mathcal{O}) \cap E = V \cap E$. 尤其是, 注意到$f^{-1}(\mathcal{O}) \cap E$ 是可测集. 因此,

$$f^{-1}(\mathcal{O}) = [f^{-1}(\mathcal{O}) \cap E] \cup [f^{-1}(\mathcal{O}) \cap (\mathbb{R} \setminus E)]$$

也是可测的, 从而f是一个可测函数.

习题16.5 设$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是可微函数. 证明f' 是Lebesgue可测的.

解 对每个n定义

$$g_n(x) = n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right] = \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}},$$

并且注意到每个g_n是可测的(因为它是连续的). 由于对一切$x \in \mathbb{R}$，$g_n(x) \to f'(x)$，由定理16.6知道f' 是可测函数.

习题16.6　设$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间并且$f:X\to\mathbb{R}$ 是可测函数. 证明:

(a) 对所有的$p\geqslant 0$, $|f|^p$ 是可测函数;

(b) 如果对一切$x\in X$, $f(x)\neq 0$, 那么$1/f$ 是可测函数.

解　设$f:X\to\mathbb{R}$ 是可测函数.

(a) 假设$p>0$. 由定理16.5知道, $|f|$ 是可测的. 于是由恒等式, 当$a\leqslant 0$ 时, $\{x\in X:|f|^p(x)\geqslant a\}=X$, 当$a>0$ 时, $\{x\in X:|f|^p(x)\geqslant a\}=\{x\in X:|f(x)|\geqslant a^{\frac{1}{p}}\}$, 可得结论.

(b) 假设对一切$x\in X$, $f(x)\neq 0$. 注意到

$\{x\in X:\frac{1}{f}(x)>0\}=\{x\in X:f(x)>0\}$,

$\{x\in X:\frac{1}{f}(x)>a\}=\{x\in X:f(x)<\frac{1}{a}\},a>0$,

$\{x\in X:\frac{1}{f}(x)>a\}=\{x\in X:f(x)<\frac{1}{a}\}\cup\{x\in X:f(x)>0\},a<0$.

前面的恒等式保证了$\frac{1}{f}$ 是可测的.

习题16.7　设$\{f_n\}$ 是测度空间$(X,\mathcal{S},\mu)$ 上的实值可测函数列. 证明集合

(a) $A=\{x\in X:f_n(x)\to\infty\}$;

(b) $B=\{x\in X:f_n(x)\to-\infty\}$;

(c) $C=\{x\in X:\lim\ f_n(x)$ 在$\mathbb{R}$中存在$\}$ 都是可测的.

解　(a) 对一切m和k设$A_{m,k}=\{x\in X$: 对所有的$n\geqslant m,\ f_n(x)\geqslant k\}$. 由$A_{m,k}=\bigcap_{n=m}^{\infty}\{x\in X:f_n(x)\geqslant k\}$, 我们看到对一切$m,k,\ A_{m,k}\in\Lambda_\mu$. 然后, 注意到$A=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}A_{m,k}$.

(b) 令$B_{m,k}=\{x\in X:$对一切$n\geqslant m,f_n(x)\leqslant -k\}$ 并且注意到$B=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}B_{m,k}$.

(c) 设$Y=X\backslash(A\cup B)$并且考虑测度空间$(Y,\mathcal{S}_Y\ ,\ \mu^*\ )$. 另外, 考虑所有限制在$Y$上的函数. 由习题15.7知道, 所有的函数关于该空间是可测的. 由定理16.6知道两个函数$\liminf f_n$和$\limsup f_n$都是可测的,通过观察

$$\begin{aligned}C&=\{x\in X:\lim f_n(x)\text{在}\mathbb{R}\text{中存在}\}\\&=\{x\in Y:\limsup f_n(x)=\liminf f_n(x)\},\end{aligned}$$

于是由定理16.4(c)就能得到结论.

习题16.8　设$(X,\mathcal{S}\ ,\mu\ ,)$是测度空间. 假设$f:X\to\mathbb{R}$ 是可测函数而且$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是连续函数. 证明$g\circ f:X\to\mathbb{R}$是可测函数.

解　考虑函数$X\xrightarrow{f}\mathbb{R}\xrightarrow{g}\mathbb{R}$, 其中f可测而g连续, 并且设$\mathcal{O}$ 是R的开子集. 由于g是连续的, 我们知道$g^{-1}(\mathcal{O})$ 是开集, 因此由等式

$$(g\circ f)^{-1}(\mathcal{O})=f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{O}))$$

可得结论.

习题16.9　设$\mathcal{F}$ 是定义在$\mathbb{R}$上实值连续函数构成的非空函数族. 假设存在一个函数$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$使得对一切$x\in\mathbb{R}$和所有的$f\in\mathcal{F}$ 有$f(x)\leqslant g(x)$. 证明由$h(x)=\sup\{f(x):f\in\mathcal{F}\}$ 定义的上确界函数$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是(Lebesgue)可测的.

解 我们将证明对一切$a \in \mathbb{R}$, $h^{-1}((a,\infty))$ 是开集(因此是一个开集).

为了看出这一点，设$a \in \mathbb{R}$并且固定$x_0 \in h^{-1}((a,\infty))$ ，即，$h(x_0) > a$ ．所以，存在某个$f \in \mathcal{F}$ 使得$f(x_0) > a$ ，因为f是连续函数，所以存在x_0的某个领域V使得对一切$x \in V$有$f(x) > a$ ．这可推得对一切$x \in V$ ，$h(x) \geqslant f(x) > a$ ，从而$V \subseteq h^{-1}((a,\infty))$ ．这说明x_0是$h^{-1}((a,\infty))$ 的一个内点并且由此可知，$h^{-1}((a,\infty))$ 是一个开集.

注意 定义在拓扑空间X上的实值函数$f: X \to \mathbb{R}$ 被称作是下半连续的，如果对一切$a \in \mathbb{R}$ ，$f^{-1}((a,\infty))$ 是开集，前面的论证说明我们已经证得如下结果：下半连续函数族的点态上确界也是下半连续的.

习题16.10 证明如果$f: X \to \mathbb{R}$ 是可测函数，那么f要么几乎处处是常数要么(相反地)存在一个常数c使得

$$\mu^*(\{x \in X : f(x) > c\}) > 0 \quad \text{而且} \quad \mu^*(\{x \in X : f(x) < c\}) > 0.$$

解 设$f: X \to \mathbb{R}$ 是一个可测函数，它不是几乎处处为常数的，首先假设对一切$x \in X, f(x) \geqslant 0$ 并且设

$$c_0 = \sup\{c \in \mathbb{R} : \mu^*(\{x \in X : f(x) \leqslant c\}) = 0\}.$$

显然，$0 \leqslant c_0 < \infty$ 并且$\mu^*(\{x \in X : f(x) < c_0\}) = 0$ ．因为f不是几乎处处为常数的，所以存在某个$c > c_0$ 使得$\mu^*(\{x \in X : f(x) > c\}) > 0$ ．于是，如果k满足$c_0 < k < c$ ，那么由c_0的定义我们有$\mu^*(\{x \in X : f(x) < c\}) \geqslant \mu^*(\{x \in X : f(x) \leqslant k\}) > 0$ ，并且在这种情形下证得所要的结论.

在一般情形下，要么f^+要么f^-不是几乎处处为常数的．我们考虑f^+不是几乎处处为常数的情形(另一种情形可以类似地处理)．由前面的情形，存在$c > 0$使得$\mu^*(\{x \in X : f^+(x) > c\}) > 0$ 并且$\mu^*(\{x \in X : f^+(x) < c\}) > 0$ ．为了完成证明，只要注意到

$$\{x \in X : f^+(x) > c\} = \{x \in X : f(x) > c\}$$

和

$$\{x \in X : f^+(x) < c\} = \{x \in X : f(x) < c\}.$$

17. 简单函数[1]和阶梯函数[2]

习题17.1 对集合X的子集A和B，证明如下结论:

---

1. 只取有限个值的可测函数$\phi : X \to \mathbb{R}$ 称为简单函数，若设$a_1, \cdots, a_n$是ϕ 所取得的非零函数值，$A_i = \{x \in X : \phi(x) = a_i\}$ ，是互不相交的可测集，那么$\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ 称为ϕ 的标准表示.
——译者注

2. 一个简单函数$\phi : X \to \mathbb{R}$ 如果可以表示成$\phi = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j}$ ，其中B_j 是具有有限测度的可测集，则称ϕ 是阶梯函数. ——译者注

(1) $\chi_{\varnothing}=\mathbf{0},\ \chi_X=\mathbf{1}$;

(2) $A\subseteq B$ 当且仅当$\chi_A\leqslant\chi_B$.

(3) $\chi_{A\cap B}=\chi_A\cdot\chi_B=\chi_A\wedge\chi_B$.

(4) $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}=\chi_A\vee\chi_B$.

(5) $\chi_{A\backslash B}=\chi_A-\chi_{A\cap B}$.

(6) 如果$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$并且$\{A_n\}$是$X$ 的两两不相交的子集列, 那么$\chi_A=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}$.

(7) $\chi_{A\times B}=\chi_A\cdot\chi_B$. (这里集合$B$当作是其他集合$Y$的子集.)

解　结论的证明是直接的, 为了演示如何证明它们, 我们将证明(3)和(7)的正确性.

(3) 我们有

$$\begin{aligned}\chi_{A\cap B}(x)&=\begin{cases}1, & x\in A\cap B\\ 0, & x\notin A\cap B\end{cases}\\ &=\begin{cases}1, & x\in A\text{并且}x\in B\\ 0, & x\notin A\\ 0, & x\notin B\end{cases}\\ &=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)\\ &=\chi_A\cdot\chi_B(x)\\ &=\min\{\chi_A(x),\chi_B(x)\}.\end{aligned}$$

(7) 注意到

$$\begin{aligned}\chi_{A\times B}(x,y)&=\begin{cases}1, & (x,y)\in A\times B\\ 0, & (x,y)\notin A\times B\end{cases}\\ &=\begin{cases}1, & x\in A\text{并且}y\in B\\ 0, & x\notin A\\ 0, & y\notin B\end{cases}\\ &=\chi_A(x)\cdot\chi_B(y).\end{aligned}$$

习题17.2　设ϕ 是阶梯函数, ψ 是简单函数并且它们几乎处处满足$0\leqslant\psi\leqslant\phi$. 证明$\psi$ 是阶梯函数.

解　设$E=\{x:0\leqslant\psi(x)\leqslant\phi(x)\}$, 并且观察到$\mu^*(X\backslash E)=0$. 如果$F=\{x\in X:\phi(x)>0\}$, 那么可测集$A=(X\backslash E)\cup F$ 满足$\mu^*(A)<\infty$, 并且对一切$x\in X\backslash A$, $\psi(x)=0$[1].

习题17.3　证明如果$(X,\mathcal{S},\mu)$是有限测度空间, 那么每个简单函数都是一个阶梯函数.

解　如果ϕ 是一个简单函数并且$E=\{x\in X:\phi(x)\neq 0\}$, 那么注意到$\mu^*(E)\leqslant\mu^*(X)<\infty$ 成立.

---

1. 本题的解答是利用如下命题: 一个简单函数是一个阶梯函数当且仅当它在一个测度有限的集外为零.

——译者注

习题17.4 利用习题12.14给出积分[1]线性性(定理17.2)的另一种证明.

解 积分的线性性质可由下列性质立刻得到.

- 如果ϕ 是一个阶梯函数并且$\phi=\sum_{j=1}^m b_j\chi_{B_j}$是$\phi$ 的任何表示式, 那么

$$I(\phi)=\sum_{j=1}^m b_j\mu^*(B_j).$$

下面我们来证明这一性质.

为此, 设$\phi=\sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}$是$\phi$ 的标准表示, 假设B_j是互不相交的, 因为去掉$b_j=0$的项, 函数ϕ 或者和式$\sum_{j=1}^m b_j\mu^*(B_j)$ 都不会改变, 所以我们可以假设对一切j, $b_j\neq 0$, 在这种情况下, $\bigcup_{i=1}^n A_i=\bigcup_{j=1}^m B_j$. 另外, 注意到对所有的i和j, $a_i\mu^*(A_i\cap B_j)=b_j\mu^*(A_i\cap B_j)$. 事实上, 如果$A_i\cap B_j=\varnothing$, 那么该等式显然, 如果$x\in A_i\cap B_j$,那么$a_i=b_j=\phi(x)$. 因此

$$\begin{aligned}I(\phi)&=\sum_{i=1}^n a_i\mu^*(A_i)=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n a_i\mu^*(A_i\cap B_j)\\&=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n b_j\mu^*(A_i\cap B_j)=\sum_{j=1}^m b_j\mu^*(B_j).\end{aligned}$$

于是, 考虑一般情形, 由习题12.14, 存在互不相交的可测集$C_1,\cdots,C_k$ 使得每个C_i 都含在某个B_j 中并且$B_j=\bigcup\{C_i:C_i\subseteq B_j\}$. 对一切$i$和$j$, 当$C_i\subseteq B_j$ 时, 设$\delta_i^j=1$, 当$C_i\not\subseteq B_j$ 时, 设$\delta_i^j=0$. 显然, $\chi_{B_j}=\sum_{i=1}^k\delta_i^j\chi_{C_i}$,并且$\mu(B_j)=\sum_{i=1}^k\delta_i^j\mu^*(C_i)$. 因此,

$$\phi=\sum_{j=1}^m b_j\chi_{B_j}=\sum_{j=1}^m b_j\left[\sum_{i=1}^k\delta_i^j\chi_{C_i}\right]=\sum_{i=1}^k\left[\sum_{j=1}^m b_j\delta_i^j\right]\chi_{C_i}.$$

所以, 由前面的情形, 我们有

$$I(\phi)=\sum_{i=1}^k\left[\sum_{j=1}^m b_j\delta_i^j\right]\mu^*(C_i)=\sum_{j=1}^m b_j\left[\sum_{i=1}^k\delta_i^j\mu^*(C_i)\right]=\sum_{j=1}^m b_j\mu^*(B_j).$$

习题17.5 证明对每个阶梯函数ϕ , $|I(\phi)|\leqslant I(|\phi|)$ 成立.

解 由$-|\phi|\leqslant\phi\leqslant|\phi|$ 和积分的单调性(定理17.3), 可得

$$-I(|\phi|)=I(-|\phi|)\leqslant I(\phi)\leqslant I(|\phi|),$$

从而$|I(\phi)|\leqslant I(|\phi|)$成立.

---

1. 设ϕ 是阶梯函数, 有标准表示式$\phi=\sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}$,其中$a_1,\cdots,a_n$是$\phi$ 的互不相同的非零函数值. 称

$$I(\phi)=\sum_{i=1}^n a_i\mu^*(A_i)$$

为ϕ的(Lebesgue)积分. ——译者注

习题17.6 设ϕ 是阶梯函数满足$I(|\phi|) = 0$. 证明$\phi = 0$ a.e.成立.

解 设$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$是$\phi$ 的标准表示式, 那么, 注意到$|\phi| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|\chi_{A_i}$是$|\phi|$ 的一种表示, 因此

$$0 = I(|\phi|) = \sum_{i=1}^{n} |a_i|\mu^*(A_i).$$

因为对一切$1 \leqslant i \leqslant n, |a_i| > 0$ 成立, 所以$\mu^*(A_i) = 0, 1 \leqslant i \leqslant n$, 从而$\phi$ =0 a.e.成立.

习题17.7 设ϕ 是阶梯函数, $A = \{x \in X : \phi(x) \neq 0\}$而且$M = \max\{|\phi(x)| : x \in X\}$. 证明$|I(\phi)| \leqslant M\mu^*(A)$.

解 将积分的单调性(定理17.3)应用于不等式$-M_{\chi_A} \leqslant \phi \leqslant M_{\chi_A}$ 即可.

习题17.8 设$\{\phi_n\}$ 是阶梯函数列, 证明如果ϕ 是阶梯函数, 并且$\phi_n \downarrow \phi$ a.e.成立, 那么$I(\phi_n) \downarrow I(\phi)$ 也成立.

解 如果$\phi_n \downarrow \phi$ a.e.成立, 那么$\phi_n - \phi \downarrow 0$ a.e.也成立, 因此, 由积分的有序连续性(定理17.4), $I(\phi_n) - I(\phi) = I(\phi_n - \phi) \downarrow 0$, 所以$I(\phi_n) \downarrow I(\phi)$.

习题17.9 设$\{\phi_n\}$ 是阶梯函数列并且ϕ 是一个简单函数满足$0 \leqslant \phi_n \uparrow \phi$ a.e.成立, 证明如果$\lim I(\phi_n) < \infty$, 那么ϕ 是一个阶梯函数.

解 假设对一切x, $\phi(x) \geqslant 0$并且$\phi = \sum_{i=1}^{k} a_i\chi_{A_i}$ 是ϕ 的标准表示, 固定i. 那么, 对一切n, 函数$\psi_n = \phi_n \wedge a_i\chi_{A_i}$ 是阶梯函数, $\psi_n \leqslant \phi_n$ 成立, 并且$\psi_n \uparrow \phi \wedge a_i\chi_{A_i} = a_i\chi_{A_i}$ a.e.. 由定理17.6, 我们看到

$$0 \leqslant a_i\mu^*(A_i) = \lim_{n\to\infty} I(\psi_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} I(\phi_n) < \infty,$$

从而$\mu^*(A_i) < \infty$ 对一切$1 \leqslant i \leqslant k$ 成立. 也就是说, ϕ 是一个阶梯函数.

习题17.10 设$(X, \mathcal{S}, \mu)$是测度空间, $f : X \to \mathbb{R}$ 是一个函数. 证明f是可测函数当且仅当存在一个简单函数列$\{\phi_n\}$ 使得对所有的$x \in X$, $\lim \phi_n(x) = f(x)$ 成立.

解 假设f是可测的. 那么f^+和f^-都是可测的. 由定理17.7存在两个简单函数列$\{s_n\}$ 和$\{t_n\}$ 使得对一切$x \in X, 0 \leqslant s_n(x) \uparrow f^+(x)$而且$0 \leqslant t_n(x) \uparrow f^-(x)$. 于是, 注意到$\phi_n = s_n - t_n$ 满足对所有的x, $\phi_n(x) \to f(x)$.

反之, 注意到(由定理16.6)可测函数列的点态极限总是一个可测函数.

习题17.11 设$(X, \mathcal{S}, \mu)$是一个σ 有限测度空间, $f : X \to \mathbb{R}$ 是一个可测函数使得对所有的$x \in X$, $f(x) \geqslant 0$. 证明存在一个阶梯函数列$\{\phi_n\}$ 使得对所有的$x \in X$, $0 \leqslant \phi_n \uparrow f(x)$ 成立.

解 由定理17.7知道存在简单函数列$\{\psi_n\}$ 满足, 对所有的$x \in X$, $0 \leqslant \psi_n(x) \uparrow f(x)$. 于是, 取可测集列$\{E_n\}$ 使得, 对每个n, $\mu^*(E_n) < \infty$, 并且$E_n \uparrow X$.令$\phi_n = \psi_n \wedge \chi_{E_n}$. 那么, $\{\phi_n\}$ 是对一切$x \in X$ 满足$0 \leqslant \phi_n(x) \uparrow f(x)$ 的阶梯函数列.

习题17.12 用Egorov定理(定理16.7)证明积分的有序连续性, 即, 由$\phi_n \downarrow 0$ a.e.可得$I(\phi_n) \downarrow 0$.

解 假设$\{\phi_n\}$ 是某测度空间$(X, \mathcal{S}, \mu)$中的阶梯函数列满足$\phi_n \downarrow 0$ a.e.. 不失一般性, 我们可以假设对一切$x \in X, \phi_n(x) \downarrow 0$, 设$E = \{x \in X : \phi_1(x) > 0\}$ 并且注意到$\mu^*(E) < \infty$. 另外, 设$M = \max\{\phi_1(x) : x \in X\}$.

于是, 设$\varepsilon > 0$. 由Egorov定理(定理16.7)存在可测子集$F \subseteq E$ 使得$\mu^*(F) < \varepsilon$ 并且$\{\phi_n\}$在$E \backslash F$上一致收敛于零, 所以, 存在某个k使得对所有的$x \in E \backslash F$ 和$n \geqslant k$, $0 \leqslant \phi_n(x) < \varepsilon$ 成立. 因此, 当$n \geqslant k$ 时, 我们有

$$0 \leqslant \phi_n \leqslant \varepsilon \chi_{E \backslash F} + M\chi_F \leqslant \varepsilon \chi_E + M\chi_F,$$

并由此根据积分的单调性得到, 对所有的$n \geqslant k$,

$$0 \leqslant I(\phi_n) \leqslant \varepsilon\mu^*(E) + M\mu^*(F) < [\mu^*(E) + M]\varepsilon.$$

这说明$I(\phi_n) \downarrow 0$.

习题17.13 设$(X, \mathcal{S}, \mu)$是测度空间, $f : X \to [0, \infty)$ 是一个函数. 证明f可测当且仅当存在非负常数$c_1, c_2, \cdots$ 和可测集$E_1, E_2, \cdots$ 使得对一切$x \in X$ 有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{E_n}(x)$$

成立.

解 考虑测度空间$(X, \mathcal{S}, \mu)$和非负实值函数$f : X \to [0, \infty)$. 首先假设存在非负常数$c_1, c_2, \cdots$ 和可测集$E_1, E_2, \cdots$ 使得对一切$x \in X$ 有$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{E_n}(x)$ 成立, 如果我们令$\phi_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$, 那么$\phi_n$ 是可测函数(实际上, 它是简单函数)并且对一切$x \in X$, $\phi_n(x) \to f(x)$ 成立, 于是由定理16.6(1)知道函数f必然是一个可测函数.

反之, 假设f是一个可测函数. 由定理17.7存在一个简单函数列$\{\phi_n\}$ 使得$0 \leqslant \phi_n(x) \uparrow f(x)$ 对一切$x \in X$ 成立. 如果我们令$\phi_0 = 0$, 那么对一切$x \in X$ 有$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)]$ 成立. 对每个n记$\phi_n - \phi_{n-1} = \sum_{i=1}^{k_n} c_i^n \chi_{E_i^n}$ 其中对一切i和n, $c_i^n \geqslant 0$. 因此,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} c_i^n \chi_{E_i^n},$$

并且重排前面级数的项就得到我们的结论.

习题17.14 设$(X, \mathcal{S}, \mu)$是有限测度空间满足$\mu^*(X) = 1$, 并且设$E_1, E_2, \cdots, E_{10}$ 是使得$\mu^*(E_i) = 1/3$ 对一切i成立的十个可测集证明存在四个集合使得它们的交集的测度是正的. 如果不是十个集合而是九个集合结论正确吗?

解 考虑阶梯函数$\phi = \sum_{i=1}^{10} \chi_{E_i}$. 显然, 函数$\phi$ 只取整数值并且

$$\phi(x) = \text{集合}\{i \in \{1, \cdots, 10\} : x \in E_i\}\text{的势}^{1}.$$

1. 有限集的势就是集合中元素的个数, 这里是指$\phi(x)$ 等于含有x的E_i 个数. ——译者注

如果对几乎所有的x, $\phi(x) \leqslant 3 = 3\chi_X(x)$，那么

$$3 < \frac{10}{3} = \sum_{i=1}^{10} \mu^*(E_i) = \sum_{i=1}^{10} I(\chi_{E_i}) = I(\phi) \leqslant I(3\chi_X) = 3$$

矛盾. 因此, 可测集

$$A = \{x \in X : \phi(x) \geqslant 4\}$$

一定有正测度.

其次, 设$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 表示每次从E_i 中取出四个作交集所得到的所有非空集合全体; 显然, $k \leqslant \binom{10}{4} = 210$. 于是, 一个简单的推理可以保证$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} A_j$，并且由此容易得到至少存在一个$A_j$ 具有正测度.

由于九个集合结论不正确, 作为反例取$X = [0,1]$，$\mu = \lambda, E_1 = E_2 = E_3 = (0, 1/3), E_4 = E_5 = E_6 = (1/3, 2/3)$，和$E_7 = E_8 = E_9 = (2/3, 1)$.

习题17.15　如果$f : X \to [0,1]$ 是可测函数, 证明要么对某个可测集A, $f(x) = \chi_A(x)$ a.e.要么(相反地)存在一个常数$0 < c < 1/2$ 使得

$$\mu^*(\{x \in X : c < f(x) < 1 - c\}) > 0.$$

解　对每个n设$A_n = \{x \in X : 1/2n < f(x) < 1 - 1/2n\}$. 如果对某个$n$, $\mu^*(A_n) > 0$，那么常数$c = 1/2n$ 满足$\mu^*(\{x \in X : c < f(x) < 1 - c\}) > 0$.

于是, 假设对一切n, $\mu^*(A_n) = 0$. 那么由

$$A_n \uparrow \{x \in X : 0 < f(x) < 1\},$$

我们看到$\mu^*(\{x \in X : 0 < f(x) < 1\}) = 0$. 这容易推出对可测集$A = f^{-1}(\{1\})$ 有$f = \chi_A$ a.e..

习题17.16　设$(X, \mathcal{S}, \mu)$是测度空间, $\phi : X \to \mathbb{R}$ 是一个简单函数, 具有标准表示$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$. 如果$\phi \geqslant 0$ a.e., 那么将和$\sum_{i=1}^{n} a_i\mu^*(A_i)$ 当作一个广义实数(它可能是无穷大). 称该广义实数为ϕ 的**Lebesgue积分**, 记为$I(\phi) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu^*(A_i)$.

(a) 如果ϕ 和ψ 是简单函数使得$\phi \geqslant 0$ a.e., 而且$\psi \geqslant 0$ a.e., 证明$I(\phi + \psi) = I(\phi) + I(\psi)$.

(b) 如果ϕ 和ψ 是简单函数使得$0 \leqslant \phi \leqslant \psi$ a.e., 证明$I(\phi) \leqslant I(\psi)$.

(c) 证明如果两个简单函数列$\{\phi_n\}$，$\{\psi_n\}$ 和函数$f : X \to \mathbb{R}^*$ 满足$0 \leqslant \phi_n \uparrow f$ a.e.而且$0 \leqslant \psi_n \uparrow f$ a.e., 那么$\lim I(\phi_n) = \lim I(\psi_n)$ 成立(其中极限可能是无穷).

(d) 假设$\{\phi_n\}$ 是简单函数列使得$0 \leqslant \phi_n \uparrow \chi_A$ a.e.. 证明$\lim I(\phi_n) = \mu^*(A)$.

(e) 举出某测度空间上的简单函数列$\{\phi_n\}$ 使得$\phi_n \downarrow 0$ (处处)并且$\lim I(\phi_n) \neq 0$.

解　显然, 一个简单函数是一个阶梯函数当且仅当$I(\phi) < \infty$.

(a) 注意到$\phi + \psi$ 是阶梯函数当且仅当ϕ 和ψ 都是阶梯函数. 在这种情形下, 等式$I(\phi + \psi) = I(\phi) + I(\psi)$ 由定理17.2可得. 另一方面, 如果$\phi + \psi$ 不是阶梯函数, 那么要么ϕ要么ψ 不是阶梯函数, 在这种情形下, $I(\phi + \psi) = I(\phi) + I(\psi) = \infty$ 成立.

(b) 如果$I(\psi)=\infty$，那么$I(\phi)\leqslant I(\psi)$ 显然成立, 另一方面, 如果$I(\psi)<\infty$，那么ψ 是阶梯函数. 因此(由习题17.2)ϕ 是阶梯函数, 并且所要的不等式由定理17.3可得.

(c) 如果$\{\phi_n\}$ 和$\{\psi_n\}$ 都是简单函数列, 那么由定理17.5可得结论正确. 因此, 我们只需考虑$\{\phi_n\}$ 是阶梯函数列并且对某个k, $I(\psi_k)=\infty$ 的情形.

由于$\phi_n\wedge\psi_k\uparrow_n f\wedge\psi_k=\psi_k^1$ a.e., 由习题17.9可得$\lim_{n\to\infty}I(\phi_n\wedge\psi_k)=\infty$. 由$\phi_n\wedge\psi_k\leqslant\phi_n$，我们得到$\lim I(\phi_n)=\infty$，因此, 在这种情形下, $\lim I(\psi_n)=\lim I(\phi_n)=\infty$ 成立.

(d) 我们可以假设对一切x, $0\leqslant\phi_n(x)\uparrow\chi_A(x)$ 成立. 如果对每个n我们设$A_n=\{x\in X:\phi_n(x)>0\}$，那么每个$A_n$ 是可测的并且$A_n\uparrow A$ 成立. 因为$\chi_{A_n}\uparrow\chi_A$，所以(c)结合定理15.4推出

$$\lim_{n\to\infty}I(\phi_n)=\lim_{n\to\infty}I(\chi_{A_n})=\lim_{n\to\infty}\mu^*(A_n)=\mu^*(A).$$

(e) 考虑具有Lebesgue测度的$\mathbb{R}$，并且设$\phi_n=\chi_{(n,\infty)}$.

习题17.17 设(X,Σ,μ)是测度空间, 其中Σ是σ 代数. 如果对$\mathbb{R}$ 的每个开子集A，$f^{-1}(A)\in\Sigma$, 我们称函数$f:X\to\mathbb{R}$ 是**Σ可测的**. 另外, 用$\mathcal{M}_\Sigma$表示所有Σ可测函数的集合. 证明下列结论:

(a) $\mathcal{M}_\Sigma$是一个函数空间并且是一个函数代数;

(b) $\mathcal{M}_\Sigma$在序列的点态极限下是闭的;

(c) 如果μ 是σ 有限的并且$f:X\to\mathbb{R}$ 是可测函数, 那么存在一个Σ可测函数$g:X\to\mathbb{R}$ 使得$f=g$ a.e..

解 (a)为了证明$\mathcal{M}_\Sigma$在加法和乘法下是闭的, 我们需要Σ可测函数f 和g 的如下性质:

集合(1) $\{x\in X:f(x)>g(x)\}$,

(2) $\{x\in X:f(x)\geqslant g(x)\}$,

(3) $\{x\in X:f(x)=g(x)\}$,

都属于Σ. 为了看出(1), 设$r_1,r_2,\cdots$ 是$\mathbb{R}$ 的有理数的一种排列, 并且注意到

$$\{x\in X:f(x)>g(x)\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\{x\in X:f(x)>r_n\}\cap\{x\in X:g(x)<r_n\}],$$

它属于Σ, 因为它是σ 代数Σ中集合的可数并, 对于(2), 注意到$\{x\in X:f(x)\geqslant g(x)\}=\{x\in X:g(x)>f(x)\}^c$，由(1)知道它属于$\Sigma$. 最后, 对于(3), 观察到

$$\{x\in X:f(x)=g(x)\}=\{x\in X:f(x)\geqslant g(x)\}\cap\{x\in X:g(x)\geqslant f(x)\},$$

由(2)知道它属于Σ.

为了完成(a)的证明, 我们将对Σ可测函数f 和g 证明如下结论成立:

(i) $f+g$ 是Σ可测函数;

(ii) fg 是Σ可测函数;

(iii) $|f|,f^+$ 和f^- 是Σ可测函数;

(iv) $f\vee g$ 和$f\wedge g$ 是Σ可测函数.

---

1. 符号“$\phi_n\wedge\psi_k\uparrow_n f\wedge\psi_k$”表示以$n$为变量的数列的收敛情况, 其中$k$是常量. ——译者注

这些断言的证明如下.

(i) 首先注意到, 如果c 是一个常数, 那么$c-g$ 是Σ可测函数. [理由是: 如果$a\in\mathbb{R}$, 那么$\{x\in X: c-g(x)\geqslant a\}=\{x\in X: g(x)\leqslant c-a\}\in\Sigma$.]于是, 如果$a\in\mathbb{R}$, 那么由前面的观察和(2)知道集合

$$(f+g)^{-1}([a,\infty))=\{x\in X: f(x)+g(x)\geqslant a\}=\{x\in X: f(x)\geqslant a-g(x)\}$$

属于Σ, 这可推出(如何推?)$f+g$是Σ可测函数.

(ii) 首先注意到f^2 是Σ可测函数. 为了看出这一点, 设$a\in\mathbb{R}$. 那么, 当$a<0$ 时, $\{x\in X: f^2(x)\leqslant a\}=\varnothing$, 当$a\geqslant 0$ 时$\{x\in X: f^2(x)\leqslant a\}=f^{-1}([-\sqrt{a},\sqrt{a}])$, 这就推出$f^2$ 是Σ可测函数. 另外, 如果c是常数, 那么cf是可测的. [理由是: 如果$A=\{x\in X: cf(x)\geqslant a\}$, 那么, 当$c>0$ 时, $A=\{x\in X: f(x)\geqslant a/c\}$, 当$c<0$ 时, $A=\{x\in X: f(x)\leqslant a/c\}$.]于是结合(i)和关系式

$$fg=\frac{1}{2}[(f+g)^2-f^2-g^2],$$

由前面的观察可得结果.

(iii) 由关系式

$$\{x\in X: |f(x)|\leqslant a\}=\varnothing, a<0,$$

和

$$\{x\in X: |f(x)|\leqslant a\}=\{x\in X: f(x)\leqslant a\}\cap\{x\in X: f(x)\geqslant -a\}, a\geqslant 0,$$

可得$|f|$ 的Σ可测性, 对于f^+ 和f^- 的Σ可测性, 利用恒等式

$$f^+=\frac{1}{2}(|f|+f)\quad 和\quad f^-=\frac{1}{2}(|f|-f).$$

(iv) 恒等式

$$f\vee g=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)\quad 和\quad f\wedge g=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

说明$f\vee g$ 和$f\wedge g$ 是Σ可测函数.

(b) 假设$\{f_n\}$ 是使得$f_n(x)\to f(x)$ 对一切$x\in X$ 成立的Σ可测函数列. 观察到等式

$$f^{-1}((a,\infty))=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty}f_i^{-1}((a+\frac{1}{n},\infty))$$

和每个f_i 的Σ可测性可证得$f^{-1}((a,\infty))$ 属于Σ, 这就推得f是Σ可测函数.

(c) 我们可以假设对一切$x\in X$, $f(x)\geqslant 0$ (否则, 我们将下面的论证分别应用到f^+ 和f^- 上). 首先假设对某个$A\in\Sigma$, $f=\chi_A$. 因为μ 是σ 有限的, 所以由定理15.11知道存在一个μ 零集C使得$B=A\cup C\in\Sigma$. 因此, 若$g=\chi_B$, 则g是Σ可测的并且$f=g$ μ-a.e.. 由此可得如果ϕ是μ 简单函数, 那么存在一个Σ简单函数ψ 使得$\psi=\phi$ μ-a.e..

于是, 由定理17.7知道, 存在一个简单函数列$\{\phi_n\}$ 使得$\phi_n(x)\uparrow f(x)$ 对一切$x\in X$ 成立. 用Σ简单函数代替每一个ψ_n (同上面一样)我们有$\psi_n(x)\uparrow f(x)$ 对μ 几乎所有的x成立. 所以, 存在一个μ 可测集E使得$\psi_n(x)\uparrow f(x)$ 对一切$x\notin E$ 成立. 于是, 利用定理15.11可以取一个集合$F\in\Sigma$ 使得$E\subseteq F$ 并且$\mu^*(F)=0$. 显然, 对一切$x\in X$ 有$\psi_n(x)\chi_{F^c}(x)\uparrow f(x)\chi_{F^c}(x)=g(x)$. 由(b)知道, g是Σ可测的并且满足$g=f$ μ-a.e..

18. Lebesgue测度

习题18.1 设$I=\prod_{i=1}^n I_i$ 是$\mathbb{R}^n$ 的一个区间. 证明I 是Lebesgue可测的并且$\lambda(I)=\prod_{i=1}^n |I_i|$，其中$|I_i|$ 表示区间I_i 的长度.

解 公式的证明可以按照习题15.3的格式来做, 为了说明这一点, 我们只证明两种情形, 其余情形留给读者.

第一种情形是$I_i=[a_i,b_i]$，其中对一切$1\leqslant i\leqslant n, -\infty<a_i<b_i<\infty$ 成立. 那么, $\prod_{i=1}^n[a_i,b_i+1/k]\downarrow_k \prod_{i=1}^n I_i=I$. 因此, 由定理15.4可得

$$\lambda(I)=\lim_{k\to\infty}\lambda\left(\prod_{i=1}^n\left[a_i,b_i+\frac{1}{k}\right)\right)=\lim_{k\to\infty}\prod_{i=1}^n\left(b_i-a_i+\frac{1}{k}\right)$$
$$=\prod_{i=1}^n(b_i-a_i)=\prod_{i=1}^n|I_i|.$$

第二种情形是$I=[a,\infty)\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$. 那么, 注意到$[a,a+k]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]\uparrow_k I$. 考虑到前一种情形, 由定理15.4可得

$$\lambda(I)=\lim_{k\to\infty}\lambda([a,a+k]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n])$$
$$=\lim_{k\to\infty}k\cdot(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)=\infty=\prod_{i=1}^{\infty}|I_i|.$$

习题18.2 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}$ 的开子集, 证明存在至多可数个互不相交的开区间族$\{I_\alpha:\alpha\in A\}$ 使得$\mathcal{O}=\bigcup_{\alpha\in A}I_\alpha$. 并且, 证明$\lambda(\mathcal{O})=\sum_{\alpha\in A}|I_\alpha|$.

解 设$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}$ 的开子集. 由习题6.11的(g), 我们知道存在至多可数个互不相交的开区间族$\{I_\alpha:\alpha\in A\}$ 使得$\mathcal{O}=\bigcup_{\alpha\in A}I_\alpha$.

于是, 利用每个I_α 的长度与它的Lebesgue测度相同(习题15.3), 我们看到

$$\lambda(\mathcal{O})=\lambda\left(\bigcup_{\alpha\in A}I_\alpha\right)=\sum_{\alpha\in A}\lambda(I_\alpha)=\sum_{\alpha\in A}|I_\alpha|.$$

习题18.3 证明$\mathbb{R}^n$ 的Borel集恰好是由紧集生成的σ 代数中的元素.

解 设$\mathcal{C}$表示由紧集生成的σ 代数. 因为每个紧集是闭的(它是一个开集的余集), 因此$\mathcal{C}\subseteq\mathcal{B}$, 另一方面, 如果$C$是一个闭集并且$C_n=\{x\in C:d(0,x)\leqslant n\}$，那么$\{C_n\}$ 是一个紧集列满足$C_n\uparrow C$. 这就推出$\mathcal{C}$包含了所有的闭集(因此, 包含了所有的开集). 所以, $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{C}$ 也成立, 从而$\mathcal{B}=\mathcal{C}$.

习题18.4 证明$\mathbb{R}^n$ 的子集E是Lebesgue可测的当且仅当对一切$\varepsilon>0$ 存在$\mathbb{R}^n$ 的闭子集F 使得$F\subseteq E$ 并且$\lambda(E\setminus F)<\varepsilon$.

解　假设E是Lebesgue可测的并且$\varepsilon > 0$．因为E^c也是Lebesgue可测的，所以存在一个开集V使得$E^c \subseteq V$并且$\lambda(V \backslash E^c) = \lambda(E \cap V) < \varepsilon$．那么，闭集$C = V^c$满足$C \subseteq E$并且$\lambda(E \backslash C) = \lambda(E \cap V) < \varepsilon$，反之，要么将上面的讨论倒推并且利用定理18.2，要么利用习题14.8.

习题18.5　证明如果[0, 1]的子集E满足$\lambda(E) = 1$，那么E在[0, 1]内稠密.

解　设I是[0, 1]的(非空)子区间. 如果$I \cap E = \varnothing$，那么我们有$\lambda(E) + \lambda(I) = \lambda(E \cup I) \leqslant \lambda([0,1]) = 1$，因此，在这种情形下，$\lambda(E) \leqslant 1 - \lambda(I) < 1$成立，矛盾. 因此，对[0, 1]的一切子区间$I$，$I \cap E \neq \varnothing$成立，从而集合$E$在[0, 1]内稠密.

习题18.6　如果$E \subseteq \mathbb{R}^n$满足$\lambda(E) = 0$，证明$E^\circ = \varnothing$.

解　如果V是非空开集使得$V \subset E$，那么注意到$0 < \lambda(V) \leqslant \lambda(E)$成立. 因此开集$E^\circ$一定是空集.

习题18.7　证明如果E是$\mathbb{R}^n$的Lebesgue可测子集，那么存在一个F_σ集A和一个G_δ集B使得$A \subseteq E \subseteq B$并且$\lambda(B \backslash A) = 0$.

解　由习题18.4，对每个k，存在闭集C_k使得$C_k \subseteq E$并且$\lambda(E \backslash C_k) < \frac{1}{k}$．类似地，由定理18.2，对每个$k$，存在开集$V_k$使得$E \subseteq V_k$并且$\lambda(V_k \backslash E) < 1/k$．令$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ (F_σ集)和$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k$($G_\delta$集). 显然，$A \subseteq E \subseteq B$成立，并且由于

$$\begin{aligned}\lambda(B \backslash A) &\leqslant \lambda(V_k \backslash C_k) = \lambda((V_k \backslash E) \cup (E \backslash C_k))\\ &\leqslant \lambda(V_k \backslash E) + \lambda(E \backslash C_k) < \frac{2}{k}\end{aligned}$$

对一切k成立，我们看到$\lambda(B \backslash A) = 0$.

习题18.8　设$\{E_n\}$是[0, 1]的非空(Lebesgue)可测子集列，满足$\lim \lambda(E_n) = 1$.

(a) 证明对一切$0 < \varepsilon < 1$存在$\{E_n\}$的一个子列$\{E_{k_n}\}$使得$\lambda(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{k_n}) > \varepsilon$；

(b) 证明可能有$\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k = \varnothing$对一切$n = 1, 2, \cdots$成立.

解　设$\{E_n\}$是[0, 1]的非空Lebesgue可测子集列满足$\lim \lambda(E_n) = 1$.

(a) 固定$0 < \varepsilon < 1$，由$\lim \lambda(E_n) = 1$，我们看到存在$\{E_n\}$的一个子列$\{E_{k_n}\}$满足$\lambda(E_{k_n}) > 1 - \frac{1-\varepsilon}{2^n}$．于是，考虑可测集$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{k_n}$和$F = [0,1] \backslash E$．我们有

$$\begin{aligned}\lambda(F) = \lambda([0,1] \backslash E) &= \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} ([0,1] \backslash E_{k_n})\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda([0,1] \backslash E_{k_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} [1 - \lambda(E_{k_n})] < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\varepsilon}{2^n} = 1 - \varepsilon.\end{aligned}$$

因此，$\lambda(E) = 1 - \lambda(F) > 1 - (1 - \varepsilon) = \varepsilon$.

(b) 设$A_k^n = [0,1] \backslash [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}], 1 \leqslant k \leqslant n; n \geqslant 2$．显然，对一切$1 \leqslant k \leqslant n, \lambda(A_k^n) = 1 - 1/n$成立并且对一切$n \geqslant 2$，$\bigcap_{k=1}^{n} A_k^n = \varnothing$成立. 设$E_n$表示序列

$$A_1^2, A_2^2, A_1^3, A_2^3, A_3^3, \cdots, A_1^n, A_2^n, \cdots, A_n^n, A_1^{n+1}, \cdots.$$

于是, 注意到$\lambda(E_n) \to 1$ 并且对一切$n \geqslant 1$ 有$\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k = \varnothing$ 成立.

习题18.9 假设定义在$\mathbb{R}$的子区间I 上的函数$f: I \to \mathbb{R}$ 满足Lipschitz条件. 即, 假设存在一个常数$C > 0$ 使得对所有的$x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|$ 成立, 证明f将(Lebesgue)零集映为零集.

特别地, 如果定义在$\mathbb{R}$ 的子区间上的函数$f: I \to \mathbb{R}$ 有连续导数, 那么f 将零集映为零集.

解 假设函数$f: I \to \mathbb{R}$ 满足题目中的条件. 显然, f 是(一致)连续函数. 特别地, 注意到如果J 是I 的子区间, 那么$f(J)$ 也是$\mathbb{R}$ 的子区间(参见习题16.11(g)), 并且我们的条件推出(如何推?)$f(J)$ 的长度不超过J 的长度的C 倍, 即, $\lambda^*(f(J)) \leqslant C\lambda^*(J)$ 成立.

于是, 设A 是I 的零子集并且$\varepsilon > 0$. 取半开区间序列$\{[a_n, b_n)\}$ 使得

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) \quad 并且 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*([a_n, b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon.$$

因此, $f(A) \subseteq f(\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) \cap I) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f([a_n, b_n) \cap I)$, 从而由前面的讨论可得

$$\begin{aligned}\lambda^*(f(A)) &\leqslant \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f([a_n, b_n) \cap I)\right) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(f([a_n, b_n) \cap I)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} C(b_n - a_n) < C\varepsilon.\end{aligned}$$

因为$\varepsilon > 0$ 是任意的, 我们看到$\lambda^*(f(A)) = 0$, 这就是所要证的.

对于第二部分, 注意到如果$[a, b]$是I 的闭子区间, 那么存在常数$M > 0$ 使得对所有的$t \in [a, b]$ 有$|f'(t)| \leqslant M$. 于是, 如果$x, y \in [a, b]$, 那么(由中值定理)在x 和y 之间存在某个z 使得$f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$. 这就推得对所有$x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$. 所以, 由第一部分知道, f 将$[a, b]$ 的零子集映为零集.

于是, 固定I 的一个闭子区间列$\{[a_n, b_n]\}$ 使得$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ 并且设A 是I 的零子集. 那么$A \cap [a_n, b_n]$ 是$[a_n, b_n]$ 的零子集, 从而$f(A \cap [a_n, b_n])$ 是$\mathbb{R}$ 的零子集, 然后, 注意到恒等式

$$f(A) = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap [a_n, b_n]\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(A \cap [a_n, b_n])$$

保证了$f(A)$ 是$\mathbb{R}$ 的一个零子集.

习题18.10 证明$\mathbb{R}^2$ 中三角形的Lebesgue测度等于它的面积. 另外, 确定$\mathbb{R}^2$ 中圆的Lebesgue测度.

解 首先观察到每个线段的Lebesgue测度为零(为什么?). 因此, 有没有某条边, 三角形的Lebesgue测度是不变的. 另外, 每个三角形是Lebesgue可测的(因为没有边时它是开集). 因为λ 是平移不变的, 我们可以假设所有的三角形都有一个顶点在原点. 设T 是这样的一个三角形. 并且设$A(T)$ 表示它的面积, 由图3.1中的图形(从左到右)我们看到

$$\begin{aligned}2\lambda(T) &= \lambda(T) + \lambda(-T) = \lambda(T) + \lambda(T_2) = \lambda(T) + \lambda(T_1) \\ &= \lambda(T_1 \cup T) = \lambda(P) = \lambda(Q) = A(P) = 2A(T).\end{aligned}$$

即, $\lambda(T) = A(T)$. 特别地, 这可推出多边形的Lebesgue测度等于它的面积.

现在, 设D 是半径为r 的闭圆盘; 参见图3.2. 为了计算它的Lebesgue测度, 我们利用Eudoxus-Archimedes穷举法. 对于每个n , 设P_n 和Q_n 分别表示内接和外接正n 边形, 显然, $P_n \subseteq D \subseteq Q_n$ 成立, 于是, 注意到

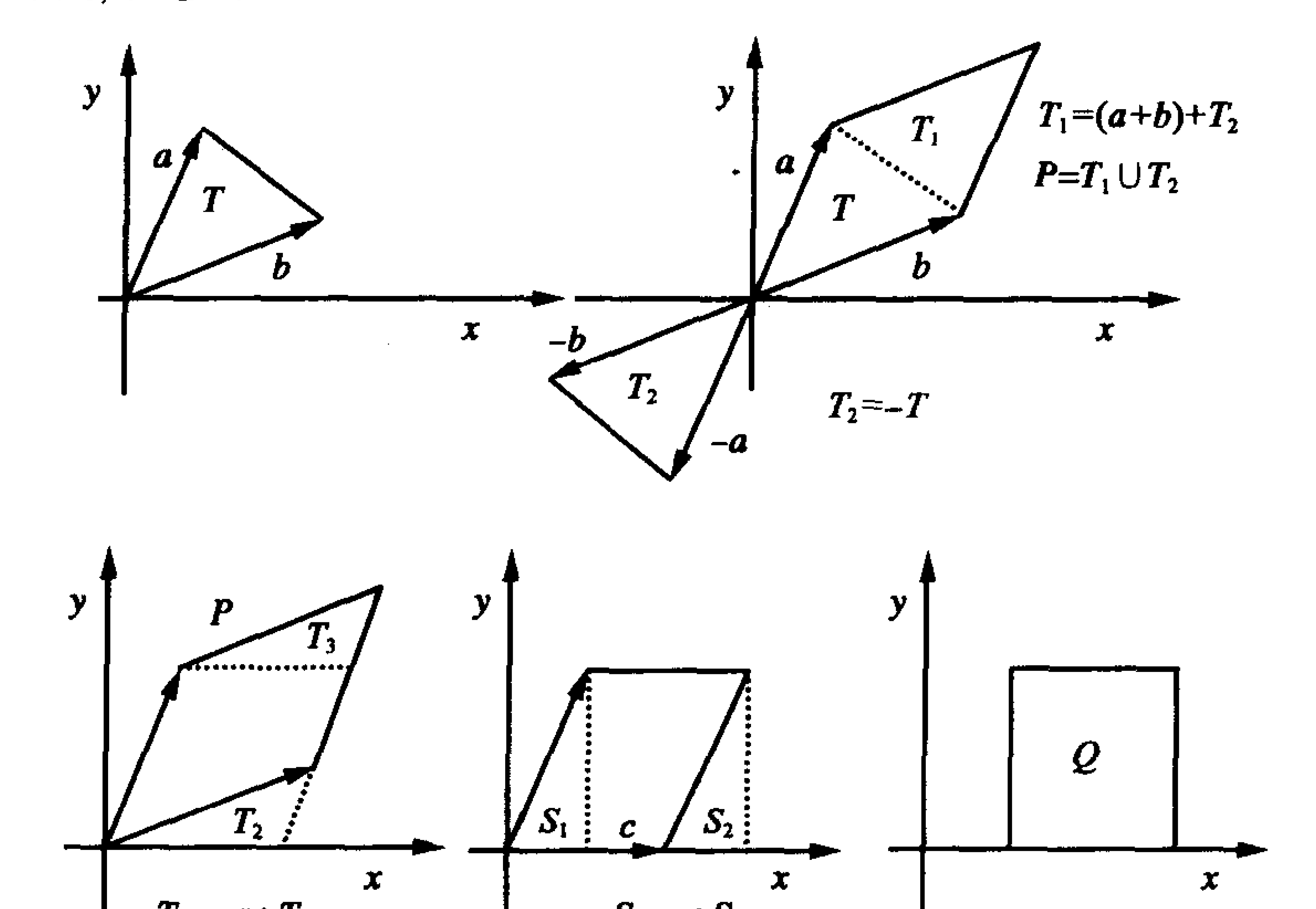
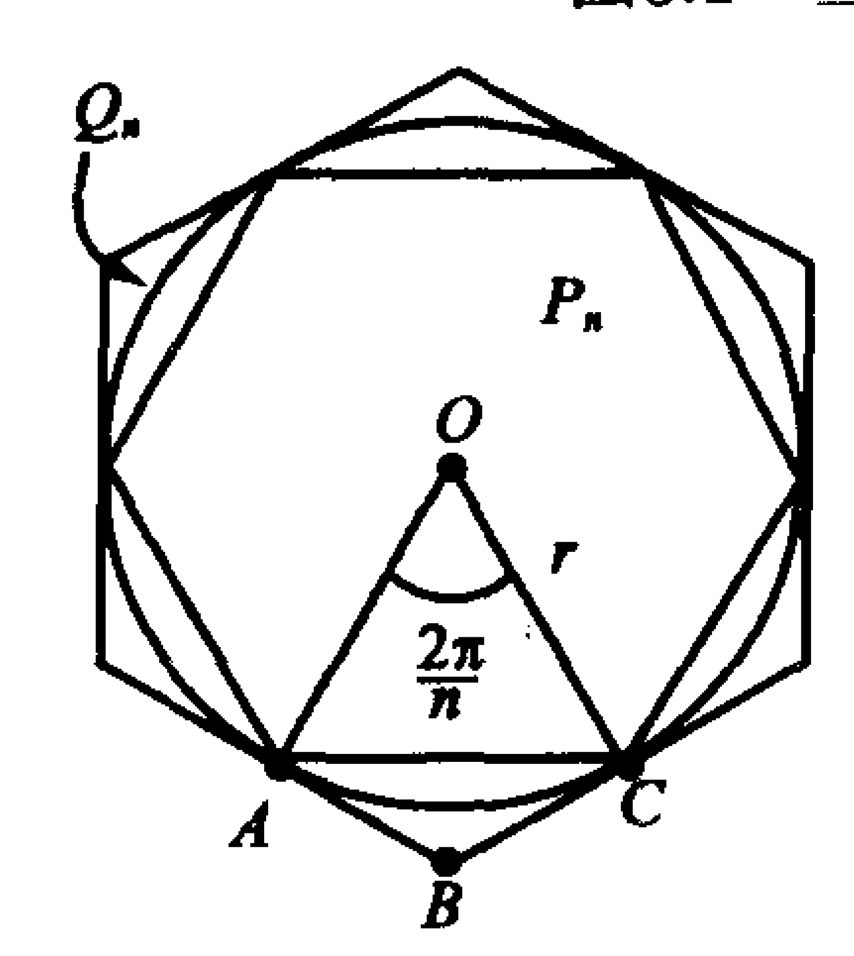


图3.1　三角形的Lebesgue测度



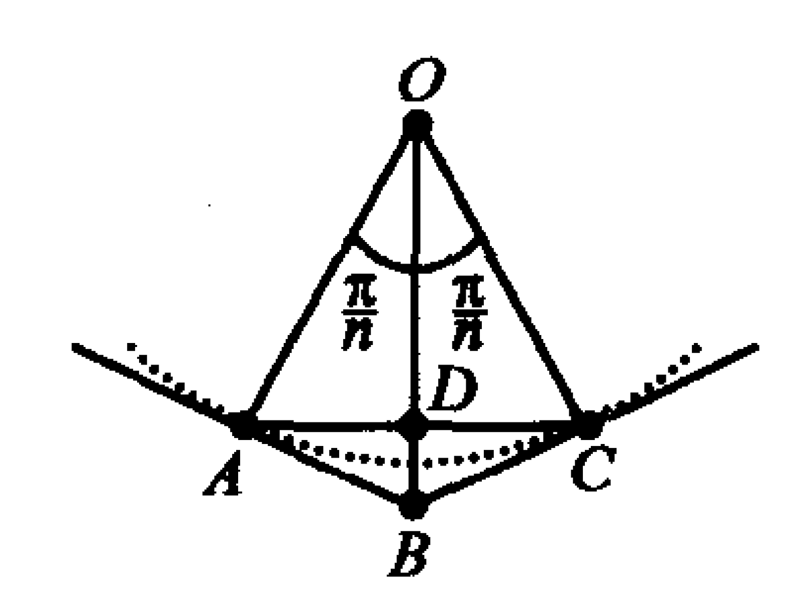


图3.2　圆的Lebesgue测度的计算

$$\lambda(P_n) = \pi r^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\right] \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \leqslant \lambda(D) \leqslant \lambda(Q_n) = \pi r^2 \left[\frac{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\right],$$

从而, 让$n \to \infty$, 我们看到

$$\lambda(D) = \pi r^2 = A(D).$$

习题18.11　如果μ 是$\mathbb{R}^n$ 上一个平移不变的Borel测度[1],证明存在某个$c \geqslant 0$, 使得对$\mathbb{R}^n$ 的所

1. 定义在Borel集上的测度μ 如果对每个紧集K 有$\mu(K) < \infty$, 则称μ 是Borel测度. ——译者注

有子集A，$\mu^*(A)=c\lambda^*(A)$.

解 由定理18.8知道，存在某常数$c\geqslant 0$使得在$\mathcal{B}$上$\mu=c\lambda$成立. 于是，由定理14.10，$(c\lambda)^*=c\lambda^*$成立，因此对$\mathbb{R}^n$的一切子集A有$\mu^*(A)=(c\lambda)^*(A)=c\lambda^*(A)$.

习题18.12 证明$\mathbb{R}$的互不相交的，具有正测度的可测子集构成的集族是至多可数的.

解 设$\mathcal{C}$是$\mathbb{R}$的互不相交的可测子集构成的集族，满足，对一切$C\in\mathcal{C}$，$\lambda(C)>0$成立，对每个n设

$$\mathcal{C}_n=\left\{C\in\mathcal{C}:\lambda(C\cap[-n,n])\geqslant\frac{1}{n}\right\},$$

并且注意到$\mathcal{C}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{C}_n$. 于是，如果$C_1,\cdots,C_k\in\mathcal{C}_n$，那么我们有

$$\frac{k}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda(C_i\cap[-n,n])=\lambda\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k}C_i\right)\cap[-n,n]\right)\leqslant\lambda([-n,n])=2n,$$

从而$k\leqslant 2n^2$成立. 这就说明每个$\mathcal{C}_n$是有限集，因此$\mathcal{C}$是至多可数的.

习题18.13 设G是$\mathbb{R}^n$的真的加法子群[1]，如果G是可测集，证明$\lambda(G)=0$.

解 如果$\lambda(G)>0$，那么，由定理18.13知道，零元素是$G-G$的一个内点. 因为G是一个加法群，$G-G=G$成立，由此可得$G=\mathbb{R}^n$，这就是一个矛盾.

习题18.14 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是可加的(即，对所有的$x,y\in\mathbb{R}, f(x+y)=f(x)+f(y)$)并且是Lebesgue可测的. 证明$f$是连续的——因此，形如$f(x)=cx$.

解 假设$f\neq 0$并且设$\varepsilon>0$. 因为f是可加函数，所以$nf^{-1}([0,\varepsilon])=f^{-1}([0,n\varepsilon])$成立(为什么?). 因此，如果$\lambda(f^{-1}([0,\varepsilon]))=0$，那么对每个$n$有

$$\lambda(f^{-1}([-n\varepsilon,0]))=\lambda(f^{-1}([0,n\varepsilon]))=n\lambda(f^{-1}([0,\varepsilon]))=0$$

成立，从而对所有的n有$\lambda(f^{-1}([-n\varepsilon,n\varepsilon]))=0$. 由

$$f^{-1}([-n\varepsilon,n\varepsilon])\uparrow\mathbb{R},$$

可得$\lambda(\mathbb{R})=0$，这是不可能的. 因此，$\lambda(f^{-1}([0,\varepsilon]))>0$. 因为$f$还是可测的，所以(由定理18.13)存在某个$\delta>0$使得

$$(-\delta,\delta)\subseteq f^{-1}([0,\varepsilon])-f^{-1}([0,\varepsilon])=f^{-1}([-\varepsilon,\varepsilon]).$$

即，$-\delta<x<\delta$可推出$-\varepsilon\leqslant f(x)\leqslant\varepsilon$因此$f$在原点连续，然后应用引理18.7即可.

习题18.15 证明$\mathbb{R}$的真区间的任意并是Lebesgue可测集.

1. G是$\mathbb{R}^n$的子集. 满足：$x,y\in G$，则$x+y\in G$并且$-x\in G$，则称G是$\mathbb{R}^n$的一个加法群.

——译者注

解 设$\{I_\alpha : \alpha \in A\}$是"真"区间族(一个区间是真的只要它的端点$a$和$b$满足$a < b$)并且设$E = \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$. 记$E = \bigcup_{x\in E} C_x$, 其中$C_x$表示$x$在$E$中的分支. 因为每个$x$都属于$E$的真子区间, 我们看到每个$C_x$都是真区间; 参见习题6.11(g). 由于不同的分支C_x是互不相交的, 所以我们看到C_x至多有可数个, 从而E是至多可数个区间的并. 于是, 利用每个区间都是Lebesgue可测集可推知E本身是Lebesgue可测集.

习题18.16 *设C是$\mathbb{R}^n$的无处稠密的闭子集满足$\lambda(C) > 0$. 证明在$\mathbb{R}^n$的任何Lebesgue零集的余集上, 特征函数χ_C不连续, 并且证明可以适当选取一个Lebesgue测度任意小的开集使得χ_C在其余集上连续.*

解 设$A \subseteq \mathbb{R}^n$是Lebesgue零集. 因为$\lambda(C) > 0$并且$\lambda(A) = 0$, 因此$A^c \cap C \neq \varnothing$. 固定某个$a \in A^c \cap C$. 我们断言$\chi_C : A^c \to \mathbb{R}$在$x = a$处不连续.

事实上, 如果$\chi_C : A^c \to \mathbb{R}$在$a$点连续, 那么存在某个开球$B(a, r)$使得对所有的$x \in B(a,r) \cap A^c$有$\chi_C(x) = 1$; 即, $B(a,r) \cap A^c \subseteq C$成立. 因为$\lambda(A) = 0$, 所以$B(a,r) \cap A^c$在$B(a,r)$内稠密, 因此, $B(a,r) \subseteq C$ (因为$B(a,r) \cap A^c \subseteq C$并且$C$是闭的), 此与$C$是无处稠密集矛盾.

于是, 设$\varepsilon > 0$. 由定理18.2, 存在一个开集V使得$C \subseteq V$并且$\lambda(V \backslash C) < \varepsilon$, 注意到集合$O = V \backslash C = V \cap C^c$是开的, 并且$\lambda(O) < \varepsilon$. 我们断言$\chi_C : O^c \to \mathbb{R}$是连续的.

为了看出这一点, 设$a \notin O = V \cap C^c$. 我们有两种情形.

1) $a \in C$. 因为$C \subseteq V$, 所以存在一个开球$B(a,r)$使得$B(a,r) \subseteq V$. 于是, 注意到

$$B(a,r) \cap O^c = B(a,r) \cap [V^c \cup C] = B(a,r) \cap C \subseteq C.$$

因此, 如果$x \in B(a,r) \cap O^c$, 那么$\chi_C(x) = 1$. 这说明函数$\chi_C : O^c \to \mathbb{R}$, 在$x = a$处连续.

2) $a \in C^c$. 取一个开球$B(a,r)$使得$B(a,r) \subseteq C^c$. 那么,

$$B(a,r) \cap O^c = B(a,r) \cap [V^c \cup C] = B(a,r) \cap V^c \subseteq V^c \subseteq C^c$$

因此, $x \in B(a,r) \cap O^c$, 推得$\chi_C(x) = 0$, 这说明在这种情形下$\chi_C : O^c \to \mathbb{R}$在$x = a$处连续.

习题18.17 *设$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是连续函数. 证明$f$的图形*

$$G = \{(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n)) : (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$$

的$n+1$维Lebesgue测度是零.

解 分别用λ_{n+1}和λ_n表示$n+1$维和n维Lebesgue测度. 固定某个k并且设$A = [-k,k] \times \cdots \times [-k,k]$. 然后, 设$\varepsilon > 0$, 由$f$在$A$上的一致连续性, 存在某个$\delta > 0$使得当$x, y \in A$, 并且$|x_i - y_i| < \delta, 1 \leqslant i \leqslant n$, 那么$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 固定$[-k,k]$的一个分割$P$使得网格[1]$|P| < \delta$, 并

1. 这里分割$P = \{t_0, t_1, \cdots, t_m\}$, 其中$t_0 = -k < t_1 < \cdots < t_m = k$, 而网格$|P|$就是分割$P$的最大分割区间长度$\max\{t_j - t_{j-1}, j = 1, \cdots, m\}$. ——译者注

且设$Q = P \times \cdots \times P$. 那么, Q 将A 分割成有限个互不相同的胞腔, 比如说是$A_1, \cdots, A_p$. (注意到对应于$A_1, \cdots, A_p$ 的开胞腔是互不相交的). 对每个$1 \leqslant i \leqslant p$ 固定$a_i \in A_i$, 并且设$I_i = [f(a_i) - \varepsilon, f(a_i) + \varepsilon]$. 那么, $G_k \subseteq \bigcup_{i=1}^{p}(A_i \times I_i)$ 成立, 从而

$$\lambda_{n+1}(G_k) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_{n+1}(A_i \times I_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_n(A_i) \cdot 2\varepsilon = (2k)^n \cdot 2\varepsilon$$

对所有$\varepsilon > 0$ 成立. 这说明对一切k , $\lambda_{n+1}(G_k) = 0$. 为了完成证明, 于是将定理15.4应用到$G_k \uparrow G$.

习题18.18 设X 是Hausdorff拓扑空间, 并且设μ 是X 上的正则[1]的Borel测度, 证明下列结论:

(a) 如果A 是X 的任意子集, 那么

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(\mathcal{O}) : \mathcal{O}\text{是开的并且}A \subseteq \mathcal{O}\};$$

(b) 如果A 是X 的可测子集使得$\mu^*(A) < \infty$, 那么

$$\mu^*(A) = \sup\{\mu(K) : K\text{是紧的并且}K \subseteq A\};$$

(c) 如果μ 是σ 有限的并且A 是X 的可测子集, 那么

$$\mu^*(A) = \sup\{\mu(K) : K\text{是紧的并且}K \subseteq A\}.$$

解 (a) 因为每个σ 集是Borel集, 所以习题15.2说明

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B\text{是满足}A \subseteq B\text{的Borel集}\}.$$

于是, 利用定义18.4[2]的性质(2)可得所要结论.

(b) 设A 是满足$\mu^*(A) < \infty$ 的可测集并且设$\varepsilon > 0$. 取一个开集V 使得$A \subseteq V$ 并且$\mu^*(V) < \mu^*(A) + \varepsilon$. 类似地, 取一个开集$W$ 使得$V \backslash A \subseteq W \subseteq V$ 并且

$$\mu^*(W) < \mu^*(V \backslash A) + \varepsilon = \mu^*(V) - \mu^*(A) + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

1. 参见译者的下一条注. ——译者注

2. 定义18.4: 设(x, τ) 是Hausdorff拓扑空间, 并且设$\mathcal{B}$是它的Borel集的σ 代数. 测度$\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ 叫做正则的Borel测度如果它满足如下性质:

(1) 对每个紧集K , $\mu(K) < \infty$.

(2) 如果B 是X 的Borel子集, 那么

$$\mu(B) = \inf\{\mu(\mathcal{O}) : \mathcal{O}\text{是开的并且}B \subseteq \mathcal{O}\}.$$

(3) 如果$\mathcal{O}$是X 的开子集, 那么

$$\mu(\mathcal{O}) = \sup\{\mu(K) : K\text{是紧的并且}K \subseteq \mathcal{O}\}.$$

——译者注

接下来, 取一个紧集C 使得$C \subseteq V$ 并且$\mu^*(V) < \mu^*(C) + \varepsilon$. 令$K = C \cap W^c$, 并且注意到K 是A 的一个紧子集. 另外,

$$0 \leqslant \mu^*(A) - \mu^*(K) = \mu^*(A \backslash K) \leqslant \mu^*(V \backslash K)$$
$$= \mu^*((V \backslash C) \cup W) \leqslant [\mu^*(V) - \mu^*(C)] + \mu^*(W) < 3\varepsilon$$

成立, 由此得到所要的结论.

(c) 直接利用(b)可得.

习题18.19　*设A 是$\mathbb{R}$ 的具有正测度的(Lebesgue)可测子集并且$0 < \delta < \lambda(A)$, 证明存在A 的一个可测子集B 满足$\lambda(B) = \delta$.*

解　我们将提供两种解法. 第一解法要利用选择公理(通过Zorn引理); 第二种解法既不用选择公理也不假设A 是可测集.

(a) 考虑$\mathbb{R}$ 的可测集A 和某个δ , $0 < \delta < \lambda(A)$. 因为$\lambda(A \cap [-n, n]) \uparrow \lambda(A)$ 成立, 所以用某个$A \cap [-n, n]$ 代替A , 我们可以假设$\lambda(A) < \infty$ 也成立.

接下来, 我们用$\mathcal{A}$表示由所有这样的集族$\mathcal{C}$构成的集合. $\mathcal{C}$是A 的互不相交可测子集构成的集族使得:

a) $\lambda(C) > 0$ 对一切$C \in \mathcal{C}$ 成立(从而$\mathcal{C}$是至多可数的);

b) Lebesgue可测集$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ 满足$\lambda(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C) \leqslant \delta$.

由习题15.18容易看出$\mathcal{A} \neq \varnothing$. 在包含关系$\subseteq$ 下集合$\mathcal{A}$是偏序集. 我们断言偏序集$(\mathcal{A}, \subseteq)$ 满足Zorn引理的条件. 为了看出这一点, 设$\{\mathcal{C}_i : i \in I\}$ 是$\mathcal{A}$的一个链(即, 对每一对$i, j \in I$, 要么$\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}_j$ 正确, 要么$\mathcal{C}_j \subseteq \mathcal{C}_i$ 正确). 如果我们能够证明$\mathcal{C} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_i \in \mathcal{A}$, 那么我们的断言就被证明了. 首先注意到如果$B, C \in \mathcal{C}$, 那么至少存在一个$i \in I$ 使得$B, C \in \mathcal{C}_i$, 从而$B \cap C = \varnothing$. 尤其是, $\mathcal{C}$是至多可数的. 于是, 如果$B_1, \cdots, B_k \in \mathcal{C}$, 那么对某个i 也一定有$B_1, \cdots, B_k \in \mathcal{C}_i$ 成立(为什么?), 从而$\lambda(\bigcup_{r=1}^k B_r) \leqslant \lambda(\bigcup_{B \in \mathcal{C}_i} B) \leqslant \delta$. 因为$\mathcal{C}$是至多可数的, 因此$\lambda(\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B) \leqslant \delta$. 即$\mathcal{C} \in \mathcal{A}$.

于是, 由Zorn引理, 集合$\mathcal{A}$ 有一个极大元, 比如说是$\mathcal{C}$. 如果$B = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$, 那么我们断言可测集B 满足$\lambda(B) = \delta$ (这就完成了证明). 为了看出这一点, 由反证法假设$\lambda(B) < \delta$, 那么, 我们有$0 < \eta = \delta - \lambda(B) \leqslant \lambda(A) - \lambda(B) = \lambda(A \backslash B)$ 成立, 从而由习题15.18知道, 存在$A \backslash B$ 的可测子集D 满足$0 < \lambda(D) < \eta$ (显然, $D \notin \mathcal{C}$). 由于$B \cap D = \varnothing$ 并且

$$\lambda(B \cup D) = \lambda(B) + \lambda(D) < \lambda(B) + \delta - \lambda(B) = \delta.$$

我们看到$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \cup \{D\} \in \mathcal{A}$. 然而, 这与$\mathcal{C}$的极大性矛盾, 从而$\lambda(B) = \delta$ 一定成立, 这就是所要证的.

(b) 对于这种解法集合A 是满足$\lambda(A) > 0$ 的$\mathbb{R}$ 的任意子集, 同前面一样, 我们可以假设对某个k , $A \subseteq [-k, k]$. 于是考虑定义为

$$f(t) = \lambda(A \cap [-k, t]), t \in [-k, k],$$

的函数$f:[-k,k]\to\mathbb{R}$. 显然, $f(-k)=0$ 并且$f(k)=\lambda(A)$. 我们断言f 是连续函数. 事实上, 如果$-k\leqslant s<t\leqslant k$, 那么

$$f(t)=\lambda(A\cap[-k,t])\leqslant\lambda(A\cap[-k,s])+\lambda(A\cap(s,t])\leqslant f(s)+t-s.$$

因此, $|f(s)-f(t)|\leqslant|t-s|$ 对所有的$s,t\in[-k,k]$ 成立, 从而f 是连续函数.

最后, 由介值定理知道, 存在某个$-k\leqslant x\leqslant k$ 使得A 的子集$B=A\cap[-k,x]$ (如果A 可测那么它可测)满足$f(x)=\lambda(B)=\delta$.

习题18.20 *设E 是$\mathbb{R}$ 的具有有限Lebesgue测度的可测子集, 证明定义为*

$$f_E(x)=\lambda(E\Delta(x+E)),$$

的函数$f_E:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一致连续的.

解 解答分几步进行.

(1) 首先假设$E=(a,b)$ 是$\mathbb{R}$ 的有界开子区间. 在这种情形下, 经过简单计算可证得

$$f_E(x)=\begin{cases}2|x|, & |x|<b-a\\ 2(b-a), & |x|\geqslant b-a.\end{cases}$$

这就保证了f_E 在这种情形下是一致连续的.

(2) 假设E 和F 是使得f_E 和f_F 都一致连续的具有有限Lebesgue测度的$\mathbb{R}$ 子集, 令$G=E\cup F$. 我们来证明f_G 也是一致连续的. 为了看出这一点, 首先注意到

$$|\chi_G(y)-\chi_{x+G}(y)|\leqslant|\chi_E(y)-\chi_{x+E}(y)|+|\chi_F(y)-\chi_{x+F}(y)|$$

可推得

$$\lambda(G\Delta(x+G))\leqslant\lambda(E\Delta(x+E))+\lambda(F\Delta(x+F)).$$

因此,

$$\begin{aligned}|f_G(x)-f_G(y)|&=|\lambda(G\Delta(x+G))-\lambda(G\Delta(y+G))|\\&\leqslant\lambda([G\Delta(x+G)]\Delta[G\Delta(y+G)])\\&=\lambda((x+G)\Delta(y+G))=\lambda(G\Delta(y-x+G))\\&\leqslant\lambda(E\Delta(y-x+E))+\lambda(F\Delta(y-x+F))\\&=f_E(y-x)+f_F(y-x).\end{aligned}$$

因为f_E 和f_F 是一致连续的, 因此f_G 也是一致连续的. (其实, f_E 和f_F 在原点的连续性才是这里所需要的.)

(3) 由归纳法, 我们可以证明如果$E=\bigcup_{i=1}^n E_i$, 其中E_i 是具有有限Lebesgue测度的可测集, 并且$E_i\cap E_j=\varnothing, i\neq j$, 那么f_E 是一致连续的.

(4) 然后, 设$\varepsilon > 0$. 取有限个互不相交的有界开区间$I_1, \cdots, I_n$ 使得$G = \bigcup_{i=1}^n I_i$ 满足$\lambda(E\Delta G) < \varepsilon$. 那么, 同前面一样, 我们有

$$\begin{aligned} |f_E(x) - f_E(y)| &= |\lambda(E\Delta(x+E)) - \lambda(E\Delta(y+E))| \\ &\leqslant \lambda(E\Delta(y-x+E)) \\ &\leqslant \lambda(E\Delta G) + \lambda(G\Delta(y-x+G)) + \lambda(y-x+G)\Delta(y-x+E)) \\ &< 2\varepsilon + \lambda(G\Delta(y-x+G)) \\ &= 2\varepsilon + f_G(y-x). \end{aligned}$$

这容易推出f_E 一定是一致连续函数.

19. 依测度收敛

习题19.1 设$\{f_n\}$是可测函数列并且$f : X \to \mathbb{R}$. 假设对每个$\varepsilon > 0$ 有$\lim \mu^*(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0$ 成立. 证明f 是可测函数.

解 取一个严格单调递增的正整数列$\{k_n\}$ 使得对所有的$k > k_n$, $\mu^*(\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geqslant 1/n\}) < 2^{-n}$ 成立. 对每个n, 令

$$E_n = \left\{x \in X : |f_{k_n}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right\},$$

并且设$E = \cap_{m=1}^\infty \cup_{n=m}^\infty E_n$, 那么, 对所有的$m$ 有

$$\mu^*(E) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{n=m}^\infty E_n\right) \leqslant \sum_{n=m}^\infty \mu^*(E_n) \leqslant 2^{1-m}$$

成立, 因此$\mu^*(E) = 0$. 另外, 如果$x \notin E$, 那么存在某个m 使得$x \notin \bigcup_{n=m}^\infty E_n$, 从而$|f_{k_n}(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$ 对一切$n \geqslant m$ 成立. 因此, 对一切$x \notin E$, $\lim f_{k_n}(x) = f(x)$, $f_{k_n} \to f$ a.e.成立. 后者容易推得(由定理16.6)f 是可测函数.

习题19.2 假设$\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}$[1] 满足$f_n \uparrow$ 并且$f_n \xrightarrow{\mu} f$[2]. 证明$f_n \uparrow f$ a.e.成立.

解 由定理19.4知道存在$\{f_n\}$ 的一个子列$\{f_{k_n}\}$ 使得$f_{k_n} \to f$ a.e.成立. 因为$f_n \uparrow$, 所以容易得到$f_n \uparrow f$ a.e.成立.

习题19.3 如果$\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}$ 满足$f_n \xrightarrow{\mu} f$ 并且对一切n, $f_n \geqslant 0$ a.e., 证明$f \geqslant 0$ a.e.成立.

解 因为, 由定理19.4我们知道, $\{f_n\}$ 的某个子列几乎处处收敛于f, 所以我们一定有$f \geqslant 0$ a.e.成立.

---

1. $\mathcal{M} = \{f \in R^x : f$ 是μ 可测的$\}$. ——译者注
2. $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 是指对任何$\varepsilon > 0$ 有$\lim \mu^*(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0$ 成立. ——译者注

习题19.4 设$\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}$ 和$\{g_n\} \subseteq \mathcal{M}$ 满足$f_n \xrightarrow{\mu} f$, $g_n \xrightarrow{\mu} g$, 并且对一切n, $f_n = g_n$ a.e.. 证明$f = g$ a.e.成立.

解 因为$f_n \xrightarrow{\mu} f$ 推出对$\{f_n\}$ 的每个子列$\{f_{k_n}\}$ 有$f_{k_n} \xrightarrow{\mu} f$, 所以通过两个子列(如果必要), 我们可以取一个严格单调递增的正整数列$\{k_n\}$ 使得$f_{k_n} \to f$ a.e.并且$g_{k_n} \to g$ a.e.. 这容易推出$f = g$ a.e..

习题19.5 设$(X, \mathcal{S}, \mu)$是一个有限测度空间. 假设$\mathcal{M}$ 的两个序列$\{f_n\}$ 和$\{g_n\}$ 满足$f_n \xrightarrow{\mu} f$ 和$g_n \xrightarrow{\mu} g$. 证明$f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$. 如果$\mu^*(X) = \infty$, 该结论正确吗?

解 由定理19.4知道, $\{f_n g_n\}$ 的唯一可能的极限是fg. 因此, 如果$f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$ 不成立, 那么存在$\varepsilon > 0$ 和$\delta > 0$ 以及$\{f_n g_n\}$ 的某个子列(我们仍然用$\{f_n g_n\}$ 来表示)使得

$$\mu^*(\{x \in X : |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \geqslant \varepsilon\}) \geqslant \delta \qquad (\bigstar)$$

对所有的n 成立. 由于$f_n \xrightarrow{\mu} f$, 且$g_n \xrightarrow{\mu} g$, 定理19.4说明对$\{f_n g_n\}$ 的某个子列$\{f_{k_n} g_{k_n}\}$ 我们一定有$f_{k_n} g_{k_n} \to fg$ a.e.. 于是, 注意到(由定理19.5)$f_{k_n} g_{k_n} \xrightarrow{\mu} fg$ 成立, 与($\bigstar$)矛盾. 因此, $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$ 成立.

如果$\mu^*(X) = \infty$, 那么结论不再正确. 例如: 取$X = (0, \infty)$ 具有Lebesgue测度, 考虑函数$f_n(x) = \sqrt{x^4 + x/n}$ 和$f(x) = x^2$. 那么$f_n \xrightarrow{\lambda} f$, 而$f_n^2 \not\xrightarrow{\lambda} f^2$.

习题19.6 证明一个有限测度空间上的可测函数列$\{f_n\}$ 依测度收敛于f 当且仅当$\{f_n\}$ 的每个子列都有a.e.收敛于f 的子列.

解 结论由定理19.4和定理19.5立刻得到.

习题19.7 定义$\mathcal{M}$ 的一个序列是μ- Cauchy序列只要对每个$\varepsilon > 0$ 和$\delta > 0$ 都存在某个k (依赖于ε 和δ)使得当$n, m \geqslant k$ 时$\mu^*(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \varepsilon\}) < \delta$ 成立.

证明$\mathcal{M}$ 的序列$\{f_n\}$ 是一个μ- Cauchy序列当且仅当存在一个可测函数f 使得$f_n \xrightarrow{\mu} f$.

解 如果$f_n \xrightarrow{\mu} f$, 那么包含关系

$$\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant 2\varepsilon\} \subseteq \{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \cup \{x : |f_m(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}$$

容易推出$\{f_n\}$ 是一个μ- Cauchy序列.

反之, 假设$\{f_n\}$ 是一个μ- Cauchy序列. 只要证明$\{f_n\}$ 有一个子列依测度收敛(为什么?). 为此, 首先取$\{f_n\}$ 的一个子列$\{g_n\}$ 满足

$$\mu^*(\{x : |g_n(x) - g_m(x)| \geqslant 2^{-n}\}) < 2^{-n}$$

对所有的$m \geqslant n$ 成立. 设$E_n = \{x : |g_{n+1}(x) - g_n(x)| \geqslant 2^{-n}\}$. 而且, 设

$$F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = \{x : |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \geqslant 2^{-k}\text{对某个}k \geqslant n\text{成立}\}.$$

显然, $\mu^*(F_n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mu^*(E_k) \leqslant 2^{1-n}$ 对所有的n成立, 因此可测集$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ 满足$\mu^*(F) = 0$. 于是, 注意别对每个固定的$x \notin F$ 存在某个正整数k_x 使得$x \notin F_n$ 对所有的$n \geqslant k_x$ 成立. 因

此, 对$n \geqslant k_x$, 我们有

$$|g_{n+p}(x) - g_n(x)| \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} |g_{i+1}(x) - g_i(x)| \leqslant 2^{1-n}.$$

所以, 对每个$x \notin F$, $\{g_n(x)\}$ 是一个实的Cauchy数列. 因此, 存在一个函数$g \in \mathcal{M}$ 使得$g_n(x) \to g(x)$ 对一切$x \notin F$ 成立.

于是, 如果$n > k$ 并且$x \notin F_n$, 那么

$$|g_{n+1}(x) - g_{n+p}(x)| \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} |g_{i+1} - g_i(x)| \leqslant 2^{-n}$$

可推得$|g_{n+1}(x) - g(x)| \leqslant 2^{-n} < 2^{-k}$ 对所有$n > k$ 成立. 因此,

$$\{x \in X : |g_{n+1}(x) - g(x)| \geqslant 2^{-k}\} \subseteq F_n$$

对所有$n > k$ 成立. 最后, 为了看出$g_n \xrightarrow{\mu} g$ 成立, 注意到当$n > k$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} &\{x \in X : |g_n(x) - g(x)| \geqslant 2^{1-k}\} \\ &\subseteq \{x \in X : |g_n(x) - g_{n+1}(x)| \geqslant 2^{-k}\} \cup \{x \in X : |g_{n+1}(x) - g(x)| \geqslant 2^{-k}\} \\ &\subseteq E_n \cup F_n = F_n. \end{aligned}$$

20. 抽象可测性

习题20.1　设$\mathcal{R}$是一个非空集合X 的子集族, 证明$\mathcal{R}$是一个环[1]当且仅当$\mathcal{R}$在对称差和有限交下是封闭的.

解　首先假设非空集族$\mathcal{R}$是一个环. 即, 假设$A, B \in \mathcal{R}$ 推出$A \cup B \in \mathcal{R}$ 而且$A \backslash B \in \mathcal{R}$. 那么恒等式

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \quad \text{和} \quad A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$$

容易推得$\mathcal{R}$在对称差和有限交下是封闭的.

反之假设$\mathcal{R}$在对称差和有限交下是封闭的. 那么, 恒等式

$$A \backslash B = A \Delta (A \cap B) \quad \text{和} \quad A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$$

保证了$\mathcal{R}$是一个环.

习题20.2　如果$\mathcal{R}$是集合X 的一个子集环, 证明集族

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : \text{要么}A\text{属于}\mathcal{R}\text{要么}A^c\text{属于}\mathcal{R}\}$$

是一个集合代数.

1. 一个非空的集合X 的子集族$\mathcal{R}$称为一个环, 如果$A, B \in \mathcal{R}$, 那么$A \cup B \in \mathcal{R}$ 而且$A \backslash B \in \mathcal{R}$.

——译者注

解　由$\mathcal{A}$的定义, 容易得到如果$A \in \mathcal{A}$, 那么$A^c \in \mathcal{A}$, 即, $\mathcal{A}$在余集运算下封闭.

于是, 假设$A, B \in \mathcal{A}$. 如果$A, B \in \mathcal{R}$, 那么因为$\mathcal{R}$(是一个环)在有限并下是封闭的, 所以我们$A \cup B \in \mathcal{R}$ 从而$A \cup B \in \mathcal{A}$. 如果A^c , $B^c \in \mathcal{R}$, 那么$A^c \backslash (A^c \backslash B^c) \in \mathcal{R}$, 从而

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c = [A^c \backslash (A^c \backslash B^c)]^c \in \mathcal{A}.$$

于是, 假设$A \in \mathcal{R}$ 并且$B^c \in \mathcal{R}$. 那么, $B^c \backslash A = B^c \cap A^c \in \mathcal{R}$, 并因此(由$\mathcal{A}$的定义), 有$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{A}$. 前面就证得$\mathcal{A}$是一个代数.

习题20.3　在图3.3所示的蕴含体系中, 通过证明下列关于不可数集X的结论, 说明没有其他蕴含关系正确.

(a) X的所有单点集连同空集构成的集族是一个半环但不是一个环;

(b) X的所有有限子集构成的集族是一个环, 但既不是一个代数也不是一个σ环;

(c) X的这样子集, 或者有限, 或者其余集有限, 构成的集族是一个代数但既不是一个σ代数也不是一个σ环;

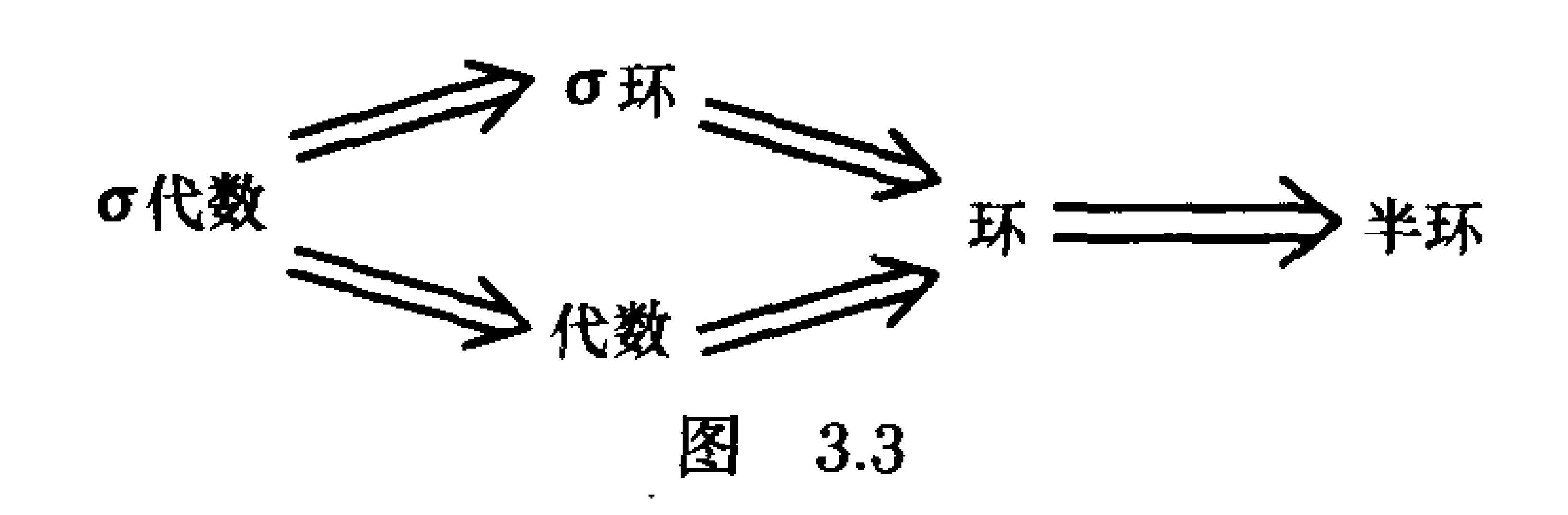


图　3.3

(d) X的至多可数子集构成的集族是一个σ环但不是代数;

(e) X的要么至多可数要么其余集至多可数的子集构成的集族是一个σ代数(其实, 它是由单点集生成的σ代数).

解　(a) 如果A和B是单点集, 那么$A \cap B$ 和$A \backslash B$要么是空集要么是单点集. 这说明所有单点集连同空集构成的集族是一个半环. 然而, 显然单点集的有限并未必是单点集, 从而所有单点集的集族不是一个代数.

(b) 设$\mathcal{R}$表示(无限集)X的所有有限子集构成的集族. 如果$A, B \in \mathcal{R}$, 那么$A \cup B$ 和$A \backslash B$是有限集, 从而$A \cup B$ 和$A \backslash B$属于$\mathcal{R}$. 这说明$\mathcal{R}$是一个环. 因为有限集的余集是无限的, 所以$\mathcal{R}$在余集运算下不是封闭的, 从而$\mathcal{R}$不是一个代数.

为了看出$\mathcal{R}$不是一个σ环, 设$A = \{a_1, a_2, \cdots\}$是X的一个可数子集, 并且对每个n设$A_n = \{a_n\} \in \mathcal{R}$. 那么, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \notin \mathcal{R}$, 这说明$\mathcal{R}$不是一个σ环.

(c) 如果$\mathcal{R}$是所有有限子集构成的环, 那么由(b)知道集族

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : 要么A属于\mathcal{R}要么A^c属于\mathcal{R}\}$$

是一个集合代数. 为了看出$\mathcal{A}$不是一个σ环(因此也不是一个σ代数), 设$A = \{a_1, a_2, \cdots\}$是X的可数子集使得$X \backslash A$是无限集. 显然, $A \notin \mathcal{A}$. 另一方面, 如果$A_n = \{a_n\}$, 那么$A_n \in \mathcal{A}$ 并且$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \notin \mathcal{A}$. 这说明$\mathcal{A}$不是σ环.

(d) 设$\mathcal{C}$表示X的所有至多可数的子集构成的集族. 显然, $A, B \in \mathcal{C}$ 蕴含着$A \backslash B \in \mathcal{C}$. 另外, $\mathcal{C}$在可数并下是封闭的(回想起至多可数个至多可数集的并仍然是至多可数的; 参见定

理2.6). 因此, $\mathcal{C}$是一个σ环. 然而, 当X是不可数集时, $\mathcal{C}$在余集运算下是不封闭的, 因此它不是一个代数.

(e) 这是习题12.7.

习题20.4 证明一个Dynkin系统[1] 是一个σ代数当且仅当它在有限交下是封闭的.

解 设$\mathcal{D}$是一个在有限交下封闭的Dynkin系统. 因为$\mathcal{D}$在余集运算下也封闭, 所以容易看出(利用恒等式$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$)$\mathcal{D}$实际上是一个代数. 因此, 如果$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 并且$\{A_n\} \subseteq \mathcal{D}$, 那么令$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{D}$, 并且注意到$B_n \uparrow A$, 我们看到$A \in \mathcal{D}$. 换句话说, $\mathcal{D}$是一个σ代数.

习题20.5 举出一个Dynkin系统不是代数的例子.

解 考虑集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$, 并且设

$$\mathcal{D} = \{\varnothing, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, X\}.$$

那么$\mathcal{D}$是一个Dynkin系统(为什么?), 它不是一个代数(因为{1,2}∪ {1,3}={1,2,3}不属于$\mathcal{D}$).

习题20.6 集合的单调类是X的一个子集族$\mathcal{M}$使得如果$\mathcal{M}$的序列$\{A_n\}$满足$A_n \uparrow A$或$A_n \downarrow A$, 那么$A \in \mathcal{M}$. 证明下面关于单调类的性质:

(a) 我们有下面的蕴含关系:

$$\sigma\text{代数} \Rightarrow \text{Dynkin系统} \Rightarrow \text{单调类}.$$

举例说明在前面的体系中没有其他蕴含关系正确;

(b) 一个代数是一个单调类当且仅当它是一个σ代数;

(c) 由一个代数$\mathcal{A}$生成的σ代数$\sigma(\mathcal{A})$是包含$\mathcal{A}$的最小单调类.

解 (a) 蕴含体系可由涉及到的三个集类的定义立刻得到. 不是代数的Dynkin系统的例子可由上一题给出. 于是, 如果$X = \{1, 2\}$, 那么集族$\mathcal{M} = \{X, \{1\}\}$是单调类但不是Dynkin系统.

(b) 设$\mathcal{A}$是一个集合代数. 如果$\mathcal{A}$是一个σ代数, 那么它显然是一个单调类. 反之假设代数$\mathcal{A}$是一个单调类.

假设$\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ 并且令$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. 设$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$ 并且注意到$B_n \uparrow A$. 因为$\mathcal{A}$是一个单调类, 所以$A \in \mathcal{A}$, 从而$\mathcal{A}$是一个σ代数.

(c) 设$\mathcal{A}$是一个集合代数并且$\mathcal{M}$是包含$\mathcal{A}$的最小单调类, 即$\mathcal{M}$是所有包含$\mathcal{A}$的单调类的交. 显然, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$.

设$\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{M} : \text{对每个} A \in \mathcal{A}, B \backslash A \in \mathcal{M}\}$. 一个简单的证明可推得$\mathcal{C}$是包含$\mathcal{A}$的单调类, 从而$\mathcal{M} = \mathcal{C}$. 于是, 设

$$\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{M} :\ \text{对一切} M \in \mathcal{M}, M \backslash B \in \mathcal{M}\}$$

---

1. 集合X的子集族$\mathcal{D}$称为一个Dynkin系统, 如果它满足下面三个性质:

(1) $x \in \mathcal{D}$,

(2) $A, B \in \mathcal{D}$ 和A⊆ B蕴含着$B \backslash A \in \mathcal{D}$,

(3) 只要序列$\{A_n\} \subseteq \mathcal{D}$ 满足$A_n \uparrow A$, 就有$A \in \mathcal{D}$. ——译者注

又有$\mathcal{D}$是满足$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ 的单调类(由于$\mathcal{M} = \mathcal{C}$). 因此, $\mathcal{D} = \mathcal{M}$. 这说明$\mathcal{M}$实际上是一个Dynkin系统. 由Dynkin引理(引理20.8)知道$\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$, 从而$\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A})$.

习题20.7 证明如果X和Y是两个可分的度量空间, 那么$\mathcal{B}_{X\times Y} = \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$[1].

解 假设X和Y是两个任意的拓扑空间. 对X的每个子集A, 设

$$\Sigma_A = \{B \subseteq Y : A \times B \in \mathcal{B}_{X\times Y}\}.$$

由恒等式$A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$,我们看到如果$B, C \in \Sigma_A$, 那么$B \backslash C \in \Sigma_A$. 由$A \times (\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(A \times B_n)$ 可得Σ_A 在可数交下是封闭的. 观察到$\varnothing \in \Sigma_A$, 我们推得Σ_A 是一个σ环. 显然, Σ_A 是一个σ代数当且仅当$Y \in \Sigma_A$.

接下来, 注意到对X的任意开子集$\mathcal{O}$, $V \in \Sigma_{\mathcal{O}}$ 对Y的每个开子集V成立. 因为Y本身是开的, 所以, 如果$\mathcal{O}$是开的, 那么$\Sigma_{\mathcal{O}}$ 是Y的子集的σ代数, 它包含Y的开子集. 因此, 对X的每个开子集$\mathcal{O}$, $\mathcal{B}_Y \subseteq \Sigma_{\mathcal{O}}$. 于是, 设

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : \mathcal{B}_Y \subseteq \Sigma_A\}.$$

正如我们刚刚所观察到的, 对X的每个开子集V有$V \in \mathcal{A}$ 成立. 因为对每个$A \in \mathcal{A}$, $\Sigma_A = \Sigma_{A^c}$ (这一点容易验证), 所以$\mathcal{A}$在余集运算下是封闭的. 而且, 如果$\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$, 那么对$Y$的任意Borel子集$B$, 对每个$n$我们有$A_n \times B \in \mathcal{B}_{X\times Y}$. 换句话说, $\mathcal{A}$在可数交下是封闭的, 从而$\mathcal{A}$是包含了X所有开子集的σ代数. 这可推出$\mathcal{B}_X \subseteq \mathcal{A}$.

刚才我们已经证得: 如果A是X的一个Borel子集并且B是Y的一个Borel子集, 那么$A \times B \in \mathcal{B}_{X\times Y}$. 因此,

$$\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{B}_{X\times Y}.$$

对相反的包含关系, 假设X和Y是两个可分的度量空间. 那么$X \times Y$的每个开子集是形如$V \times U$的集合的至多可数并, 其中V是x的开子集并且U是Y的开子集. 因此, $\mathcal{B}_{X\times Y} \subseteq \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$, 由此可得$\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y = \mathcal{B}_{X\times Y}$.

习题20.8 证明两个可测函数[2]的复合是可测的.

解 假设$(X, \Sigma_1) \xrightarrow{f} (Y, \Sigma_2) \xrightarrow{g} (Z, \Sigma_3)$ 是可测函数. 如果$A \in \Sigma_3$, 那么$g^{-1}(A) \in \Sigma_2$, 从而$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \Sigma_1$. 这说明$g \circ f$ 是可测的.

---

1. 这里$\mathcal{B}_X$表示X上的Borel集全体, $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y = \{A \times B : A \in \mathcal{B}_X$ 并且$B \in \mathcal{B}_Y\}$ 称为$\mathcal{B}_X$和$\mathcal{B}_Y$的乘积σ代数, 类似地还有“乘积半环”等概念. ——译者注

2. 设X是一个集合, Σ 是X的子集构成的σ代数, 称(X, Σ) 是一个可测空间, Σ 中的元素称为X的可测集.

   设(X, Σ_1) 和(Y, Σ_2) 是两个可测空间, 如果函数$f : (X, \Sigma_1) \to (Y, \Sigma_2)$ 满足$f^{-1}(\Sigma_2) \subseteq \Sigma_1$, 则称$f$是$(\Sigma_1, \Sigma_2)$可测的, 简称为$f$是可测的.

   设X和Y是两个拓扑空间, 如果函数$f : (X, \mathcal{B}_X) \to (Y, \mathcal{B}_Y)$ 是可测的, 则称f是Borel可测的.

   设(X, Σ) 是可测空间, Y是拓扑空间, 如果函数$f : (X, \Sigma) \to (Y, \mathcal{B}_Y)$ 是可测的, 则称$f : X \to Y$ 是可测的. ——译者注

习题20.9　如果(X,Σ)是一个可测空间，证明

(a) 定义在X上的所有实值函数全体是一个函数空间而且是一个函数代数；

(b) 任何定义在X上的实值函数，如果它是$(\Sigma,\mathcal{B})$可测函数列的点态极限，那么它本身也是$(\Sigma,\mathcal{B})$可测的.

解　重复习题17.17的解答即可.

习题20.10　设(X,Σ)是一个可测空间. 一个Σ简单函数是任意的这样可测函数$\phi: X\to\mathbb{R}$，ϕ有有限的值域，即，如果ϕ有有限值域并且它的标准表示$\phi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}$满足对一切$i, A_i\in\Sigma$，则称$\phi$是一个$\Sigma$简单函数.

证明函数$f: X\to[0,\infty)$是可测的当且仅当存在一个Σ简单函数列$\{\phi_n\}$使得$\phi_n(x)\uparrow f(x)$对一切$x\in X$成立.

解　证明同定理17.7的证明完全一样. 如下证明.

对每个n设$A_n^i=\{x\in X:(i-1)2^{-n}\leqslant f(x)<i\,2^{-n}\}$，$i=1,2,\cdots,n2^n$，并且注意到，当$i\neq j$时，$A_n^i\cap A_n^j=\varnothing$. 因为$f$是可测的，所以所有的$A_n^i$属于$\Sigma$.

于是，对每个n定义$\phi_n=\sum_{i=1}^{n2^n}2^{-n}(i-1)\chi_{A_n^i}$，并且注意到$\{\phi_n\}$是一个$\Sigma$简单函数列. 另外，一个简单的证明可以说明对所有的x和n有$0\leqslant\phi_n(x)\leqslant\phi_{n+1}(x)\leqslant f(x)$成立. 而且，如果$x$固定，那么对所有充分大的$n$，$0\leqslant f(x)-\phi_n(x)\leqslant 2^{-n}$成立. 这就推得$\phi_n(x)\uparrow f(x)$对所有$x\in X$成立.

习题20.11　利用推论20.10证明，如果测度μ是σ有限的，那么μ^*是μ开拓到$\sigma(\mathcal{S})$上的唯一测度.

解　设$\nu:\sigma(\mathcal{S})\to[0,\infty)$是一个测度满足，$\nu(A)=\mu(A)$对一切$A\in\mathcal{S}$成立. 我们将证明$\nu(A)=\mu^*(A)$对一切$A\in\sigma(\mathcal{S})$成立.

固定$E\in\mathcal{S}$使得$\mu(E)<\infty$并且设

$$\mathcal{S}_E=\{E\cap A:A\in\mathcal{S}\}=\{B\in\mathcal{S}:B\subseteq E\}.$$

显然，$\mathcal{S}_E$是E的子集半环并且μ限制到E上是一个测度. 而且，我们知道(参见习题15.7)由测度空间$(E,\mathcal{S}_E,\mu)$生成的外测度恰好是μ^*到$\mathcal{P}(E)$上的限制. 此外，我们断言，如果$\sigma(\mathcal{S}_E)$表示$\mathcal{S}_E$在$\mathcal{P}(E)$中生成的σ代数，那么

$$\sigma(\mathcal{S}_E)=\{A\cap E:A\in\sigma(\mathcal{S})\}=\{B\in\sigma(\mathcal{S}):B\subseteq E\}. \qquad (\bigstar)$$

为了看出这一点，首先注意到，因为$\{B\in\sigma(\mathcal{S}):B\subseteq E\}$是包含$\mathcal{S}_E$的$\sigma$代数，所以我们有

$$\sigma(\mathcal{S}_E)\subseteq\{B\in\sigma(\mathcal{S}):B\subseteq E\}.$$

另一方面，集族

$$\mathcal{A}=\{A\subseteq X:A\cap E\in\sigma(\mathcal{S}_E)\}$$

是满足$\mathcal{S}\subseteq\mathcal{A}$的$X$的子集$\sigma$代数. 因此，$\sigma(\mathcal{S})\subseteq\mathcal{A}$. 尤其是，如果$B\subseteq E$满足$B\in\sigma(\mathcal{S})$，那么$B\in\mathcal{A}$从而$B=B\cap E\in\sigma(\mathcal{S}_E)$. 所以，$\{B\in\sigma(\mathcal{S}):B\subseteq E\}\subseteq\sigma(\mathcal{S}_E)$，并由此可得($\bigstar$)的正确性.

其次, 注意到, 因为$\mathcal{S}_E$在有限交下是封闭的, $\mu^*(E) = \mu(E) = \nu(E) < \infty$, 并且对所有的$F \in \mathcal{S}_E$, $\nu(F) = \mu(F) = \mu^*(F)$, 所以由推论20.10可得对所有的$F \in \sigma(\mathcal{S})$, $F \subseteq E$, 有$\nu(F) = \mu^*(F)$ 成立.

于是, 设$\{E_n\}$是$\mathcal{S}$的互不相交序列, 满足$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 并且对一切n, $\mu(E_n) < \infty$, 如果$A \in \sigma(\mathcal{S})$, 那么由前面的讨论我们有$\nu(A \cap E_n) = \mu^*(A \cap E_n)$ 成立, 从而

$$\begin{aligned}\nu(A) = \nu(A \cap X) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap E_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap E_n) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n) = \mu^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} A \cap E_n\right) \\ = \mu^*(A \cap X) = \mu^*(A),\end{aligned}$$

完成证明. (关于μ 的开拓还可参见习题15.19.)

习题20.12　证明从一个可测空间到一个度量空间内的可测函数列的一致极限是可测的.

解　设$\{f_n\}$是从可测空间(X, Σ) 到度量空间(Y, d) 内的可测函数列. 假设f是$\{f_n\}$的一致极限. 即, 假设对一切$\varepsilon > 0$, 存在某个n_0使得$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ 对所有的$x \in X$ 和$n \geqslant n_0$ 成立. 通过一个子列, 我们可以假设$d(f_n(x), f(x)) < 1/n$ 对每个n和所有的$x \in X$ 成立.

因为闭集族生成了Y的Borel集, 所以为了证明f的可测性, 只要证明对一切闭集C有$f^{-1}(C) \in \Sigma$. 为此, 设C是Y的闭子集.

设$V_n = \{y \in Y : d(y, C) < \frac{1}{n}\}$. 我们断言

$$f^{-1}(C) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(V_n). \qquad (\bigstar\bigstar)$$

为了看出这一点, 假设$x \in f^{-1}(C)$,即, $f(x) \in C$. 由$d(f_n(x), C) \leqslant d(f_n(x), f(x)) < 1/n$, 我们得到对一切$n$有$f_n(x) \in V_n$ 或$x \in f_n^{-1}(V_n)$. 反过来, 如果对一切n有$f_n(x) \in V_n$, 那么$d(f_n(x), C) < 1/n$ 对一切n成立, 从而如果我们取某个$c_n \in C$ 使得$d(f_n(x), c_n) < 1/n$, 那么我们有

$$d(f(x), C) \leqslant d(f(x), c_n) \leqslant d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), c_n) < 1/n + 1/n = 2/n$$

对一切n成立. 这可推出$d(f(x), C) = 0$. 因为C是闭集, 所以$f(x) \in C$, 或$x \in f^{-1}(C)$.

其次, 利用每个f_n的可测性和V_n是开的这一事实可以得到$f_n^{-1}(V_n) \in \Sigma$ 对一切n成立. 于是, 利用($\bigstar\bigstar$)可得$f^{-1}(C) \in \Sigma$.

习题20.13　设f, $g : X \to \mathbb{R}$ 是两个函数, $\mathcal{B}$表示$\mathbb{R}$ 的Borel集的σ代数. 证明存在一个Borel可测函数$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得$f = h \circ g$ 当且仅当$f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq g^{-1}(\mathcal{B})$ 成立.

解　假设对某个Borel可测函数$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 有$f = h \circ g$ 成立. 固定$B \in \mathcal{B}$ 并且注意到$h^{-1}(B) \in \mathcal{B}$. 因此, $f^{-1}(B) = g^{-1}(h^{-1}(B)) \in g^{-1}(\mathcal{B})$, 从而$f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq g^{-1}(\mathcal{B})$ 成立.

反之, 假设$f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq g^{-1}(\mathcal{B})$. 我们分步建立Borel可测函数h的存在性.

第I步: 假设对某个$A \in f^{-1}(\mathcal{B}), f = \chi_A$.

因为$f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq g^{-1}(\mathcal{B})$ 正确, 所以存在某个$B \in \mathcal{B}$ 使得$A = g^{-1}(B)$. 令$h = \chi_B$, 并注意到$h \circ g = f$.

第II步: 设$f = \sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}$, 其中A_i互不相交并且$A_i \in f^{-1}(\mathcal{B})$. 对一切i取某个$B_i \in g^{-1}(\mathcal{B})$ 使得$A_i = g^{-1}(B_i)$. 如果我们考虑Borel阶梯函数$h = \sum_{i=1}^n a_i\chi_{B_i}$,那么容易看出$h \circ g = f$.

第III步: 一般情形.

在上一题中取$\Sigma = f^{-1}(\mathcal{B})$ 就保证存在$f^{-1}(\mathcal{B})$简单函数列$\{\phi_n\}$ 使得$\phi_n(x) \uparrow f(x)$ 对一切$x \in X$ 成立. 于是, 由第II步, 对每个n存在一个Borel可测函数$h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得$h_n \circ g = \phi_n$. 接下来, 设

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x)\text{存在}\}.$$

可以得到(同习题16.7中一样)$B \in \mathcal{B}$ 并且$h_n(x)\chi_B(x) \to h(x)$ 对一切$x \in \mathbb{R}$ 成立. 对$x \notin B$ 如果我们设$h(x) = 0$,那么$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是Borel可测函数并且满足$h \circ g = f$.

习题20.14　设(X, Σ) 是可测空间, Y, Z_1和Z_2是可分的度量空间并且Ψ 是拓扑空间. 然后, 还假设函数$f_i : X \times Y \to Z_i, (i = 1, 2)$ 是Carathéodory函数[1]而且$g : Z_1 \times Z_2 \to \Psi$ 是Borel可测的. 证明定义为

$$h(x, y) = g(f_1(x, y), f_2(x, y))$$

的函数$h : X \times Y \to \Psi$ 是联合可测的[2].

解　由定理20.15, 每个$f_i : X \times Y \to Z_i$ 都是联合可测的. 这可推出定义为

$$F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

的函数$F : X \times Y \to Z_1 \times Z_2$ 是可测的(为什么?). 因为$g : Z_1 \times Z_2 \to \Psi$ 是$(\mathcal{B}_{Z_1\times Z_2}, \mathcal{B}_\Psi)$可测的并且(由习题20.7)$\mathcal{B}_{Z_1} \otimes \mathcal{B}_{Z_2} = \mathcal{B}_{Z_1\times Z_2}$, 因此$h = g \circ F$ 也是可测的.

习题20.15　设(X, Σ) 是可测空间并且(Y, d)是可分的度量空间. 证明函数$f : X \to Y$ 是可测的当且仅当对每个固定的$y \in Y$, 从X到$\mathbb{R}$ 的函数$x \mapsto d(y, f(x))$ 是可测的.

解　设$f : (X, \Sigma) \to Y$ 是一个从可测空间到可分的度量空间的函数. 对每个$y \in Y$ 定义函数$g_y : X \to \mathbb{R}$ 为$g_y(x) = d(y, f(x))$. 注意到对一切$r > 0$和$y \in Y$,我们有

$$\begin{aligned} f^{-1}(B(y, r)) &= \{x \in X : f(x) \in B(y, r)\} = \{x \in X : d(y, f(x)) < r\} \\ &= \{x \in X : g_y(x) < r\} = g_y^{-1}((-\infty, r)). \end{aligned}$$

---

1. 两个变量的函数$f(x, y)$ 称为是Carathéodory函数, 如果它关于x是可测的, 关于y是连续的.
——译者注

2. 设$(X, \Sigma_1), (Y, \Sigma_2)$; 和(Z, Σ_3) 是三个可测空间, $f : X \times Y \to Z$ 是一个函数, 如果函数$f : (X \times Y, \sigma(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)) \to (Z, \Sigma_3)$ 是可测的, 则称f是联合可测的. ——译者注

假设每个g_y是可测的. 那么, 由前面的恒等式, 我们有$f^{-1}(B(y,r)) = g_y^{-1}((-\infty,r)) \in \Sigma$ 对一切$y \in Y$ 和所有的$r > 0$成立. 因为Y是可分的度量空间. 所以每个开集都可以写成至多可数个开球的并, 从而对一切开集$\mathcal{O}$有$f^{-1}(\mathcal{O}) \in \Sigma$ 成立. 由定理20.6可知, f是可测函数.

反之, 假设f是可测函数并且设$y \in Y$. 当$r > 0$时, $g_y^{-1}((-\infty,r)) = f^{-1}(B(y,r))$, 当$r \leqslant 0$时, $g_y^{-1}((-\infty,r)) = \varnothing$, 由此我们容易推得对一切$y \in Y$, g_y是可测函数.

习题20.16 *设$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是一个σ 有限测度空间, 其中$\mathcal{S}$是一个σ代数. 如果$f : X \to \mathbb{R}$ 是一个Λ_μ可测函数, 证明存在一个$\mathcal{S}$可测函数$g : X \to \mathbb{R}$ 使得$f = g$ a.e.成立.*

解 我们可以假设对一切$x \in X$, $f(x) \geqslant 0$ (否则, 我们将下面的论证分别应用到f^+和f^-上). 如果对某个$A \in \Lambda_\mu$, $f = \chi_A$, 那么一个简单的论证(利用定理15.11)可以证得存在一个零集C使得$B = A \cup C \in \mathcal{S}$. 所以, 如果$g = \chi_B$, 那么g是$\mathcal{S}$可测的并且$f = g$ a.e.成立. 因此, 如果f是一个Λ_μ简单函数, 那么存在一个$\mathcal{S}$简单函数g使得$f = g$ a.e.成立.

于是, 我们考虑一般情形. 由习题20.10知道, 存在一个Λ_μ 简单函数列$\{\phi_n\}$ 对一切$x \in X$ 满足$\phi_n(x) \uparrow f(x)$. 对每个n固定$\mathcal{S}$简单函数ψ_n 使得$\psi_n = \phi_n$ a.e.成立. 由定理15.11, 对每个n存在一个零集$A_n \in \mathcal{S}$ 使得对所有的$x \notin A_n$, $\psi_n(x) = \phi_n(x)$ 成立. 令$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$, 并且注意到$A$是一个零集. 而且, 对一切$x$我们有$\psi_n\chi_{A^c}(x) \uparrow f\chi_{A^c}(x)$. 如果$g = f\chi_{A^c}$, 那么(由习题20.9(b))g是一个$\mathcal{S}$可测函数满足$f = g$ a.e.成立.

第4章 Lebesgue积分

21. 上函数[1]

习题21.1 设L是所有这样的阶梯函数ϕ构成的集合, 对每个ϕ存在有限个S的具有有限测度的元素$A_1, \cdots, A_n$和有限个实数$a_1, \cdots, a_n$使得$\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$. 证明$L$是一个函数空间. L是一个函数代数吗?

解 设$\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ 并且$\psi = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j}$, 其中$A_i$ 和B_j 属于S并且它们都有有限测度. 由习题12.14知道, 存在S的互不相交的集合$C_1, \cdots, C_k$使得每个A_i 和B_j 都能写成一些C_r 的并. 我们可以假设$\bigcup_{r=1}^k C_r = \left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] \cup \left[\bigcup_{j=1}^m B_j\right]$. 于是, 由等式:

(1) $\alpha\phi + \beta\psi = \sum_{r=1}^k (\alpha c_r + \beta d_r)\chi_{C_r}$;

(2) $\phi \vee \psi = \sum_{r=1}^k (c_r \vee d_r)\chi_{C_r}$ 和$\phi \wedge \psi = \sum_{r=1}^k (c_r \wedge d_r)\chi_{C_r}$;

(3) $\phi\psi = \sum_{r=1}^k c_r d_r \chi_{C_r}$,

可以得到所要的每个结论.

习题21.2 考虑定义为, $x \notin (0,1]$ 时$f(x) = 0$,对某个n,$x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ 时$f(x) = \sqrt{n}$ 的函数$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. 证明$f$是一个上函数而$-f$不是上函数.

解 令$A_k = (1/(k+1), 1/k]$ 并且注意到$\lambda(A_k) = 1/k \cdot (k+1)$. 因此, 如果我们设

$$\phi_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}\chi_{A_k},$$

那么$\{\phi_n\}$ 是一个阶梯函数列, 满足$\phi_n(x) \uparrow f(x)$ 对每个x成立. 另一方面, 关系式

$$\int \phi_n \mathrm{d}\lambda = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \cdot \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} \leqslant \sum_{k=1}^\infty k^{-\frac{3}{2}} < \infty$$

保证了f是一个上函数.

因为$-f$没有下界, 所以不存在阶梯函数ϕ 满足$\phi \leqslant -f$. 这就推出$-f$不是一个上函数.

习题21.3 对上一题的上函数f计算$\int f \mathrm{d}\lambda$.

解 我们有$\int f \mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$.

---

1. 函数$f: X \to \mathbb{R}$ 被称为上函数, 如果存在一个阶梯函数函数列$\{\phi_n\}$ 使得

 (1) $\phi_n \uparrow f$ a.e.,

 (2) $\lim \int \phi_n \mathrm{d}\mu < \infty$. ——译者注

习题21.4 证明每个连续函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是上函数——关于$[a,b]$上的Lebesgue测度.

解 对每个n, 设$P_n=\{x_0,x_1,\cdots,x_{2^n}\}$ 是一个分割, 它将$[a,b]$分成2^n个长度都为$(b-a)2^{-n}$的子区间; 即, $x_i=a+i(b-a)2^{-n}$. 设$m_i=\min\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}$, 然后定义

$$\phi_n=\sum_{i=1}^{2^n}m_i\chi_{[x_{i-1},x_i)}.$$

显然, 每个ϕ_n 是阶梯函数. 利用f的一致连续性, 不难看出$\phi_n(x)\uparrow f(x)$ 对所有的$x\in[a,b)$ 成立. 另一方面, 如果$f(x)\leqslant M$ 对每个x成立, 那么$\int\phi_n d\lambda\leqslant M(b-a)$ 对所有的n成立, 这就推出f是一个上函数.

习题21.5 设A是一个可测集, 并且f是一个上函数. 如果$\chi_A\leqslant f$ a.e., 证明$\mu^*(A)<\infty$.

解 取一个阶梯函数列$\{\phi_n\}$ 使得$\phi_n\uparrow f$ a.e.成立. 那么, $\phi_n\wedge\chi_A\uparrow f\wedge\chi_A=\chi_A$ a.e.成立, 从而, 由定理17.6可得

$$\mu^*(A)=\lim_{n\to\infty}\int\phi_n\wedge\chi_A\mathrm{d}\mu\leqslant\lim_{n\to\infty}\int\phi_n\mathrm{d}\mu=\int f\mathrm{d}\mu<\infty.$$

习题21.6 设f是一个上函数, 并且A是具有有限测度的可测集使得$a\leqslant f(x)\leqslant b$ 对一切$x\in A$成立. 证明

(a) $f\chi_A$ 是一个上函数, 而且

(b) $a\mu^*(A)\leqslant\int f\chi_A\mathrm{d}\mu\leqslant b\mu^*(A)$.

解 (a) 取一个阶梯函数列$\{\phi_n\}$ 使得$\phi_n\uparrow f$ a.e.成立. 对每个n, 定义阶梯函数$\psi_n=(\phi_n\chi_A)\wedge b\chi_A$. 那么,

$$\int\psi_n\mathrm{d}\mu\leqslant\int b\chi_A\mathrm{d}\mu=b\mu^*(A)<\infty.$$

因为$\psi_n\uparrow f\chi_A$ a.e.成立, 所以$f\chi_A$ 是上函数.

(b) 将积分的单调性(定理21.5)应用于不等式$a\chi_A\leqslant f\chi_A\leqslant b\chi_A$.

习题21.7 设$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是有限测度空间, f是正可测函数. 证明f是上函数当且仅当存在一个实数M 使得$\int\phi\mathrm{d}\mu\leqslant M$ 对所有满足$\phi\leqslant f$ a.e.的阶梯函数ϕ 成立. 并且证明, 这时有

$$\int f\mathrm{d}\mu=\sup\{\int\phi\mathrm{d}\mu:\phi\text{是满足}\phi\leqslant f\text{ a.e.的阶梯函数}\}.$$

解 如果f是上函数, 那么由定理21.5知, 任何满足$\phi\leqslant f$ a.e.的阶梯函数ϕ 满足$\int\phi\mathrm{d}\mu\leqslant\int f\mathrm{d}\mu<\infty$.

相反地, 由定理17.7存在简单函数列$\{\phi_n\}$ 使得$\phi_n\uparrow f$ a.e.. 因为$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是有限测度空间, 所以我们知道每个ϕ_n 都是阶梯函数. 如果$\int\phi_n\mathrm{d}\mu\leqslant M$ 对所有n成立, 那么由此容易得到f是一个上函数.

最后的公式由定理21.5立刻得到.

习题21.8 证明每个单调函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是一个上函数——关于$[a,b]$上的Lebesgue测度.

解 我们假设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是单调递增函数. "单调减情形"类似可证把它留给读者.

由习题9.8我们知道f的所有不连续点集D是一个至多可数集. 特别是, $\lambda(D)=0$. 于是, 对每个n, 设P_n是将$[a,b]$分割成2^n个长度相等的子区间的分割. 即, 设$P_n=\{a_0^n,a_1^n,\cdots,a_{2^n}^n\}$, 其中$a_i^n=a+\frac{b-a}{2^n}i$, $i=0,1,\cdots,2^n$. 其次, 对每个$1\leqslant i\leqslant 2^n$设

$$m_i^n=\inf\{f(x):x\in[a_{i-1}^n,a_i^n]\},$$

并且令$\phi_n=\sum_{i=1}^{2^n}m_i^n\chi[a_{i-1}^n,a_i^n]$. 显然, 每个$\phi_n$是一个阶梯函数, 并且由$f$的单调性, 我们有

$$\phi_n(x)\leqslant\phi_{n+1}(x)\leqslant f(x)$$

对所有$x\in[a,b)$成立. 令$E=D\cup P_1\cup P_2\cup P_3\cup\cdots$并且注意到$\lambda(E)=0$. 我们将证明$\phi_n(x)\uparrow f(x)$对一切$x\in[a,b]\backslash E$成立.

为此, 固定某个$t\in[a,b]\backslash E$并且设$\varepsilon>0$. 因为f在t点连续, 所以存在某个$\delta>0$使得

$$当x\in[a,b],\ 并且t-\delta<x<t+\delta 时, f(t)-\varepsilon<f(x)<f(t)+\varepsilon. \qquad (\bigstar)$$

其次, 取某个k使得对所有的$n\geqslant k$, $(b-a)/2^n<\delta$成立, 然后取P_k的子区间$[x_{i-1},x_i]$使得$t\in(x_{i-1},x_i)$. 由($\bigstar$)容易得到

$$\phi_k(t)=\inf\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}\geqslant f(t)-\varepsilon.$$

因此, $f(t)-\varepsilon\leqslant\phi_k(t)\leqslant\phi_n(t)\leqslant f(t)$对所有的$n\geqslant k$成立, 这就证得$\phi_n(t)\uparrow f(t)$, 也就是我们所说的.

最后, 注意到f的单调性保证了$m_i^n\leqslant f(b)$对所有的$1\leqslant i\leqslant 2^n$成立. 由此可得对每个$n$

$$\int\phi_n\mathrm{d}\lambda=\sum_{i=1}^{2^n}m_i^n(a_i^n-a_{i-1}^n)\leqslant f(b)\sum_{i=1}^{2^n}(a_i^n-a_{i-1}^n)=f(b)(b-a)<\infty,$$

这就证得f是一个上函数.

22. 可积函数

习题22.1 通过反例说明可积函数全体不构成代数.

解 考虑函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 它定义为, $x\notin(0,1]$时$f(x)=0$, 对某个$n,x\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$时$f(x)=\sqrt{n}$. 由习题21.2我们知道$f$是可积函数. 于是, 注意到$f^2$不是可积函数.

习题22.2 设X是一个非空集合, 并且设δ是X上关于点a的Dirac测度(参见例13.4). 证明每个函数$f:X\to\mathbb{R}$是可积的并且$\int f\mathrm{d}\delta=f(a)$.

解 注意到$f=f(a)\chi_{\{a\}}$ a.e.成立. 因此, 函数f是可积的并且$\int f\mathrm{d}\delta=f(a)\delta(\{a\})=f(a)$.

习题22.3 设μ 是$\mathbb{N}$ 上的计数测度(参见例13.3). 证明一个函数$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 是可积的当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty}|f(n)|<\infty$. 并且证明这时有$\int f\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$.

解 设$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. 因为每个函数是可测的, 所以f可积当且仅当f^+和f^-都可积. 因此, 我们可以假设$f(k)\geqslant 0$ 对一切k成立.

如果$\phi_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)\chi_{\{k\}}$, 那么$\{\phi_n\}$ 是阶梯函数列使得$\phi_n(k)\uparrow_n f(k)$ 对一切k成立, 并且

$$\int\phi_n\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{n}f(k)\uparrow_n\sum_{k=1}^{\infty}f(k).$$

这说明f可积当且仅当$\sum_{k=1}^{\infty}f(k)<\infty$, 并且这时有$\int f\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{\infty}f(k)$ 成立.

习题22.4 证明可测函数f可积当且仅当$|f|$可积. 举出一个不可积函数使得它的绝对值是可积的.

解 应用定理22.2和定理22.6. 反例: 设E是[0,1]的一个Lebesgue不可测集并且考虑函数$f=\chi_E-\chi_{[0,1]\setminus E}$.

习题22.5 设f是可积函数, 并且设$\{E_n\}$ 是X的互不相交的可测子集列. 如果$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, 证明

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f\mathrm{d}\mu.$$

解 设$F_n=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$. 显然, $|f\chi_{F_n}|\leqslant|f|$ 对一切n成立并且$f\chi_{F_n}\to f\chi_E$ a.e.成立. 因此, 由Lebesgue控制收敛定理. 我们有

$$\begin{aligned}\int_E f\mathrm{d}\mu&=\int f\chi_E\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int f\chi_{F_n}\mathrm{d}\mu\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\int f\chi_{E_i}\mathrm{d}\mu\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

习题22.6 设f是可积函数. 证明对每个$\varepsilon>0$ 都存在某个$\delta>0$ (依赖于ε)使得$\left|\int_E f\mathrm{d}\mu\right|<\varepsilon$ 对所有满足$\mu^*(E)<\delta$ 的可测集成立.

解 考虑可积函数f并且设$\varepsilon>0$. 由$0\leqslant|f|\wedge n\uparrow|f|$ 及Lebesgue控制收敛定理我们得到$\int|f|\wedge n\mathrm{d}\mu\uparrow\int|f|\mathrm{d}\mu$. 所以, 存在某个$n_0$ 使得$\int(|f|-|f|\wedge n)\mathrm{d}\mu<\varepsilon/2$ 对所有的$n\geqslant n_0$ 成立. 于是, 令$\delta=\varepsilon/2n_0$ 并且注意到, 如果可测集E满足$\mu^*(E)<\delta$, 那么

$$\begin{aligned}\left|\int_E f\mathrm{d}\mu\right|&\leqslant\int_E|f|\mathrm{d}\mu=\int_E(|f|-|f|\wedge n_0)\mathrm{d}\mu+\int_E|f|\wedge n_0\mathrm{d}\mu\\&\leqslant\int(|f|-|f|\wedge n_0)\mathrm{d}\mu+\int_E n_0\mathrm{d}\mu\\&<\frac{\varepsilon}{2}+n_0\mu^*(E)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

这就是我们所需要的.

习题22.7　证明对每个可积函数f, 集合

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

都可以表示成可数个具有有限测度的可测集的并——称之为σ 有限集.

解　每个$E_n = \{x \in X : |f(x)| \geqslant 1/n\}$ 是可测集, 并且由定理22.5知道, $\mu^*(E_n) < \infty$ 成立. 于是, 观察到

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

习题22.8　设$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 关于Lebesgue测度是可积的. 证明定义为

$$g(t) = \sup\left\{\int |f(x+y) - f(x)| d\lambda(x) : |y| \leqslant t\right\},\ t \geqslant 0,$$

的函数$g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ 在$t = 0$处连续.

解　设$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个上函数并且$\{\phi_n\}$ 是满足$\phi_n \uparrow f$ a.e.的阶梯函数列. 固定某个y, 并且注意到$\phi_n(x+y) \uparrow f(x+y)$ 对几乎所有的x成立. 因为$\chi_A(x+y) = \chi_{A-y}(x)$ 并且$\lambda(A) = \lambda(A-y)$, 所以$f(x+y)$ 作为x的函数是可积的并且$\int f(x+y)\mathrm{d}\lambda(x) = \int f\mathrm{d}\lambda$. 因此, 如果f是可积的, 那么对一切固定的y, $f(x+y)$关于x是可积的并且$\int f(x+y)\mathrm{d}\lambda(x) = \int f\mathrm{d}\lambda$ 成立. 尤其是, 对每个固定的y, 我们有$\int |f(x+y) - f(x)|\mathrm{d}\lambda(x) \leqslant \int |f(x+y)|\mathrm{d}\lambda(x) + \int |f(x)|\mathrm{d}\lambda(x) = 2\int |f|\mathrm{d}\lambda < \infty$.

于是, 对每个可积函数$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和$t \geqslant 0$, 定义

$$g_f(t) = \sup\left\{\int |f(x+y) - f(x)|\mathrm{d}\lambda(x) : |y| \leqslant t\right\} \geqslant 0.$$

那么, 我们有

$$g_{f+h}(t) \leqslant g_f(t) + g_h(t) \quad \text{而且} \quad g_{\alpha f}(t) = |\alpha| g_f(t).$$

这些关系式证得集合

$$L = \{f : f\text{可积并且}g_f\text{在原点连续}\}$$

是一个向量空间. 而且, L 有如下近似性质:

- 如果f是可积函数使得对每个$\varepsilon > 0$ 都存在某个$h \in L$ 满足$\int |f - h|\mathrm{d}\lambda < \varepsilon$, 那么$f \in L$.

事实上, 如果f是一个这样的函数并且$\varepsilon > 0$ 给定, 那么取$h \in L$ 使得$\int |f - h|\mathrm{d}\lambda < \varepsilon$. 取某个$\delta > 0$ 使得当$0 < t < \delta$ 时, $g_h(t) < \varepsilon$, 并且注意到对$|y| \leqslant t$ 我们有

$$\begin{aligned}
&\int |f(x+y) - f(x)|\mathrm{d}\lambda(x) \\
&\leqslant \int |f(x+y) - h(x+y)|\mathrm{d}\lambda(x) + \int |h(x+y) - h(x)|\mathrm{d}\lambda(x) + \int |h - f|\mathrm{d}\lambda \\
&< 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

因此, 对所有的$0 < t < \delta$, $g_f(t) \leqslant 3\varepsilon$ 成立, 从而$f \in L$.

于是, 假设$f = \chi_{[a,b)}$. 如果$0 < t < b - a$, 那么对$|y| \leqslant t$ 我们有

$$\int |f(x+y) - f(x)| \mathrm{d}\lambda(x) = \int |\chi_{[a-y,b-y)}(x) - \chi_{[a,b)}(x)| \mathrm{d}\lambda(x)$$
$$= \lambda([a-y, b-y)\Delta[a,b)) = 2|y| \leqslant 2t,$$

从而$g_f(t) \leqslant 2t$ 对所有$0 < t < b - a$ 成立, 即, $f \in L$. 由近似性质, 我们有$\chi_A \in L$ 对每个具有有限测度的σ 集A成立, 因此, 由同一个性质, $\chi_A \in L$ 对每个满足$\lambda(A) < \infty$ 的$A \in \Lambda$ 成立(参见习题15.2). 由此可得L包含了阶梯函数. 因为对每个可积函数f和$\varepsilon > 0$ 都存在一个阶梯函数ϕ使得$\int |f - \phi| \mathrm{d}\lambda < \varepsilon$, 所以我们推得L是由所有可积函数构成.

注意 这里我们基本上证明了集合L满足定理22.12的性质(1), (2)和(3). 这就保证了L与所有可积函数构成的向量空间相同.

习题22.9 设g是一个可积函数并且$\{f_n\}$是使得$|f_n| \leqslant g$ 对所有的n都几乎处处成立的可积函数列. 证明如果$f_n \xrightarrow{\mu} f$, 那么f是一个可积函数并且$\lim \int |f_n - f| \mathrm{d}\mu = 0$ 成立.

解 由定理19.4知道, 序列$\{f_n\}$ 有一个子列a.e.收敛于f, 从而$|f| \leqslant g$ a.e.. 因此, 由定理22.6, 函数f是可积的.

假设对某个$\varepsilon > 0$ 存在$\{f_n\}$的一个子列$\{g_n\}$使得$\int |g_n - f| \mathrm{d}\mu \geqslant \varepsilon$. 由定理19.4知道, 存在$\{g_n\}$的一个子列$\{h_n\}$使得$h_n \to f$ a.e.. 于是, 注意到Lebesgue控制收敛定理可推出$0 < \varepsilon \leqslant \int |h_n - f| \mathrm{d}\mu \to 0$, 这是不可能的. 因此, $\lim \int |f_n - f| \mathrm{d}\mu = 0$.

习题22.10 证明定理22.9的如下推广: 如果$\{f_n\}$是一个使得$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \mathrm{d}\mu < \infty$ 成立的可积函数列, 那么$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 定义了一个可积函数并且

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

解 由定理22.9知道级数$g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ 定义了一个可积函数并且$|\sum_{n=1}^{k} f_n| \leqslant g$ 对一切k几乎处处成立. 因为$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 对几乎所有的点收敛, 所以由Lebesgue控制收敛定理知道$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 定义了一个可积函数并且

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

习题22.11 设f是正(a.e.)可测函数, 并且对一切i设

$$e_i = \mu^*(\{x \in X : 2^{i-1} < f(x) \leqslant 2^i\}).$$

证明f可积当且仅当$\sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^i e_i < \infty$.

解 设$E_i = \{x \in X : 2^{i-1} < f(x) \leqslant 2^i\}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 对每个n设$\phi_n = \sum_{i=-n}^{n} 2^i \chi_{E_i}$. 那么, 存在某个函数g使得$\phi_n \uparrow g$ a.e.. 显然, g是可测函数并且$0 \leqslant f \leqslant g$ a.e.成立.

假设f是可积的. 那么, 每个ϕ_n 是阶梯函数, 并且由$\phi_n \leqslant 2f$ (为什么?), 可得

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^i e_i = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n \mathrm{d}\mu \leqslant 2\int f\mathrm{d}\mu < \infty.$$

另一方面, 如果$\sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^i e_i < \infty$, 那么每个ϕ_n 是阶梯函数, 从而g是可积的. 因为$0 \leqslant f \leqslant g$, 所以定理22.6说明f也是可积的.

习题22.12 设$\{f_n\}$是满足$0 \leqslant f_{n+1} \leqslant f_n$ 对一切n几乎处处成立的可积函数列. 证明$f_n \downarrow 0$ a.e. 成立当且仅当$\int f_n \mathrm{d}\mu \downarrow 0$.

解 假设$\int f_n \mathrm{d}\mu \downarrow 0$. 设$f_n \downarrow f$ a.e.; 显然, $f \geqslant 0$ a.e.. 由此可得$\int f\mathrm{d}\mu = 0$, 因此(由定理22.7)$f = 0$ a.e..

习题22.13 设f是可积函数, 并且对几乎所有的x有$f(x) > 0$. 如果可测集A使得$\int_A f\mathrm{d}\mu = 0$, 证明$\mu^*(A) = 0$.

解 设可测集A满足$\int_A f\mathrm{d}\mu = 0$. 考虑集合$B = \{x \in A : f(x) \leqslant 0\}$, 由题设, 注意到$\mu^*(B) = 0$. 另外, 对每个n令

$$A_n = \{x \in A : f(x) \geqslant \frac{1}{n}\}.$$

那么, $A = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cup B$, 并且$f\chi_{A_n} \leqslant f\chi_A$ 对一切n几乎处处成立. 因此,

$$0 \leqslant \frac{1}{n}\mu^*(A_n) \leqslant \int_{A_n} f\mathrm{d}\mu \leqslant \int_A f\mathrm{d}\mu = 0,$$

这就证得对一切n有$\mu^*(A_n) = 0$. 由此容易推出$\mu^*(A) = 0$.

习题22.14 设$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是有限测度空间并且设$f : X \to \mathbb{R}$ 是可积函数, 对几乎所有的x, $f(x) > 0$. 如果$0 < \varepsilon \leqslant \mu^*(x)$, 证明

$$\inf\left\{\int_E f\mathrm{d}\mu : E \in \Lambda_\mu \text{并且} \mu^*(E) \geqslant \varepsilon\right\} > 0.$$

解 我们可以假设$f(x) > 0$对一切$x \in X$ 成立. 如果对某个$0 < \varepsilon \leqslant \mu^*(X)$ 我们有

$$\inf\left\{\int_E f\mathrm{d}\mu : E \in \Lambda_\mu \text{而且} \mu^*(E) \geqslant \varepsilon\right\} = 0.$$

那么存在Λ_μ 的序列$\{E_n\}$对一切n满足$\mu^*(E_n) \geqslant \varepsilon$ 而且$\int_{E_n} f\mathrm{d}\mu < 1/2^n$. 令$F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ 并且注意到:

- 每个F_n是可测的;
- $F_{n+1} \subseteq F_n$ 对一切n成立;
- $\mu^*(F_n) \geqslant \mu^*(E_n) \geqslant \varepsilon$ 对一切n成立.

如果$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, 那么F是可测集并且(由定理15.4(2))我们有

$$\mu^*(F) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(F_n) \geqslant \varepsilon > 0. \qquad (\bigstar)$$

由$f\chi_{F_n} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} f\chi_{E_k}$，我们推得

$$\int f\chi_{F_n}\mathrm{d}\mu \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\int f\chi_{E_k}\mathrm{d}\mu \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

从而$\int f\chi_{F_n}\mathrm{d}\mu \downarrow 0$．后者蕴含着$f\chi_{F_n} \downarrow 0$ a.e. (参见习题22.12), 并且因为$f\chi_{F_n} \downarrow f\chi_F$，我们推得$f\chi_F = 0$ a.e.. 由于对一切$x, f(x) > 0$, 后者(由习题22.13)蕴含着$\mu^*(F) = 0$，此与(★)矛盾, 因此得到所要的结论.

习题22.15 设f是正的可积函数. 定义$\nu : \Lambda \to [0, \infty)$ 为, 对一切$A \in \Lambda$, $\nu(A) = \int_A f\mathrm{d}\mu$．证明

(a) (X, Λ, ν) 是一个测度空间.

(b) 如果Λ_ν 表示X的所有ν 可测子集构成的σ 代数, 证明$\Lambda \subseteq \Lambda_\nu$．并举出一个$\Lambda \neq \Lambda_\nu$ 的例子.

(c) 如果$\mu^*(\{x \in X : f(x) = 0\}) = 0$，证明$\Lambda = \Lambda_\nu$．

(d) 如果g是一个关于测度空间(X, Λ, ν) 可积的函数,证明fg关于测度空间$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是可积的, 并且$\int g\mathrm{d}\nu = \int gf\mathrm{d}\mu$.

解 (a) 这部分可由习题22.5立即得到.

(b) 测度ν 的初始定义域为Λ．因此, 由定理15.3可得$\Lambda \subseteq \Lambda_\nu$ 成立.

考虑具有Lebesgue测度的$\mathbb{R}$，并且设$f = \chi_{(1,2)}$．因为, 在这种情形下, $\nu([0,1]) = 0$，所以[0, 1]的每个子集是一个ν 零集(因此是ν可测的). 另一方面, 不是[0, 1]的每个子集都是可测的. 因此, 在这种情形下$\Lambda \neq \Lambda_\nu$ 成立.

(c) 首先, 注意到ν 是一个有限测度. 于是, 设$A \in \Lambda_\nu$ 使得$\nu^*(A) = 0$．由定理15.11, 存在某个$B \in \Lambda$ 使得$A \subseteq B$ 并且$\nu(B) = 0$．结合习题22.13, 关系式$\int_B f\mathrm{d}\mu = \nu(B) = 0$ 说明$\mu^*(A) = 0$．因此, $A \in \Lambda$．于是, 如果$V \in \Lambda_\nu$，那么取某个$W \in \Lambda$ 使得$V \subseteq W$ 并且$V(W) = \nu^*(V)$ (定理15.11). 注意到$\nu^*(W\backslash V)$ =0, 从而, 由前面的讨论可知$W\backslash V \in \Lambda$．最后, $V = W\backslash(W\backslash V) \in \Lambda$ 成立, 这就说明$\Lambda = \Lambda_\nu$．

(d) 我们假设对所有的x, $g(x) \geqslant 0$并且$f(x) \geqslant 0$. 取ν 阶梯函数列$\{\phi_n\}$ 使得$0 \leqslant \phi_n \uparrow g$ ν-a.e.. 设

$$G = \{x \in X : f(x) > 0\}.$$

显然, $G \in \Lambda$．因为$G^c = \{x \in X : f(x) = 0\}$，所以$\nu(G^c) = \int_{G^c} f\mathrm{d}\mu = 0$．因为在$G$上$f$是严格正的, (c)部分的论证说明当$A \subseteq G$ 时, 我们有:

1) 如果$A \in \Lambda_\nu$，那么$A \in \Lambda$，而且

2) 由定理22.13, $\nu^*(A) = 0$ 当且仅当$\mu^*(A) = 0$ (并且在这种情形下$A \in \Lambda$).

尤其, 可得$\phi_n f \uparrow fg$ μ -a.e.成立. 于是, 如果$A \in \Lambda_\nu$ 满足$\nu^*(A) < \infty$，那么

$$\int \chi_A \mathrm{d}\nu = \nu(A \cap G) = \int_{A\cap G} f\mathrm{d}\mu = \int \chi_A f\mathrm{d}\mu.$$

这就推得如果ϕ 是一个ν阶梯函数, 那么, ϕf 是μ可积的, 并且$\int \phi\mathrm{d}\nu = \int \phi f\mathrm{d}\mu$ 成立. 于是, 注意到$0 \leqslant \phi_n f \uparrow fg$ μ -a.e.和$\int \phi_n\mathrm{d}\nu = \int \phi_n f\mathrm{d}\mu$, 说明$fg$是$\mu$可积的并且$\int g\mathrm{d}\nu = \int gf\mathrm{d}\mu$ 成立.

习题22.16 设I是$\mathbb{R}$的一个区间, 并且设$f: I \to \mathbb{R}$ 是一个关于Lebesgue测度的可积函数. 对一对实数a和b, 其中$a \neq 0$, 设$J = \{(x-b)/a : x \in I\}$. 证明由$g(x) = f(ax+b), x \in J$, 定义的函数$g: J \to \mathbb{R}$ 是可积的并且$\int_I f\mathrm{d}\lambda = |a| \int_J g\mathrm{d}\lambda$ 成立.

解 首先对某个可测集$A \subseteq I$ 假设$f = \chi_A$. 显然, $\frac{1}{a}(A-b) \subseteq J$. 因此, 由恒等式, $\chi_A(ax+b) = \chi_{\frac{1}{a}(A-b)}(x)$, 根据习题15.5可得

$$\int_J g\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{|a|}\lambda(A) = \frac{1}{|a|}\int_I f\mathrm{d}\lambda.$$

所以, 公式对可测集的特征函数成立. 由此可知它对阶梯函数也成立.

于是, 设f是一个上函数. 取一个阶梯函数列$\{\phi_n\}$ 它在I上满足$\phi_n \uparrow f$ a.e.. 如果对$x \in J$, $\psi_n(x) = \phi_n(ax+b)$, 那么ψ_n 是J上的阶梯函数并且$\psi_n \uparrow g$ 在J上a.e.成立. (注意到如果$B \subseteq I$ 满足$\lambda(B) = 0$, 那么, 由习题15.5, 我们有$\lambda\left(\frac{1}{a}(B-b)\right) = \frac{1}{|a|}\lambda(B) = 0$.)因此,

$$|a|\int_J g\mathrm{d}\lambda = |a|\lim_{n\to\infty}\int_J \psi_n\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_I \phi_n\mathrm{d}\lambda = \int_I f\mathrm{d}\lambda.$$

因此, 公式对I上每个可积函数成立.

习题22.17 设$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是有限的测度空间. 对每一对可测函数f和g设

$$d(f,g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\mathrm{d}\mu.$$

(a) 证明$(\mathcal{M}, d)$ 是一个测度空间;

(b) 证明可测函数列$\{f_n\}$ (即, $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}$)满足$f_n \xrightarrow{u} f$ 当且仅当$\lim d(f_n, f) = 0$;

(c) 证明$(\mathcal{M}, d)$ 是完备的度量空间. 即证, 如果可测函数列$\{f_n\}$ 满足当$n, m \to \infty$ 时, $d(f_n, f_m) \to 0$, 那么存在一个可测函数f使得$\lim d(f_n, f) = 0$.

解 (a)我们假设两个函数相等是μ a.e.相等的. 只要证明三角不等式. 为此, 设$f, g, h \in \mathcal{M}$ 由不等式

$$\frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|} \leqslant \frac{|f(x)-h(x)|}{1+|f(x)-h(x)|} + \frac{|h(x)-g(x)|}{1+|h(x)-g(x)|},$$

立刻得到三角不等式.

详细的参见习题9.11的解答.

(b) 首先观察到对$x \geqslant 0$ 和$\varepsilon > 0$ 我们有:

$$x \geqslant \varepsilon \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} \geqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

于是, 假设$\lim d(f_n, f) = 0$ 成立. 那么, 不等式

$$\mu^*(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) = \mu^*\left(\left\{x \in X : \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|} \geqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\}\right)$$
$$\leqslant \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \cdot d(f_n, f)$$

容易推出$f_n \xrightarrow{\mu} f$.

反之, 假设$f_n \xrightarrow{\mu} f$. 如果$d(f_n, f) \neq 0$, 那么存在某个$\varepsilon > 0$ 和$\{f_n\}$ 的某个子列$\{g_n\}$ 使得$d(g_n, f) \geqslant \varepsilon$ 对所有的n成立. 通过一个子列, 我们可以假设$g_n \to f$ a.e.成立(定理19.4). 由于$\frac{|g_n - f|}{1+|g_n - f|} \leqslant 1$ 和测度空间的有限性, Lebesgue控制收敛定理推得$0 < \varepsilon \leqslant \lim d(g_n, f) = 0$, 这是不合理的. 因此, $\lim d(f_n, f) = 0$ 成立.

(c) 假设$n, m \to \infty$ 时, $d(f_n, f_m) \to 0$, 不等式

$$\mu^*(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \cdot d(f_n, f_m)$$

说明$\{f_n\}$ 是一个μ -Cauchy序列. 因此, 由习题19.7知道对某个f, 有$f_n \xrightarrow{\mu} f$ 成立, 并且由上面的(b), $\lim d(f_n, f) = 0$ 也成立.

反之, 如果$\lim d(f_n, f) = 0$ 成立, 那么由上面的(b)知道$f_n \xrightarrow{\mu} f$, 这可推出$\{f_n\}$是一个μ-Cauchy序列.

习题22.18 设$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是Lebesgue可积函数. 对每个区间I设$f_I = \frac{1}{\lambda(I)} \int_I f \mathrm{d}\lambda$ 并且$E_I = \{x \in I : f(x) > f_I\}$. 证明

$$\int_I |f - f_I| \mathrm{d}\lambda = 2 \int_{E_I} (f - f_I) \mathrm{d}\lambda.$$

解 我们采用题目中的符号. 首先观察到

$$\begin{aligned}\int_{E_I} (f - f_I)\mathrm{d}\lambda + \int_{I \setminus E_I} (f - f_I)\mathrm{d}\lambda &= \int_I (f - f_I)\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_I f\mathrm{d}\lambda - \int_I f_I \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_I f\mathrm{d}\lambda - \int_I f\mathrm{d}\lambda = 0.\end{aligned}$$

因此,

$$\int_{E_I} (f - f_I)\mathrm{d}\lambda = \int_{I \setminus E_I} (f_I - f)\mathrm{d}\lambda.$$

然后, 注意到

$$\begin{aligned}\int_I |f - f_I|\mathrm{d}\lambda &= \int_{E_I} |f - f_I|\mathrm{d}\lambda + \int_{I \setminus E_I} |f - f_I|\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{E_I} (f - f_I)\mathrm{d}\lambda + \int_{I \setminus E_I} (f_I - f)\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{E_I} (f - f_I)\mathrm{d}\lambda + \int_{E_I} (f - f_I)\mathrm{d}\lambda = 2\int_{E_I} (f - f_I)\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

习题22.19 设$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ 是使得$\int_0^t f(x)\mathrm{d}\lambda(x) = 0$ 对一切$t \geqslant 0$ 成立的Lebesgue 可积函数. 证明$f(x) = 0$ 对几乎所有的x成立.

解 首先观察到

$$\int_{[a,b)} f\mathrm{d}\lambda = \int_{[0,b)} f\mathrm{d}\lambda - \int_{[0,a)} f\mathrm{d}\lambda = 0$$

对每个区间$[a,b)$ 成立. 由习题22.5, 我们看到, 对每个σ 集A有$\int_A f\mathrm{d}\lambda=0$ 成立. 由习题15.2(和Lebesgue 控制收敛定理), 我们看到, 对$\mathbb{R}$ 的每个Lebesgue可测子集A有$\int_A f\mathrm{d}\lambda=0$ 成立.

于是, 设$X=\{x\in\mathbb{R}:f(x)>0\}$ 和$Y=\{x\in\mathbb{R}:f(x)<0\}$.[1] 显然, X和Y都是Lebesgue可测集, 并且

$$\int_X f\mathrm{d}\lambda=\int_Y f\mathrm{d}\lambda=0.$$

然后, 利用习题22.13可得$\lambda(X)=\lambda(Y)=0$. 因此, $f(x)=0$对几乎所有的x成立.

习题22.20 设$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间并且$f,f_1,f_2,\cdots$, 是非负可积函数使得$f_n\to f$ a.e.成立而且$\lim\int f_n\mathrm{d}\mu=\int f\mathrm{d}\mu$. 如果$E$是可测集, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu.$$

解 假设可积函数$f,f_1,f_2,\cdots$是非负的并且满足题目中的条件, E是可测集. 那么函数$f\chi_E$, $f_1\chi_E,f_2\chi_E,\cdots$ 是非负的和可积的(因为$0\leqslant f\chi_E\leqslant f$ 和$0\leqslant f_n\chi_E\leqslant f_n$)并且$f_n\chi_E\to f\chi_E$ a.e.成立[2]. 利用Fatou引理, 我们看到

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\int\lim\ \inf\ f_n\chi_E\mathrm{d}\mu\leqslant\lim\ \inf\int f_n\chi_E\mathrm{d}\mu=\lim\ \inf\int_E f_n\mathrm{d}\mu.\qquad(\bigstar)$$

类似地, 我们有

$$\int_{E^c}f\mathrm{d}\mu\leqslant\lim\ \inf\int_{E^c}f_n\mathrm{d}\mu.\qquad(\bigstar\bigstar)$$

因此,

$$\begin{aligned}\int f\mathrm{d}\mu&=\int_E f\mathrm{d}\mu+\int_{E^c}f\mathrm{d}\mu\leqslant\lim\ \inf\int_E f_n\mathrm{d}\mu+\lim\ \inf\int_{E^c}f_n\mathrm{d}\mu\\&\leqslant\lim\ \inf\left(\int_E f_n\mathrm{d}\mu+\int_{E^c}f_n\mathrm{d}\mu\right)\\&=\lim\ \inf\int f_n\mathrm{d}\mu\\&=\int f\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

其中第二个不等式是利用习题4.7(b). 由此可得

$$\int_E f\mathrm{d}\mu+\int_{E^c}f\mathrm{d}\mu=\lim\ \inf\int_E f_n\mathrm{d}\mu+\lim\ \inf\int_{E^c}f_n\mathrm{d}\mu,$$

并且由($\bigstar$)和($\bigstar\bigstar$), 我们看到

$$\lim\ \inf\int_E f_n\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu.$$

1. 原书中是"$Y=\{x\in X:f(x)<0\}$", 译者认为应该是"$Y=\{x\in\mathbb{R}:f(x)<0\}$". ——译者注

2. 原书中是"$f_n\chi_E\to f\chi_E$ 成立", 译者认为应该是"$f_n\chi_E\to f\chi_E$ a.e.成立". ——译者注

于是, 设$\{g_n\}$ 是$\{f_n\}$ 的一个子列. 那么,

$$g_n \to f\text{a.e.并且} \lim_{n\to\infty} \int g_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu.$$

由前面的结论, 我们推得

$$\liminf \int_E g_n \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu,$$

从而存在$\{g_n\}$ 的一个子列$\{g_{k_n}\}$ 使得$\lim \int_E g_{k_n} \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu$.

因此, 我们已经证得有界实数列$\{\int_E f_n \mathrm{d}\mu\}$ 的每个子列都有一个子列收敛于$\int_E f \mathrm{d}\mu$. 这意味着

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu$$

成立; 参见习题4.2.

习题22.21 如果Lebesgue可积函数$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 对每个$n=0,1,2\cdots$满足$\int_0^1 x^{2n} f(x) \mathrm{d}\lambda(x) = 0$, 证明$f=0$ a.e..

解 设可积函数$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 满足

$$\int_0^1 x^{2n} f(x) \mathrm{d}\lambda(x) = 0,\ n = 0, 1, 2, \cdots .$$

因为由$\{1, x^2\}$ 生成的函数代数在$C[0,1]$ 中稠密(参见习题11.5), 因此$\int_0^1 g(x)f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = 0$ 对 $C[0,1]$ 中的所有g成立. 考虑两个可测集

$$E = \{x\in[0,1] : f(x) > 0\} \quad \text{和} \quad F = \{x \in [0,1] : f(x) < 0\}.$$

我们必须证明$\lambda(E) = \lambda(F) = 0$. 我们只证$\lambda(E)=0$ 成立而把关于F的同样的论证留给读者.

取[0, 1]的紧集序列$\{K_n\}$ 和开集序列$\{O_n\}$ 满足$K_n \subseteq E \subseteq O_n$ 对每个n成立, 并且$K_n \uparrow$, $O_n \downarrow$, $\lambda(E) = \lim \lambda(K_n) = \lim \lambda(O_n)$. (这里我们利用了Lebesgue测度的正则性.)对每个n(由定理10.8)存在一个连续函数$g_n:[0,1]\to[0,1]$ 满足$g_n(x) = 1,\ x\in K_n$, 和$g_n(x) = 0,\ x \notin O_n$. 显然, $|g_n f| \leqslant |f|$ 并且$g_n f \to f\chi_E$ a.e.成立. 由Lebesgue控制收敛定理, 我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x) f(x) \mathrm{d}\lambda(x) = \int_0^1 f(x)\chi_E(x)\mathrm{d}\lambda(x) = \int_E f\mathrm{d}\lambda.$$

考虑到$\int_0^1 g_n(x)f(x)\mathrm{d}\lambda(x)$ =0 对所有的n成立, 我们推得$\int_E f\mathrm{d}\lambda = 0$. 于是, 利用习题22.13可推得$\lambda(E)=0$, 这就是所要证的.

习题22.22 对每个n考虑区间[0,1]的分割

$$\{0, 2^{-n}, 2\cdot 2^{-n}, 3\cdot 2^{-n}, \cdots, (2^n-1)\cdot 2^{-n}, 1\}$$

并且定义函数$r_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ 为, $r_n(1) = -1$,

$$r_n(x) = (-1)^{k-1},\ (k-1)2^{-n} \leqslant x < k2^{-n}\ (k = 1, 2, \cdots, 2^n).$$

(a) 画出r_1和r_2的图形;

(b) 证明如果$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是Lebesgue可积函数, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 r_n(x)f(x)\mathrm{d}\lambda(x)=0$$

解　(a) r_1和r_2的图形如图4.1所示.

(b) 由定理22.12, 只要证明$f=\chi_{[a,b)}$ 时的结论(为什么?), 其中$[a,b)$ 是[0, 1]的子区间. 显然, $\int_0^1 r_n(x)\chi_{[a,b)}\mathrm{d}\lambda(x)=\int_a^b r_n(x)\mathrm{d}x$. 因此, 只要证明$\int_a^b r_n(x)\mathrm{d}x=0$ 对一切$0\leqslant a<b\leqslant 1$ 成立.

为此, 固定$0\leqslant a<b\leqslant 1$ 并且设$\varepsilon>0$. 固定n_0 使得$2^{-n_0}<\min\{\varepsilon,(b-a)/4\}$. 取$n\geqslant n_0$ 并且考虑分割$\{0,1/2^n,2/2^n,\cdots,(2^n-1)/2^n,1\}$; 为简单起见, 设$x_i=i/2^n$ 并且注意到点a和b与x^i的关系如图4.2所示.

因为对任意3个相邻的点x_{i-1},x_i,x_{i+1} 我们有$\int_{x_{i-1}}^{x_i} r_n(x)\mathrm{d}x=0$, 我们看到$\int_a^b r_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^{x_k} r_n(x)\mathrm{d}x+\int_c^b r_n(x)\mathrm{d}x$, 其中$c=x_{m-1}$ 或者$c=x_m$; 参见图4.2. 因此,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b r_n(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_a^{x_k}|r_n(x)|\mathrm{d}x+\int_c^b|r_n(x)|\mathrm{d}x\\ &=(x_k-a)+(b-c)<\varepsilon+2\varepsilon=3\varepsilon\end{aligned}$$

对一切$n\geqslant n_0$ 成立. 这就意味着$\lim\int_a^b r_n(x)\mathrm{d}x=0$, 它是我们所要的.

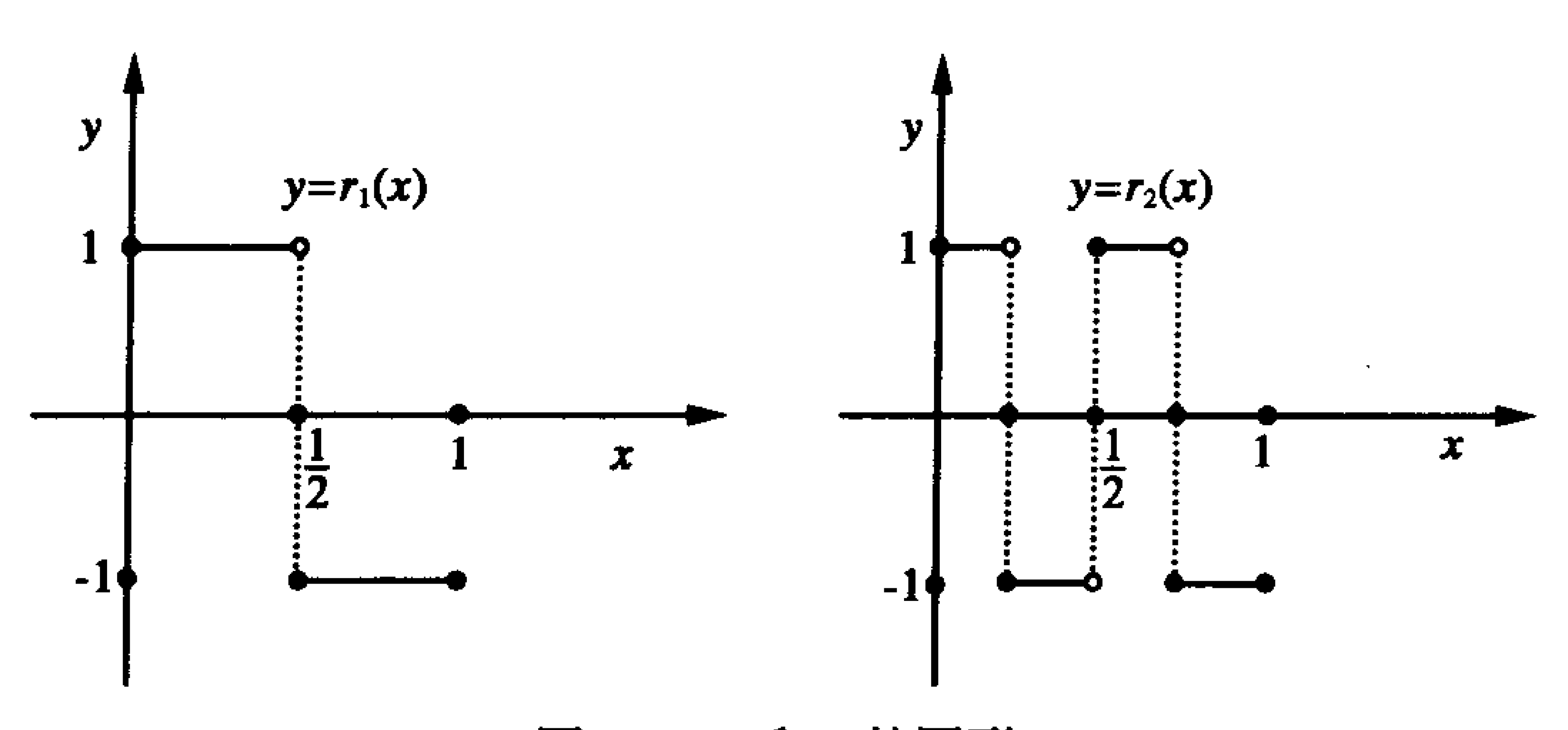


图4.1　r_1和r_2的图形

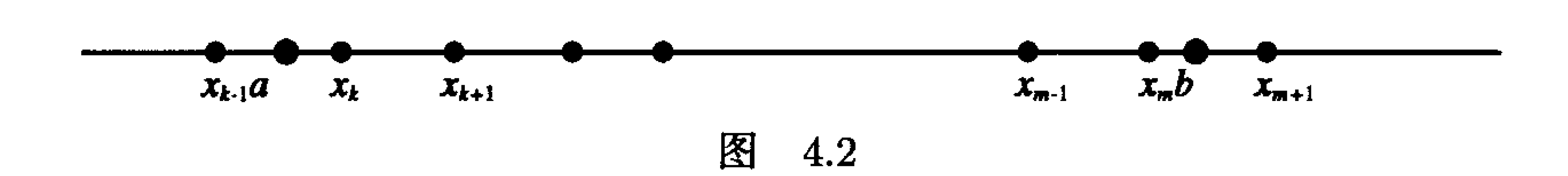


图　4.2

习题22.23　设$\{\varepsilon_n\}$是对每个n满足$0<\varepsilon_n<1$ 的实数列. 另外, 我们说[0, 1] 的Lebesgue可测子集列$\{A_n\}$与数列$\{\varepsilon_n\}$是相容的如果对每个n有$\lambda(A_n)=\varepsilon_n$. 证明$\{\varepsilon_n\}$ 的如下性质:

(a) 数列$\{\varepsilon_n\}$ 收敛于零当且仅当存在一个相容的[0, 1]可测子集列$\{A_n\}$ 使得$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}(x)<\infty$ 对几乎所有的x成立;

(b) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n$ 在$\mathbb{R}$ 内收敛当且仅当对每个相容的[0, 1]可测子集列$\{A_n\}$ 我们有$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}(x)<\infty$ 对几乎所有的x成立.

解 (a)如果$\varepsilon_n\to 0$，那么设$A_n=(0,\varepsilon_n)(n=1,2,\cdots)$，并且注意到$\lambda(A_n)=\varepsilon_n$ 对一切n成立而且$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}(x)<\infty$ 对一切$x\in[0,1]$ 成立.

反之, 假设存在一个相容的[0,1]可测子集列$\{A_n\}$使得$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}(x)<\infty$ 对几乎所有的x成立. 对每个n设$B_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$ 并且注意到$B_n\downarrow B=\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k$. 如果$\lambda(B)>0$ 成立, 那么注意到对每个$x\in B$ 有$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}(x)=\infty$ (为什么?), 这与我们的假设矛盾. 因此, $\lambda(B)=0$. 由测度的连续性(定理15.4), 我们看到$\lambda(B_n)\downarrow 0$. 由$A_n\subseteq B_n$，对每个n我们有$0<\varepsilon_n=\lambda(A_n)\leqslant\lambda(B_n)$，从而$\lim\varepsilon_n=0$.

(b) 假设$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\infty$ 并且$\{A_n\}$ 是相容的[0, 1]可测子集列. 那么,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,1]}\chi_{A_n}\mathrm{d}\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\infty,$$

从而, 由Levi定理的级数形式定理22.9, 我们有$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}(x)<\infty$ 对几乎所有的x成立.

反之, 假设对每个相容的[0, 1]可测子集列$\{A_n\}$，我们有$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}(x)<\infty$ 对几乎所有的x成立. 由反证法假设$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n=\infty$. 利用归纳法(如何证?), 我们看到存在一个严格单调增的自然数列$\{k_n\}$ 使得$\sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}}\varepsilon_i>1$ 对每个n成立. 其次, 对每个n我们可以取(如何取?)[0, 1]的子区间$A_{k_n+1},A_{k_n+2},\cdots,A_{k_{n+1}}$ 使得$\lambda(A_i)=\varepsilon_i$，$k_n+1\leqslant i\leqslant k_{n+1}$，而且$\bigcup_{i=k_n+1}^{k_{n+1}}A_i=[0,1]$. 于是注意到可测集列$\{A_n\}$ 与$\{\varepsilon_n\}$ 是相容的并且$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}(x)=\infty$ 对每个$x\in[0,1]$ 成立, 这与我们的假设矛盾. 因此, $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\infty$一定成立.

习题22.24 设$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是有限的测度空间并且$f:x\to\mathbb{R}$ 是可测函数.

(a) 证明如果对每个n, f^n可积并且$\lim\int f^n\mathrm{d}\mu$ 在$\mathbb{R}$ 内存在, 那么$|f(x)|\leqslant 1$ 对几乎所有的x成立;

(b) 如果对每个n, f^n可积, 证明$\int f^n\mathrm{d}\mu=c$ (常数), $n=1,2,\cdots$,当且仅当对X的某个可测子集A有$f=\chi_A$.

解 记住f^n表示对一切$x\in X$ 定义为$f^n(x)=[f(x)]^n$ 的函数$f^n:X\to\mathbb{R}$.

(a) 假设对每个n,f^n是Lebesgue可积的并且$\lim\int f^n\mathrm{d}\mu$ 在$\mathbb{R}$ 内存在. 由反证法假设可测集

$$E=\{x\in X:|f(x)|>1\}$$

满足$\mu^*(E)>0$. 由恒等式$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$，其中

$$E_k=\left\{x\in X:|f(x)|\geqslant 1+\frac{1}{k}\right\},$$

我们看到存在某个$\delta>1$ 使得可测集$F=\{x\in X:|f(x)|>\delta\}$ 满足$\mu^*(F)>0$. 于是, 注意到$f^{2n}\geqslant\delta^{2n}\chi_F$ 对每个n成立, 从而由

$$\delta^{2n}\mu^*(F)=\int\delta^{2n}\chi_F\mathrm{d}\mu\leqslant\int f^{2n}\mathrm{d}\mu,$$

我们推得$\lim \int f^{2n}\mathrm{d}\mu = \infty$，与极限$\lim \int f^n \mathrm{d}\mu$ 在$\mathbb{R}$ 内存在矛盾. 因此, $|f(x)| \leqslant 1$ 对几乎所有的x一定成立.

(b) 假设对每个$n = 1, 2, \cdots$, $\int f^n \mathrm{d}\mu = c$ 成立. 由(a), 我们知道$|f(x)| \leqslant 1$ 对几乎所有的$x \in X$ 成立. 于是, 定义集合$A = \{x \in X : f(x) = 1\}$, $B = \{x \in X : f(x) = -1\}$, 和$C = \{x \in X : |f(x)| < 1\}$. 那么, 对每个$n$我们有

$$\begin{aligned}\int f^n \mathrm{d}\mu &= \int_A f^n \mathrm{d}\mu + \int_B f^n \mathrm{d}\mu + \int_C f^n \mathrm{d}\mu \\ &= \int_A 1 \mathrm{d}\mu + \int_B (-1)^n \mathrm{d}\mu + \int_C f^n \mathrm{d}\mu \\ &= \mu^*(A) + (-1)^n \mu^*(B) + \int_C f^n \mathrm{d}\mu = c.\end{aligned}$$

因为$f^n(x) \to 0$ 对一切$x \in C$ 成立, 所以由Lebesgue控制收敛定理可得$\lim \int_C f^n \mathrm{d}\mu = 0$. 因此,

$$\lim_{n\to\infty} [\mu^*(A) + (-1)^n \mu^*(B)] = c.$$

因为$\lim(-1)^n$ 不存在, 所以我们推得$\mu^*(B) = 0$，因而, $c = \mu^*(A) = \mu^*(A) + \int_C f^n \mathrm{d}\mu$ 对一切n成立. 尤其是, 我们有$\int_C f^2 \mathrm{d}\mu = 0$，从而对几乎所有的$x \in C$ 一定有$f(x) = 0$ 成立. 后者推得$f = \chi_A$ a.e.成立.

23. 作为Lebesgue积分的Riemann积分

习题23.1　设$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是Riemann可积的. 证明, 在$[a, b]$ 的每个闭子区间上, f是Riemann可积的. 并证明

$$\int_c^d f(x)\mathrm{d}x = \int_c^e f(x)\mathrm{d}x + \int_e^d f(x)\mathrm{d}x$$

对$[a, b]$中的任何3个点c, d和e都成立.

解　设$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是Riemann可积函数并且设$[u, v]$是$[a, b]$的闭子区间. 如果$f : [u, v] \to \mathbb{R}$ 在某点$x \in [u, v]$ 处不连续, 那么$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 在x点也不连续——注意到, 这种情形下, 存在$[u, v]$的点列(因此也是$[a, b]$的点列)$\{x_n\}$使得$\{f(x_n)\}$不收敛于$f(x)$. 所以, $f : [u, v] \to \mathbb{R}$ 的所有不连续点集D是$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 的所有不连续点集的子集. 因为$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是Riemann可积的, 我们知道$\lambda(D) = 0$，从而(由定理23.7)函数$f : [u, v] \to \mathbb{R}$ 是Riemann可积的.

现在, 假设$a \leqslant c < e < d \leqslant b$. 因为$f : [c, e] \to \mathbb{R}$ 是Riemann可积的(因此是Lebesgue可积的), 所以存在一个$[c, e]$上的阶梯函数列$\{\phi_n\}$ (即, $\phi_n(x) = 0$ 对一切$x \notin [c, e]$ 成立)使得$\phi_n(x) \uparrow f(x)$ 对几乎所有的$x \in [c, e]$ 成立. 类似地, 也存在一个$[e, d]$上的阶梯函数列$\{\psi_n\}$ 使得$\psi_n(x) \uparrow f(x)$ 对几乎所有的$x \in [e, d]$ 成立. 那么, $\{\phi_n + \psi_n\}$ 是$[c, d]$上的阶梯函数列对几乎所有的$x \in [c, d]$ 满足$\phi_n(x) + \psi_n(x) \uparrow f(x)$. 因此,

$$\begin{aligned}\int_c^d f(x)\mathrm{d}x &= \int_{[c,d]} f \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[c,d]} (\phi_n + \psi_n)\mathrm{d}\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{[c,d]} \phi_n \mathrm{d}\lambda + \lim_{n\to\infty} \int_{[c,d]} \psi_n \mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

$$= \int_{[c,e]} f\mathrm{d}\lambda + \int_{[e,d]} f\mathrm{d}\lambda$$
$$= \int_c^e f(x)\mathrm{d}x + \int_e^d f(x)\mathrm{d}x.$$

于是, 对$[a,b]$的任何元素c,d和e, 通过考虑所有可能的情形, 可以得到等式$\int_c^d f(x)\mathrm{d}x = \int_c^e f(x)\mathrm{d}x + \int_e^d f(x)\mathrm{d}x$. 我们只对一种这样的情形进行证明, 而把其余的留给读者. 假设$a \leqslant e < c < d \leqslant b$. 那么, 由前面的情形, 我们有

$$\int_e^d f(x)\mathrm{d}x = \int_e^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\mathrm{d}x = -\int_c^e f(x)\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\mathrm{d}x,$$

由此可得$\int_c^e f(x)\mathrm{d}x + \int_e^d f(x)\mathrm{d}x = \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$.

习题23.2 设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是Riemann可积的. 证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right).$$

解 观察到

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) = S_f(P_n,T_n)^1,$$

其中分割$P_n=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 和$T_n=\{t_1,\cdots,t_n\}$ 满足$x_i=a+i(b-a)/n(0\leqslant i\leqslant n)$ 并且$t_i=x_i(1\leqslant i\leqslant n)$, 由定理23.5[2]可以得到结论.

习题23.3 设$\{f_n\}$ 是$[a,b]$ 上的Riemann 可积函数列, 并且$\{f_n\}$ 一致收敛于函数f. 证明f是Riemann 可积的并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

解 取某个k使得$|f_k(x)-f_n(x)|<1$ 对所有的$n>k$ 和$x\in[a,b]$ 成立. 因此, $|f_k(x)-f(x)|\leqslant 1$ 对所有的$x\in[a,b]$ 成立. 因为f_k有界, 容易看到存在某个$M>0$使得$|f(x)|\leqslant M$ 对所有的$x\in[a,b]$ 成立.

如果$D_n\subseteq[a,b]$ 表示f_n的不连续点集, 那么(由定理23.7)$D=\bigcup_{n=1}^\infty D_n$ 满足$\lambda(D)=0$. 因为每个f_n在$[a,b]\setminus D$上连续, 所以由定理9.2可得f在$[a,b]\setminus D$上连续, 即, f是几乎处处连续的. 由定理23.7可知f是Riemann可积的.

---

1. 设$P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 是$[a,b]$的一个分割, 如果对$i=1,2,\cdots,n,x_{i-1}\leqslant t_i\leqslant x_i$ 成立, 则称点集$T=\{t_1,\cdots,t_n\}$ 是关于P的一个点的选取, 并且称

$$R_f(P_1T)=\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i-x_{i-1})$$

为f关于分割P的一个Riemann和. ——译者注

2. 定理23.5就是关于Riemann积分的Darboux定理. ——译者注

对于最后一部分, 设$\varepsilon > 0$. 取某个k使得$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 对所有的$n \geqslant k$ 和$x \in [a,b]$ 成立. 所以, 对$n \geqslant k$ 我们有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon(b-a),$$

这说明$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

习题23.4　对每个n, 设$f_n(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$ 定义为$f_n(x) = nx^{n-1}/(1+x)$, $x \in [0,1]$. 证明$\lim \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 1/2$.

解　由分部积分, 我们得到

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \left.\frac{x^n}{1+x}\right|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x. \qquad (\bigstar)$$

因为$0 \leqslant x^n/(1+x)^2 \leqslant 1$ 对所有$x \in [0,1]$ 成立并且对[0, 1)内的每个x有$\lim \frac{x^n}{(1+x)^2} = 0$, 所以由Lebesgue控制收敛定理得出$\lim \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = 0$. 因此, 由($\bigstar$), 我们看到$\lim \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

习题23.5　设$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是单调增函数. 证明f是Riemann可积的.

解　设$P_n = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 是将$[a,b]$分割成长度等于$(b-a)/n$的n个子区间的分割. 因为f是单调增的, 所以对每个$1 \leqslant i \leqslant n$, $m_i = f(x_{i-1})$ 并且$M_i = f(x_i)$. 其次, 观察到对一切n有[1]

$$\begin{aligned} 0 \leqslant I^*(f) - I_*(f) &\leqslant S^*(f, P_n) - S_*(f, P_n) \\ &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1}) \\ &= [f(b) - f(a)] \cdot \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$

成立. 因此, $I^*(f) - I_*(f) = 0$ 从而f是Riemann可积的.

另一种证明如下: 根据习题9.8, f的不连续点集是至多可数的——因此, 它的Lebesgue测度为零. 于是, 定理23.7保证了f是Riemann可积的. (也可参见习题21.8.)

习题23.6(微积分基本定理)　如果$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是Riemann可积函数, 那么定义它的面积函数$A : [a,b] \to \mathbb{R}$ 为$A(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, $x \in [a,b]$. 证明

(a) A是一个一致连续函数;

1. 下面的符号是原教材中约定的: 设$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 是$[a,b]$的分割,

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},\ M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$
$$S_*(f,P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}),\ S^*(f,P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}),$$
$$I_*(f) = \sup\{S_*(f,P) : P\text{是}[a,b]\text{ 的分割}\},$$
$$I_*(f) = \inf\{S^*(f,P) : P\text{是}[a,b]\text{的分割}\}.$$

——译者注

(b) 如果f在$[a,b]$的某点c处连续，那么A在c点可微并且$A'(c)=f(c)$ 成立;

(c) 举出一个Riemann可积函数f使得它的面积函数A是可微的并且满足$A'\neq f$.

解 (a)取$M>0$使得对$[a,b]$内的每个x有$|f(x)|\leqslant M$. A的一致连续性由下面的不等式得到

$$|A(x)-A(y)|=\left|\int_x^y f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\int_x^y |f(t)|\mathrm{d}t\right|\leqslant M|x-y|.$$

(b) 设f在某点$c\in[a,b]$ 处连续并且设$\varepsilon>0$. 取某个$\delta>0$ 使得当$x\in[a,b]$ 并且$|x-c|<\delta$ 时有$|f(x)-f(c)|<\delta$. 那么，当$x\in[a,b]$ 并且$0<|x-c|<\delta$ 时我们有$|f(t)-f(c)|<\varepsilon$ 对以x和c为端点的子区间内的所有t成立，从而

$$\begin{aligned}\left|\frac{A(x)-A(c)}{x-c}-f(c)\right|&=\frac{1}{|x-c|}\left|\int_x^c f(t)\mathrm{d}t-f(c)(x-c)\right|\\&=\frac{1}{|x-c|}\left|\int_x^c [f(t)-f(c)]\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\frac{1}{|x-c|}\cdot\varepsilon|x-c|=\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明$A'(c)$ 存在并且$A'(c)=f(c)$ 成立.

(c) 我们考虑习题9.7中的函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，它定义为，当$x$为无理数时$f(x)=0$，当$x=\frac{m}{n}$时$f(x)=\frac{1}{n}$ ，其中$n>0$，并且整数m,n除了±1 外没有其他公因子. 在习题9.7中已经证得f在每个无理点处连续并且在每个有理点处不连续. 这可推得f限制在每个闭子区间$[c,d]$上是几乎处处连续的并且$f=0$ a.e.. 由定理23.6和定理23.7，我们推得f在$[c,d]$上是Riemann可积的并且$\int_c^d f(x)\mathrm{d}x=\int f\mathrm{d}\lambda=0$.

特别是，如果$[a,b]$是任何闭子区间，那么$A(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=0$ 对一切$x\in[a,b]$ 成立. 因此，对一切$x\in[a,b]$ 有$A'(x)=0$ ，从而在$[a,b]$的每个有理数x上$A'(x)\neq f(x)$.

习题23.7(Arzelà) 设$\{f_n\}$是$[a,b]$上的Riemann可积函数列使得$\lim f_n(x)=f(x)$ 对一切$x\in[a,b]$ 成立并且f是Riemann可积的. 另外，假设存在常数M使得$|f_n(x)|\leqslant M$ 对所有的$x\in[a,b]$和n成立. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

解 利用定理23.6和Lebesgue控制收敛定理，我们看到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{[a,b]}f\mathrm{d}\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}f_n\mathrm{d}\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

习题23.8 定义函数$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 为，当x为有理数时$f(x)=0$，当x为无理数时$f(x)=1$，确定f的下Riemann积分和上Riemann积分.

解 设P是[0, 1]的一个分割. 因为每个区间都既含有有理数又含有无理数，所以对所有的i我们有$m_i=0$和$M_i=1$. 因此，对所有的分割P, $S^*(f,P)=1$ 并且$S_*(f,P)=0$. 从而，$I^*(f)=1$ 并且$I_*(f)=0$.

习题23.9 设C是Cantor集(参见例6.15). 证明χ_C 在[0, 1]上是Riemann可积的, 并且$\int_0^1 \chi_C \mathrm{d}x = 0$.

解 注意到χ_C 在$[0,1]/C$的每个点上是连续的并且在C的每个点上是不连续的. 因为$\lambda(C)=0$, 所以由定理23.7得到χ_C 在[0, 1]上是Riemann可积的. 因为$\chi_C = 0$ a.e.成立, 我们看到

$$\int_0^1 \chi_C(x)\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} \chi_C \mathrm{d}\lambda = 0.$$

习题23.10 设$0<\varepsilon<1$, 并且考虑[0, 1]的ε-Cantor集C_ε. 证明χ_{C_ε} 在[0, 1]上不是Riemann可积的. 另外, 确定$I_*(\chi_{C_\varepsilon})$ 和$I^*(\chi_{C_\varepsilon})$.

解 对某个$0<\varepsilon<1$ 考虑ε-Cantor集. 因为C_ε 在[0, 1]上是无处稠密的, 容易看到χ_{C_ε} 在C_ε的每个点上不连续并且在$[0,1]\backslash C_\varepsilon$ 的每个点上连续. 因为$\lambda(C_\varepsilon)=\varepsilon>0$, 所以由定理23.7可得$\chi_{C_\varepsilon}$ 不是Riemann可积的.

于是, 设$P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 是[0, 1]的一个分割. 因为C_ε 是无处稠密的, 所以对每个$1\leqslant i\leqslant n$ 有$m_i=0$. 因此对每个分割P有$S_*(\chi_{C_\varepsilon},P)=0$, 从而$I_*(\chi_{C_\varepsilon})=0$. 显然, 当$[x_{i-1},x_i]\bigcap C_\varepsilon \neq \phi$ 时$M_i=1$, 当$[x_{i-1},x_i]\bigcap C_\varepsilon=\varnothing$ 时$M_i=0$. 因为$C_\varepsilon=\bigcup_{i=1}^n [x_{i-1},x_i]\bigcap C_\varepsilon$, 所以有

$$\varepsilon=\lambda(C_\varepsilon)\leqslant \sum_{i=1}^n \lambda([x_{i-1},\ x_i]\bigcap C_\varepsilon)\leqslant \sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1})=S^*(\chi_{C_\varepsilon},\ P)$$

成立, 从而$I^*(C_\varepsilon)\geqslant\varepsilon$.

另一方面, 如果$0<\delta<1-\varepsilon$, 那么存在互不相交的开子区间$(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)$ 使得 $[a_i,b_i]\subseteq[0,1]\backslash C_\varepsilon(1\leqslant i\leqslant n)$ 并且$-\sum\limits_{i=1}^n (b_i-a_i)>1-\varepsilon-\delta$.
所有这些子区间的端点连同0和1构成了[0, 1]的一个分割使得

$$\varepsilon\leqslant I^*(\chi_{C_\varepsilon})\leqslant S^*(\chi_{C_\varepsilon},P)\leqslant 1-(1-\varepsilon-\delta)=\varepsilon+\delta.$$

因为$0<\delta<1-\varepsilon$ 是任意的, 容易得到$I^*(\chi_{C_\varepsilon})=\varepsilon$.

习题23.11 利用一致连续性(定理7.7)给出连续函数的Riemann可积性的证明.

解 设$\varepsilon>0$. 因为f是一致连续的(由定理7.7), 所以存在某个$\delta>0$ 使得当$x,y\in[a,b]$ 并且$|x-y|<\delta$ 时$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 设P是$[a,b]$的一个分割使得网格$|P|<\delta$. 那么, 对每个$1\leqslant i\leqslant n$, $M_i-m_i<\varepsilon$ 成立(为什么?)从而

$$0\leqslant I^*(f)-I_*(f)\leqslant\sum_{i=1}^n (M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<\varepsilon(b-a).$$

因为$\varepsilon>0$ 是任意的, 所以$I^*(f)=I_*(f)$ 成立, 因此f是Riemann可积的.

习题23.12 证明下面的关于连续的Riemman积分的变量替换公式: 如果$[a,b]\xrightarrow{g}[c,d]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ 是连续函数, 其中g是连续可微的(即, g有连续的导数), 那么

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\mathrm{d}u.$$

解 我们将结合链式法则应用微积分基本定理. 考虑两个函数$F,G:[a,b]\to\mathbb{R}$，它们分别由下式定义, 对所有的$x\in[a,b]$.

$$F(x)=\int_{g(a)}^{g(x)}f(u)\mathrm{d}u \text{ 和} G(x)=\int_a^x f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x.$$

其次, 我们将分别计算F和G的导数. 对于F的导数我们利用微积分基本定理和链式法则可得$F'(x)=f(g(x))g'(x)$ 对一切$x\in[a,b]$ 成立. 对于G的导数, 微积分基本定理得出$G'(x)=f(g(x))g'(x)$ 对一切$x\in[a,b]$ 成立. 所以, 对所有的$x\in[a,b]$ 有$F'(x)=G'(x)$.

后者可推出存在一个常数c使得$F(x)=G(x)+c$ 对所有$x\in[a,b]$ 成立. 让$x=a$ 并且考虑到$F(a)=G(a)=0$，我们得到$c=0$. 因此, 对所有的$x\in[a,b]$ 有$F(x)=G(x)$. 最后, 让$x=b$, 我们得到

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x=\int_{g(a)}^{g(b)}f(u)\mathrm{d}u,$$

这就是所要证的.

习题23.13 设连续函数$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 使得$\lim_{x\to\infty}f(x)=\delta$. 证明对每个$a>0$有$\lim_{n\to\infty}\int_0^a f(nx)\mathrm{d}x=a\delta$.

解 固定$a>0$然后由$f_n(x)=f(nx)$ 定义连续函数列$\{f_n\}$. 显然, $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\delta$ 对所有的$x\in(0,a]$ 成立. 我们断言函数列$\{f_n\}$ 在区间$[0,a]$上是一致有界的. 事实上, 因为$\lim_{x\to\infty}f(x)=\delta$ 成立, 所以存在一个数$M>0$使得当$x>M$时$|f(x)|<|\delta|+1$ 成立. 另外, 因为f是连续函数, 所以它在区间$[0,M]$上是有界的. 因此, 存在常数C使得$|f(x)|\leqslant C$ 对所有x成立, 从而对所有x有$|f_n(x)|=|f(nx)|\leqslant C$ 成立. 于是, 应用Lebesgue控制收敛定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a f(nx)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^a f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^a\delta\mathrm{d}x=a\delta.$$

习题23.14 设$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是对所有$x\geqslant 0$ 满足$f(x+1)=f(x)$ 的实值连续函数. 如果$g\cdot[0,1]\to\mathbb{R}$ 是任意的连续函数, 说明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(x)f(nx)\mathrm{d}x=\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right).$$

解 设函数f和g满足题设. 首先观察到容易用归纳法证得$f(x+k)=f(x)$ 对所有的$x\geqslant 0$ 和非负整数k成立.

由变量替换$u=nx$推得

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)f(nx)\mathrm{d}x&=\frac{1}{n}\int_0^n g\left(\frac{u}{n}\right)f(u)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int_{i-1}^i g\left(\frac{u}{n}\right)f(u)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

令$t=u-i+1$, 我们得到

$$\int_{i-1}^i g\left(\frac{u}{n}\right)f(u)\mathrm{d}u=\int_0^1 g\left(\frac{t+i-1}{n}\right)f(t+i-1)\mathrm{d}t=\int_0^1 g\left(\frac{t+i-1}{n}\right)f(t)\mathrm{d}t.$$

因此,

$$\int_0^1 g(x)f(nx)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} g\left(\frac{t+i-1}{n}\right)\right] f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 h_n(t)\mathrm{d}t, \qquad (\bigstar)$$

其中$h_n(t) = \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} g\left(\frac{t+i-1}{n}\right)\right] f(t)$. 显然, h_n是定义在[0, 1]上的连续函数. 而且, 注意到如果对一切$x \in [0,1]$ 有$|g(x)| \leqslant K$ 和$|f(x)| \leqslant K$ 成立, 那么

$$|h_n(t)| \leqslant K^2, \quad t \in [0,1],$$

即, 序列$\{h_n\}$ 在[0, 1]上是一致有界的. 其次, 注意到$0 \leqslant t \leqslant 1$ 可推得$\frac{i-1}{n} \leqslant \frac{t+i-1}{n} \leqslant \frac{i}{n}$. 因此, 如果m_i^n 和M_i^n 分别表示g在闭区间$\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ 上的最小值和最大值, 那么

$$m_i^n \leqslant g\left(\frac{t+i-1}{n}\right) \leqslant M_i^n$$

对每个$0 \leqslant t \leqslant 1$ 成立. 然后, 令

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} m_i^n \quad \text{和} \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} M_i^n,$$

并且注意到R_n和S_n是函数g关于分割$\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ 的两个Riemann和——分别是最小的和最大的. 因此, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$. 由

$$\begin{aligned} |h_n(t) - R_n \cdot f(t)| &= \left| \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} g\left(\frac{t+i-1}{n}\right)\right] f(t) - R_n \cdot f(t) \right| \\ &= \left(\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} g\left(\frac{t+i-1}{n}\right)\right] - R_n \right) \cdot |f(t)| \\ &\leqslant (S_n - R_n)|f(t)|, \end{aligned}$$

我们看到$\lim_{n\to\infty} h_n(t) = f(t) \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$ ——实际上, 序列$\{h_n\}$ 一致收敛(为什么?).

于是, 利用($\bigstar$)和Lebesgue控制收敛定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g(x)f(nx)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 h_n(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left[\lim_{n\to\infty} h_n(t)\right] \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left[f(t) \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}t \\ &= \left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right) \cdot \left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

习题23.15　设$f: [0,1] \to [0,\infty)$ 在(0, 1]的每个闭子区间上都Riemann 可积. 证明f 在[0,1]上Lebesgue 可积当且仅当$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_\varepsilon^1 f(x)\mathrm{d}x$ 在$\mathbb{R}$ 中存在. 另外, 证明在这种情形下, 我们有$\int f\mathrm{d}\lambda = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_\varepsilon^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解 假设f是Lebesgue可积的. 设$\{\varepsilon_n\}$ 是(0, 1]的任意满足$\varepsilon_n \downarrow 0$ 的数列. 对每个n, 我们考虑上函数$g_n = f\chi_{[\varepsilon_n,1]}$. 那么, $g_n \uparrow f$ a.e.成立从而, 由定理21.6, 我们有

$$\int f\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty}\int g_n\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{\varepsilon_n}^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

这说明$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 f(x)\mathrm{d}x$ 存在并且

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 f(x)\mathrm{d}x = \int f\mathrm{d}\lambda.$$

反之, 假设这个极限存在. 设$\varepsilon_n = 1/n$ 并且考虑前面的上函数列$\{g_n\}$(即, $g_n = f\chi_{[\varepsilon_n,1]}$). 那么, $g_n \uparrow f$ a.e.并且

$$\lim_{n\to\infty}\int g_n\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{\varepsilon_n}^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 f(x)\mathrm{d}x < \infty.$$

由定理21.6知道, f是上函数, 因而是Lebesgue可积的.

习题23.16 *作为上一题的应用, 说明由$f(0) = 0$, $f(x) = x^p, x \in (0,1]$ 定义的函数$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 是Lebesgue可积的当且仅当$p > -1$. 另外, 证明: 如果f是Lebesgue可积的, 那么*

$$\int f\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{1+p}.$$

解 如果$0 < \varepsilon < 1$, 那么注意到$p \neq -1$ 时, $\int_\varepsilon^1 x^p\mathrm{d}x = \frac{1-\varepsilon^{p+1}}{p+1}$, 并且$\int_\varepsilon^1 x^{-1}\mathrm{d}x = -\ln\varepsilon$. 因此, $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 x^p\mathrm{d}x$ 存在当且仅当$p > -1$, 而且, 这时极限是$1/(p+1)$. 于是由上一题立刻得到结论.

习题23.17 *设$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个函数并且定义$g : [0,1] \to \mathbb{R}$ 为$g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$.*

(a) 证明如果f是可测的(或者是Borel可测的), 那么g也是;

(b) 如果f是Lebesgue可积的, 那么g一定是Lebesgue可积的吗?

(c) 举出一个本性无界函数f, 它在[0, 1]上连续并且对每个$n = 1, 2, \cdots$, f^n是Lebesgue可积的. (一个函数f是"本性无界的", 如果对每个正实数$M > 0$, 集合$\{x \in [0,1] : |f(x)| > M\}$ 的测度是正的.)

解 (a) 设$h(x) = \mathrm{e}^x$ 并且注意到$g = h \circ f$. 由恒等式$(h \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(h^{-1}(V))$[1] 及$h$是连续函数可推出结论.

(b) 可测函数g未必一定是Lebesgue可积的. 这里给出一个例子. 考虑定义为$f(x) = 1/\sqrt{x}$ 的函数$f : [0,1] \to \mathbb{R}$; 在$x = 0$处我们设$f(0) = 0$. 如果$0 < \varepsilon < 1$, 那么变量替换$t = \sqrt{x}$ 可得

$$\int_\varepsilon^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^1 \mathrm{d}t = 2(1-\sqrt{\varepsilon}).$$

1. 原书中将$f^{-1}(h^{-1}(V))$ 错印成$f^{-1}(g^{-1}(V))$. ——译者注

因此, 由习题23.16, 我们看出f是Lebesgue可积的并且$\int f\mathrm{d}\lambda = 2$. 另一方面, 对每个$0 < \varepsilon < 1$, 变量替换$u = 1/\sqrt{x}$ 可得[1]

$$\int_{\varepsilon}^{1} g(x)\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\varepsilon}^{1} \mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\mathrm{d}x = 2\int_{1}^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{\mathrm{e}^u}{u^3}\mathrm{d}u$$
$$\geqslant 2\sqrt{\varepsilon^3}\int_{1}^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \mathrm{e}^u\mathrm{d}u = 2\sqrt{\varepsilon^3}(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} - 1).$$

这可推出$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon}^{1} \mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\mathrm{d}x = \infty$, 从而由习题23.15可知函数g在[0, 1]上不是Lebesgue可积的.

(c) 定义为$f(x) = \ln x,\ 0 < x \leqslant 1$, 并且$f(0) = 0$的函数$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 满足$\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}\lambda(x) = (-1)^n n!,\ n = 1, 2, \cdots$.

习题23.18　设$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 是Lebesgue可积的(关于Lebesgue测度). 假设f在$x = 0$点可微并且$f(0) = 0$. 证明定义为$g(x) = x^{-\frac{3}{2}}f(x),\ x \in (0,1]$, 并且$g(0) = 0$的函数$g : [0,1] \to \mathbb{R}$ 是Lebesgue可积的.

解　首先观察到(由习题23.16)函数$h(x) = x^{-\frac{1}{2}}, x \in (0,1]$, 在[0, 1]上是Lebesgue可积的. 因为$f(0) = 0$并且$f'(0)$ 存在, 所以存在$0 < \delta < 1$ 及$M > 0$使得对所有的$0 \leqslant x \leqslant \delta$ 有$|f(x)| \leqslant Mx$. 因为当$\delta \leqslant x \leqslant 1$ 时我们有$x^{-\frac{3}{2}} \leqslant \delta^{-\frac{3}{2}}$, 所以我们可以假设$M > \delta^{-\frac{3}{2}}$. 于是, 注意到当$0 < x \leqslant 1$ 时, 我们有

$$|g(x)| = |x^{-\frac{3}{2}}f(x)| \leqslant M\begin{cases} x^{-\frac{1}{2}}, & 0 < x \leqslant \delta \\ |f(x)|, & \delta < x \leqslant 1 \end{cases}$$
$$\leqslant M(h + |f|)(x).$$

因为$h + |f|$ 是可积的并且(显然)g是可测的, 所以定理22.6保证了g也是Lebesgue可积的.

习题23.19　设$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ 是连续函数. 证明f的Riemann积分可以由两个累次积分计算. 即, 证明

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

并可将它推广到n个变量的连续函数.

解　首先注意到函数

$$x \mapsto \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \text{ 和} y \mapsto \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

都是连续的——从而两个累次积分都是定义明确的. 事实上, 因为函数f是一致连续的, 所以给定$\varepsilon > 0$ 存在某个$\delta > 0$ 使得当$|x_1 - x_2| < \delta$ 并且$|y_1 - y_2| < \delta$ 时$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$. 因此, 如果$|x_1 - x_2| < \delta$ 和$|y_1 - y_2| < \delta$ 都满足, 那么

$$\left|\int_c^d f(x_1,y)\mathrm{d}y - \int_c^d f(x_2,y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon(c - d)$$

1. 原书中将$2\int_1^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{\mathrm{e}^u}{u^3}\mathrm{d}u \geqslant 2\sqrt{\varepsilon^3}\int_1^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \mathrm{e}^u\mathrm{d}u$ 错印成$2\int_1^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{\mathrm{e}^u}{u^3}\mathrm{d}u \geqslant 2\int_1^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \mathrm{e}^u\mathrm{d}u$. ——译者注

并且

$$\left|\int_a^b f(x,y_1)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x,y_2)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon(b-a).$$

设$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 是$[a,b]$的一个分割并且$Q = \{y_0, y_1, \cdots, y_k\}$ 是$[c,d]$的一个分割. 令$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$，然后定义$m_{ij} = \inf\{f(x,y) : (x,y) \in R_{ij}\}$ 和$M_{ij} = \sup\{f(x,y) : (x,y) \in R_{ij}\}$. 由不等式$m_{ij} \leqslant f(x,y) \leqslant M_{ij}, (x,y) \in R_{ij}$，可得对所有的$x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$ 有

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leqslant \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\mathrm{d}y \leqslant M_{ij}(y_j - y_{j-1}),$$

从而

$$\begin{aligned} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) &\leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &\leqslant M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \end{aligned}$$

因此, 我们有

$$\begin{aligned} S_*(f, P\times Q) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &= S^*(f, P\times Q). \end{aligned}$$

因为P和Q是任意的并且f是Riemann可积的, 由此可得

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

另一个等式可以类似证得.

习题23.20 假设$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 和$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是对一切$x \in [a,b]$ 使得$f(x) \leqslant g(x)$ 成立的两个连续函数. 设

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b]\text{并且}f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}.$$

(a) 证明A是闭集——因此是$\mathbb{R}^2$ 的可测子集;

(b) 如果$h : A \to \mathbb{R}$ 是连续函数, 证明h在A上是Lebesgue可积的并且

$$\int_A h\mathrm{d}\lambda = \int_a^b\left[\int_{f(x)}^{g(x)} h(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

解　(a) 设$\{(x_n, y_n)\}$ 是A的序列使得$x_n \to x$ 并且$y_n \to y$. 由不等式$f(x_n) \leqslant y_n \leqslant g(x_n)$及$f$和$g$的连续性可得$f(x) \leqslant y \leqslant g(x)$, 即, $(x, y) \in A$. 因此, A是闭集.

(b) 设$c < \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ 并且$d > \sup\{g(x) : x \in [a, b]\}$. 因此, $A \subseteq [a, b] \times [c, d] = E$. 由$h(x, y) = 0$, $(x, y) \notin A$, 将h开拓到E上, 并且注意到h的所有不连续点集是

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b \text{ 并且} y = f(x) \text{或} y = g(x)\}$$

的子集. 由习题18.17知道$\lambda(D) = 0$, 从而h在E上是Riemann可积的(因此也是Lebesgue可积的). 于是, 对习题23.19中的论证进行适当修改, 我们容易看到

$$\begin{aligned}\int_A h\mathrm{d}\lambda &= \int_a^b \int_c^d h(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d h(x, y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} h(x, y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

习题23.21　*设$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是可微函数——在端点处具有单侧导数. 如果导数f' 在$[a, b]$上是一致有界的, 证明f' 是Lebesgue可积的并且*

$$\int_{[a,b]} f'\mathrm{d}\lambda = f(b) - f(a).$$

解　设$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是可微函数使得对某个$M > 0$我们有$|f'(x)| \leqslant M$, $x \in [a, b]$. 令$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, $x < a$, 和$f(x) = f(b) + f'(b)(x - b)$, $x > b$, 我们可以假设f定义在$\mathbb{R}$上(并且是可微的).

其次, 定义可微函数列$\{f_n\}$ 为

$$f_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right] = \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

并且注意到$f_n(x) \to f'(x)$ 对一切$x \in \mathbb{R}$ 成立. 另外, 由中值定理容易看到$|f_n(x)| \leqslant M$ 对一切$x \in \mathbb{R}$ 成立. 因此, 由Lebesgue控制收敛定理知道, f' 在$[a, b]$上是Lebesgue可积的并且

$$\int_{[a,b]} f'\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x. \qquad (\bigstar)$$

于是, 利用变量替换$u = x + 1/n$, 我们看到

$$\begin{aligned}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x &= n\left[\int_a^b f\left(x + \frac{1}{n}\right)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right] \\ &= n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(u)\mathrm{d}u - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right] \\ &= n\left[\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x}{\frac{1}{n}} - \frac{\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x}{\frac{1}{n}} \to f(b) - f(a),$$

其中最后一个极限由微积分的基本定理证明它是正确的. 注意(★)保证了$\int_{[a,b]} f'\mathrm{d}\lambda = f(b) - f(a)$，因此证毕.

习题23.22 设$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是两个Lebesgue可积函数, 对所有的$x \in [a,b]$ 它们满足

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}\lambda(t) \leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}\lambda(t).$$

如果$\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是非负单调减函数, 证明函数ϕf 和ϕg 在$[a,b]$上都是Lebesgue可积的并且满足

$$\int_a^x \phi(t)f(t)\mathrm{d}\lambda(t) \leqslant \int_a^x \phi(t)g(t)\mathrm{d}\lambda(t), \quad x \in [a,b].$$

解 因为ϕ 是单调减函数所以存在某个$M > 0$对一切$t \in [a,b]$ 满足$|\phi(t)| \leqslant M$. 因为f 和g 是Lebesgue 可积的, 所以由不等式$|\phi(t)f(t)| \leqslant M|f(t)|$ 和$|\phi(t)g(t)| \leqslant M|g(t)|$ 可得ϕf 和ϕg 在$[a,b]$上都是Lebesgue可积的.

为了获得所要的不等式, 固定$x \in [a,b]$. 首先假设ϕ 是形如$\phi = \sum_{i=1}^k c_i\chi_{[a_{i-1},a_i)}$ 的非负单调减函数, 其中$\{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b\}$ 是$[a,b]$的一个分割. 因为ϕ 是单调减的, 我们知道$c_1 \geqslant c_2 \geqslant \cdots \geqslant c_k \geqslant 0$. 显然,

$$\begin{aligned}\phi &= (c_1 - c_2)\chi_{[a,a_1)} + (c_2 - c_3)\chi_{[a,a_2)} + \cdots + (c_{k-1} - c_k)\chi_{[a,a_{k-1})} + c_k\chi_{[a,b)} \\ &= \sum_{i=1}^k \gamma_i\chi_{[a,a_i)},\end{aligned}$$

其中$\gamma_i \geqslant 0$ 对一切i成立. 取$1 \leqslant m \leqslant k$ 使得$a_{m-1} \leqslant x < a_m$, 并且注意到

$$\begin{aligned}\int_a^x \phi(t)f(t)\mathrm{d}\lambda(t) &= \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i \int_a^{a_i} f(t)\mathrm{d}\lambda(t) + \gamma_m \int_a^x f(t)\mathrm{d}\lambda(t) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i \int_a^{a_i} g(t)\mathrm{d}\lambda(t) + \gamma_m \int_a^x g(t)\mathrm{d}\lambda(t) \\ &= \int_a^x \phi(t)g(t)\mathrm{d}\lambda(t).\end{aligned}$$

于是, 我们考虑一般情形. 固定$x \in [a,b)$. 如习题21.8的解答, 我们看到存在一个非负单调递减阶梯函数列$\{\phi_n\}$ 满足$\phi_n(t) \uparrow \phi(t)$ 对几乎所有的$t \in [a,b]$ 成立. 因为$|\phi_n(t)f(t)| \leqslant M|f(t)|$, $|\phi_n(t)g(t)| \leqslant M|g(t)|$, $\phi_n(t)f(t) \to \phi(t)f(t)$, 并且因为$\phi_n(t)g(t) \to \phi(t)g(t)$ 对几乎所有的$t \in [a,b]$ 成立, 所以由不等式

$$\int_a^x \phi_n(t)f(t)\mathrm{d}\lambda(t) \leqslant \int_a^x \phi_n(t)g(t)\mathrm{d}\lambda(t)$$

和Lebesgue控制收敛定理可得

$$\int_a^x \phi(t)f(t)\mathrm{d}\lambda(t) = \lim_{n\to\infty} \int_a^x \phi_n(t)f(t)\mathrm{d}\lambda(t)$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\int_a^x \phi_n(t)g(t)\mathrm{d}\lambda(t)=\int_a^x \phi(t)g(t)\mathrm{d}\lambda(t).$$

24. Lebesgue积分的应用

习题24.1 证明

$$\int_0^\infty x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

对$n=0,1,2,\cdots$成立.

解 我们将关于n进行归纳法来证明该公式. 由习题24.6知道$n=0$时公式正确. 如果公式对某个$n\geqslant 0$ 正确, 那么由分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_0^r x^{2(n+1)}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\int_0^r x^{2n+1}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x^2})\\&=-\frac{1}{2}r^{2n+1}\mathrm{e}^{-r^2}+\frac{2n+1}{2}\int_0^r x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

对一切$r>0$成立. 这可推得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{2(n+1)}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x&=\lim_{r\to\infty}\int_0^r x^{2(n+1)}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{2n+1}{2}\int_0^\infty x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{(2n+1)(2n+2)}{2^2(n+1)}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\\&=\frac{[2(n+1)]!}{2^{2(n+1)}(n+1)!}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$

习题24.2 证明对一切$t>0$有$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$.

解 设$u=x\sqrt{t}$. 那么, $\int_0^r \mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{r\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$ 对一切$r>0$成立. 因此,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x&=\lim_{r\to\infty}\int_0^r \mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{t}}\lim_{r\to\infty}\int_0^{r\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}.\end{aligned}$$

习题24.3 证明$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ 在$[1,\infty)$ 上是Lebesgue可积的并且$\int f\mathrm{d}\lambda=1$.

解 因为对一切$x\geqslant 1$, $\frac{\ln x}{x^2}\geqslant 0$, 因此(由定理24.3)只要证明$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$ 存在.

如果$r>1$, 那么由分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_1^r \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x&=-\int_1^r \ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln x}{x}\bigg|_1^r+\int_1^r\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\&=1-\frac{1}{r}-\frac{\ln r}{r}.\end{aligned}$$

因此,

$$\int f\mathrm{d}\lambda=\int_1^\infty\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{r\to\infty}\int_1^r\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{r\to\infty}\left(1-\frac{1}{r}-\frac{\ln r}{r}\right)=1.$$

习题24.4 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=1.$$

解 注意到

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\lim_{r\to\infty}\int_0^r \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\lim_{r\to\infty}(1-\mathrm{e}^{-r})=1.$$

因此，函数e^{-x} 在$[0,\infty)$ 上是Lebesgue可积的．于是，设$g_n(x)=(1+x/n)^n\,\mathrm{e}^{-2x}\chi_{[0,n]}(x)$，并且注意到每个$g_n$在$[0,\infty)$ 上是Lebesgue可积的．由初等微积分我们知道$(1+x/n)^n\uparrow \mathrm{e}^x$ 对每个$x\geqslant 0$ 成立，从而$g_n(x)\uparrow \mathrm{e}^{-x}$ 对每个$x\geqslant 0$ 成立．因此，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int g_n\mathrm{d}\lambda=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1.$$

习题24.5 设$f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续的，单调减的，并且是Lebesgue可积函数．证明

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}\int_x^\infty f(s)\mathrm{d}s=0\text{当且仅当}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+t)}{f(x)}=0,\quad t>0.$$

解 假设$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}\int_x^\infty f(s)\mathrm{d}s=0$ 并且固定$t>0$．因为f是单调减的，所以我们看到$f(x+t)\leqslant f(s)$ 对所有的$x\leqslant s\leqslant x+t$ 成立，从而

$$tf(x+t)=\int_x^{x+t}f(x+t)\mathrm{d}s\leqslant\int_x^{x+t}f(s)\mathrm{d}s.$$

因此，我们有

$$0<\frac{f(x+t)}{f(x)}\leqslant\frac{1}{t}\cdot\frac{\int_x^{x+t}f(s)\mathrm{d}s}{f(x)}\leqslant\frac{1}{t}\cdot\frac{\int_x^\infty f(s)\mathrm{d}s}{f(x)},$$

由此可得$\lim_{x\to\infty}f(x+t)/f(x)=0$．反之，假设对每个固定的$t$有$\lim_{x\to\infty}f(x+t)/f(x)=0$ 成立，并且，为了简单起见，记$F(x)=\frac{1}{f(x)}\int_x^\infty f(s)\mathrm{d}s,\ x\in[0,\infty)$．固定$\varepsilon>0$，然后取某个$0<\delta<1$ 使得$\delta/(1-\delta)<\varepsilon$．(因为$\lim_{\delta\to0^+}\delta/(1-\delta)=0$ 所以这样的δ 总是存在的.) 由$\lim_{x\to\infty}f(x+\delta)/f(x)=0$，我们可以推出存在某个$M>0$使得$f(x+\delta)/f(x)<\delta$ 对所有的$x>M$成立．即，$f(x+\delta)\leqslant\delta f(x)$ 对一切$x>M$ 成立．于是，注意到对$x>M$，我们有

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{1}{f(x)}\int_x^{x+\delta}f(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{f(x)}\int_{x+\delta}^\infty f(s)\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{f(x)}\int_x^{x+\delta}f(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{f(x)}\int_x^\infty f(u+\delta)\mathrm{d}u\\&\leqslant\frac{1}{f(x)}\int_x^{x+\delta}f(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{f(x)}\int_x^\infty \delta f(u)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{f(x)}\int_x^{x+\delta}f(s)\mathrm{d}s+\delta F(x).\end{aligned}$$

因此，如果$x>M$，那么

$$(1-\delta)F(x)\leqslant\tfrac{1}{f(x)}\textstyle\int_x^{x+\delta}f(s)\mathrm{d}s\leqslant\tfrac{1}{f(x)}\int_x^{x+\delta}f(x)\mathrm{d}s=\delta,$$

从而$0<F(x)\leqslant\frac{\delta}{1-\delta}<\varepsilon$ 对一切$x>M$成立．因此，$\lim_{x\to\infty}F(x)=0$．

习题24.6 证明广义Riemann积分

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x$$

(被称为Fresnel积分)都存在. 并且, 证明$\cos(x^2)$ 和$\sin(x^2)$ 在$[0,\infty)$ 上不是Lebesgue可积的.

解 我们只讨论$\int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x$. 对于$\int_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x$ 可以类似地讨论.

设$0<s<t$. 通过变量替换$u=x^2$, 由分部积分可得

$$\left|\int_s^t \sin(x^2)\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{s^2}^{t^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u\right| = \frac{1}{2}\left|\left[\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\Big|_{s^2}^{t^2} - \int_{s^2}^{t^2} \cos u\mathrm{d}(u^{-\frac{1}{2}})\right]\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\int_{s^2}^{t^2}\mathrm{d}(u^{-\frac{1}{2}})\right] = \frac{1}{t}.$$

结合定理24.1[1], 该不等式保证了广义Riemann积分$\int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x$ 存在. 不等式

$$\int_{\sqrt{k\pi-\pi}}^{\sqrt{k\pi}} |\sin(x^2)|\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{k\pi-\pi}^{k\pi} \frac{|\sin u|}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \geqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi k}}\int_{k\pi-\pi}^{k\pi} |\sin x|\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$$

可推得

$$\int_0^{\sqrt{n\pi}} |\sin(x^2)|\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \int_{\sqrt{k\pi-\pi}}^{\sqrt{k\pi}} |\sin(x^2)|\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}},$$

这说明$\int_0^\infty |\sin(x^2)|\mathrm{d}x$ 在$\mathbb{R}$中不存在——因此, $\sin(x^2)$ 在$[0,\infty)$ 上不是Lebesgue可积的.

习题24.7 证明$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

解 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x=0, \\ \dfrac{\sin^2 x}{x^2}, & 0<x\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x^2}, & x>1, \end{cases}$$

并且注意到在$[0,\infty)$ 上f是Lebesgue可积的. 由不等式$0\leqslant \sin^2 x/x^2 \leqslant f(x)$, 我们看到函数$\sin^2 x/x^2$ 在$[0,\infty)$ 上是Lebesgue可积的.

于是, 对一切$r,\varepsilon>0$, 我们有

$$\int_\varepsilon^r \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x = -\int_\varepsilon^r \sin^2 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\sin^2 x}{x}\bigg|_\varepsilon^r + \int_\varepsilon^r \frac{2\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\sin^2\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{\sin^2 r}{r} + \int_{2\varepsilon}^{2r} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

1. 定理24.1就是广义Riemann积分存在的Cauchy收敛原理. ——译者注

因此, 由定理24.8, 我们看到

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{\substack{r\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} \int_\varepsilon^r \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

习题24.8 设$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是任意的测度空间, T是一个度量空间, 并且$f: X\times T\to\mathbb{R}$ 是一个函数. 假设对每个$t\in T$, $f(x,t)$ 关于x是可测函数, 对每个$x\in X$, $f(x,t)$ 关于t是连续函数. 另外假设存在一个可积函数g使得对一切$t\in T$ 我们有$|f(x,t)|\leqslant g(x)$ 对几乎所有的$x\in X$ 成立. 证明定义为

$$F(t)=\int_X f(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$$

的函数$F: T\to\mathbb{R}$ 是连续函数.

解 设在T中$t_n\to t$. 由公式$g_n(x)=f(x,t_n)$ 定义函数$g_n: X\to\mathbb{R}$. 由我们的假设, 每个g_n是可积的, $|g_n|\leqslant g$ a.e., 并且$g_n(x)\to f(x,t)$ 对一切$x\in X$ 成立. 因此, 由Lebesgue控制收敛定理, 我们有

$$F(t_n)=\int f(x,t_n)\mathrm{d}\mu(x)=\int g_n\mathrm{d}\mu\to\int f(x,t)\mathrm{d}\mu(x)=F(t).$$

这说明F是连续函数.

习题24.9 证明

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\mathrm{d}x=\ln t$$

对一切$t>0$成立.

解 对$x>0$和$t>0$考虑函数$f(x,t)=\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}$. 观察到函数值$f(0,t)=t-1$ 将f连续地开拓到点$(0,t), t>0$. 其次, 注意到定义为

$$g(x,t)=\begin{cases} |f(x,t)|, & 0\leqslant x\leqslant 1 \quad 并且 \quad t>0,\\ \mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-xt}, & x>1 \quad 并且 \quad t>0,\end{cases}$$

的函数$g(x,t)$ 对一切$t>0$是Lebesgue可积的. 而且, $|f(x,t)|\leqslant g(x,t)$ 成立. 这可推出

$$F(t)=\int_0^\infty f(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\mathrm{d}x$$

作为广义Riemann积分和Lebesgue积分都存在; 也可参见习题24.3.

其次, 注意到$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)=\mathrm{e}^{-xt}$ 对所有的$x>0$和$t>0$成立. 结合定理24.5, 不等式$0\leqslant \mathrm{e}^{-xt}\leqslant \mathrm{e}^{-xa}$, 其中$t>a>0$, $x\geqslant 0$, 说明

$$F'(t)=\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x=\frac{1}{t}$$

对所有$t>0$成立. 因此, $F(t)=\ln t+C$. 因为$F(1)=0$, 因此$C=0$从而

$$F(t)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\mathrm{d}x=\ln t.$$

习题24.10　对一切$t>0$，设$F(t)=\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+x^2}dx$.

(a) 证明作为广义的Riemann积分和Lebesgue积分, 该积分存在;

(b) 证明F二阶可导并且对一切$t>0$，$F''(t)+F(t)=1/t$ 成立.

解　(a) F的可积性由定理24.3和不等式

$$\left|\frac{e^{-xt}}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$$

可得.

(b) 如果$f(x,t)=\frac{e^{-xt}}{1+x^2}$，那么

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)=\frac{-xe^{-xt}}{1+x^2}\text{并且}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)=\frac{x^2e^{-xt}}{1+x^2}.$$

因为$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right|\leqslant e^{-xt}$ 和$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)\right|\leqslant e^{-xt}$ 都成立, 应用定理24.5两次我们得到

$$F''(t)=\int_0^\infty \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)dx=\int_0^\infty \frac{x^2e^{-xt}}{1+x^2}dx.$$

因此,

$$F''(t)+F(t)=\int_0^\infty \frac{x^2e^{-xt}}{1+x^2}dx+\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+x^2}dx=\int_0^\infty e^{-xt}dx=\frac{1}{t}.$$

习题24.11　证明广义Riemann积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(t\cos x)dx$ 对一切$t>0$ 存在并且它也是Lebesgue积分. 另外, 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(t\cos x)dx=\frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{t}{2}\right)$$

对所有的$t>0$ 成立.

解　设$f(x,t)=\ln(t\cos x), 0\leqslant x<\pi/2, t>0$，并且$g(x)=(\pi/2-x)^{-\frac{1}{2}}, 0\leqslant x<\pi/2$. 一个简单的论证可以说明$g$ 在$[0,\pi/2)$ 上的广义Riemann积分存在(因此, 也是Lebesgue积分). 另外, L'Hôpital法则说明$\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}}[f(x,t)/g(x)]=0$. 因此, 对每个$t>0$ 存在某个$0<x_0<\pi/2$ 使得$|f(x,t)|\leqslant g(x)$ 对所有的$x_0<x<\pi/2$ 成立. 因为$f(x,t)$ 对$0\leqslant x<\pi/2$ 是连续的, 所以定理22.6的一个简单应用可以保证

$$F(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(t\cos x)dx$$

作为Lebesgue积分和广义Riemann积分都存在. 其次, 注意到$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)=1/t$，并且当$0<a<t$ 时我们有$|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)|\leqslant 1/a$. 因此, 由定理24.5, 我们有

$$F'(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx=\frac{\pi}{2t}$$

对一切$t>0$ 成立, 因此$F(t)=\frac{\pi}{2}\ln t+C$.

因为$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx$ (为什么?), 所以

$$2C=2F(1)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\frac{\sin 2x}{2})\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\ln 2 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\ln 2 \\
&= C - \frac{\pi}{2}\ln 2.
\end{aligned}
$$

因此, $C = -\frac{\pi}{2}\ln 2$, 从而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t\cos x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln t - \frac{\pi}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{t}{2}\right)$$

对一切$t > 0$ 成立.

习题24.12 证明对一切$t \geqslant 0$ 广义Riemann积分$\int_0^\infty \frac{\sin xt}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$ 作为Lebesgue积分存在并且

$$\int_0^\infty \frac{\sin xt}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-t}).$$

解 对一切$t \in \mathbb{R}$ 设$F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin xt}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$. 由

$$\left|\frac{\sin xt}{x(1+x^2)}\right| \leqslant \frac{|xt|}{|x(1+x^2)|} = \frac{|t|}{1+x^2},$$

我们看到F确实是$\mathbb{R}$上定义明确的实值函数并且定义下的积分作为Lebesgue 积分和广义Riemann积分都存在. 而且, 关系式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\sin xt}{x(1+x^2)}\right] = \frac{\cos xt}{1+x^2} \text{和} \left|\frac{\cos xt}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$$

连同定理24.5保证了F是可微函数并且

$$F'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\sin xt}{x(1+x^2)}\right]\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

对一切$t \in \mathbb{R}$ 成立.

因为$\frac{\partial}{\partial t}[\frac{\cos xt}{1+x^2}] = -\frac{x\sin xt}{1+x^2}$ 和不等式$|-\frac{x\sin xt}{1+x^2}| \leqslant \frac{|x|}{1+x^2}$ 中的自然控制函数在$[0, \infty)$上不是Lebesgue可积的, 所以我们不能利用定理24.5得出

$$F''(t) = -\int_0^\infty \frac{x\sin xt}{1+x^2}\mathrm{d}x. \tag{$\star$}$$

其实, 等式

$$\frac{x\sin xt}{1+x^2} = \frac{x^2\sin xt}{x(1+x^2)} = \frac{\sin xt}{x} - \frac{\sin xt}{x(1+x^2)} \tag{$\star\star$}$$

一方面说明了对一切$t>0$，函数$x\mapsto \frac{x\sin xt}{1+x^2}$ 在$[0,\infty)$ 上不是Lebesgue可积的, 另一方面说明了

$$\int_0^\infty \frac{x\sin xt}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^\infty \frac{\sin xt}{x}\mathrm{d}x=-\int_0^\infty \frac{\sin xt}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-F(t) \qquad (\dagger)$$

对一切$t>0$ 成立.

我们用另一种方法证明对一切$t>0$, (★)是正确的. 对每个n, 设

$$G_n(t)=\int_0^n \frac{\cos xt}{1+x^2}\mathrm{d}t.$$

显然, 对一切$t\in\mathbb{R}$，$G_n(t)\to\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+x^2}\mathrm{d}x$．于是, 由定理24.5和(★★), 我们看到

$$\begin{aligned}G_n'(t)&=-\int_0^n \frac{x\sin nt}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\int_0^n \frac{\sin xt}{x}\mathrm{d}x+\int_0^n \frac{\sin xt}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x\\&=-\int_0^{nt}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_0^n \frac{\sin xt}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因此, 对一切$t>0$ 我们有

$$\lim_{n\to\infty}G_n'(t)=-\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_0^\infty \frac{\sin xt}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}+F(t)=g(t).$$

我们断言对每个$a>0$，导数序列$\{G_n'\}$ 在开区间(a,∞) 上一致收敛于函数$g(t)=-\frac{\pi}{2}+F(t)$．为了看出这一点, 固定$a>0$ 并且设$\varepsilon>0$．取某个$x_0>1$ 使得

$$\left|\int_s^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \text{ 并且} \left|\int_s^\infty \frac{\sin xt}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_s^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}<\varepsilon$$

对所有的$s>x_0$ 成立. 于是, 如果我们固定某个自然数k满足$k\geqslant x_0$ 和$ka>x_0$，那么对一切$n\geqslant k$ 和所有的$t>a$，我们有

$$|G_n'(t)-g(t)|=\left|\int_{nt}^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x-\int_n^\infty \frac{\sin xt}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x\right|<2\varepsilon.$$

这说明$\{G_n'\}$ 一致收敛于函数$g(t)=-\frac{\pi}{2}+F(t)$.

最后, 利用习题9.29, 我们得到$F''(t)=[\lim_{n\to\infty}G_n(t)]'=-\pi/2+F(t)$，或者$F''(t)-F(t)=-\pi/2$ 对一切$t>0$ 成立. 解此微分方程我们得到

$$F(t)=\frac{\pi}{2}+c_1\mathrm{e}^{-t}+c_2\mathrm{e}^{t}, t>0.$$

因为F和F' 在原点连续(为什么?), 所以由$F(0)=0$，$F'(0)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\pi/2$ 以及前面$F(t)$的公式可得$c_1=-\pi/2$ 和$c_2=0$．因此, 对一切$t\geqslant 0$ 有$F(t)=\pi(1-\mathrm{e}^{-t})/2$．

习题24.13　$t>0$ 时的Gamma函数由积分定义如下:

$$\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

(a) 证明积分

$$\int_0^\infty x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\lim_{\substack{r\to\infty\\ \varepsilon\to 0^+}}\int_\varepsilon^r x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

作为广义Riemann积分(因此, 作为Lebesgue积分)存在;

(b) 证明$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$;

(c) 证明$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$对所有的$t > 0$成立, 并利用该结论证明$\Gamma(n+1) = n!, n = 1, 2, \cdots$;

(d) 证明Γ 在每个$t > 0$ 处可微并且

$$\Gamma'(t) = \int_0^\infty x^{t-1}\mathrm{e}^{-x} \ln x \,\mathrm{d}x$$

成立;

(e) 证明Γ 有任意阶导数并且

$$\Gamma^{(n)}(t) = \int_0^\infty x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^n \mathrm{d}x$$

对$n = 1, 2, \cdots$ 和所有$t > 0$ 成立.

解 (a)因为$x^{t-1}\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^{t-1}$ 对$0 < x \leqslant 1$ 成立, 所以由习题23.16得到, 作为广义Riemann积分和Lebesgue积分, $\int_0^1 x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 都存在.

于是, 对每个$t > 0$ 我们有$\lim_{x\to\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 0$. 因此, 存在某个$M > 0$ (依赖于t)使得$0 \leqslant x^{t-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \leqslant M$ 对所有的$x \geqslant 1$ 成立. 从而$x^{t-1}\mathrm{e}^{-x} \leqslant M\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ 对一切$x \geqslant 1$ 成立. 这说明对一切$t > 0$, 作为广义Riemann积分和Lebesgue积分, $\int_1^\infty x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 都存在.

前面证得作为广义Riemann积分和Lebesgue积分, $\int_0^\infty x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 都存在.

(b) 变量替换$u = x^{\frac{1}{2}}$ 得到

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}.$$

(c) 由分部积分, 我们得到

$$\begin{aligned}\Gamma(t+1) &= \int_0^\infty x^t\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\int_0^\infty x^t\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x}) \\ &= -x^t\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty tx^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = t\int_0^\infty x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\ &= t\Gamma(t).\end{aligned}$$

因此, 我们看出

$$\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = n!.$$

(d) 和(e). 注意到$\frac{\partial^n}{\partial t^n}(x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}) = x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^n$ 对所有的$t > 0$ 和$x > 0$ 成立.

于是, 设$0 < a < t < b$ 固定并且考虑连续函数$h(x,t) = \frac{\partial^n}{\partial t^n}(x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}) = x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^n$, $a < t < b, x > 0$. 我们断言存在一个Lebesgue可积函数$g: (0,\infty) \to (0,\infty)$ 使得$|h(x,t)| \leqslant g(x)$ 对所有的$x > 0$ 和$a < t < b$ 成立. 如果情况如此, 那么定理24.5允许我们"在积分号下微分", 并且因为$0 < a < b$ 是任意的因此Γ 一定有任意阶导数而且所要的公式成立. 所以, 我们必须构造一个$(0,\infty)$ 上的Lebesgue可积函数g使得$|h(x,t)| \leqslant g(x)$ 对一切$a < t < b$ 和$x > 0$ 成立.

注意到对$x \geqslant 1$, 我们有$0 \leqslant x^{t-1} \leqslant x^b$. 利用L'Hôpital法则, 我们看到

$$\lim_{x\to\infty} x^b\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(\ln x)^n = \lim_{x\to\infty}\frac{x^b}{\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}} \cdot \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^n}{\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}} = 0 \cdot 0 = 0,$$

从而存在某个$M>0$ 使得$x^b \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(\ln x)^n \leqslant M$ 对所有的$x \geqslant 1$ 成立. 因此,

$$|h(x,t)| \leqslant |x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^n| \leqslant M\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

对所有的$x \geqslant 1$ 和$a<t<b$ 成立.

对于剩余部分, 我们需要微积分中的两个事实.

$$\lim_{x\to 0+} x^a(\ln x)^n = 0 \text{和} \int_{0+}^1 x^{a-1}(\ln x)^n \mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{a^{n+1}}.$$

二者都可以由归纳法来证. 对这个极限利用归纳法和L'Hôpital法则, 观察到

$$\lim_{x\to 0+} x^a \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-a})'} = \lim_{x\to 0+} -\frac{x^a}{a} = 0$$

和

$$\lim_{x\to 0+} x^a(\ln x)^{n+1} = \lim_{x\to 0+} \frac{[(\ln x)^{n+1}]'}{(x^{-a})'} = \frac{n+1}{a}\lim_{x\to 0+} x^a(\ln x)^n.$$

对于积分, 利用归纳法并且考虑到

$$\int_{0+}^1 x^{a-1}\ln x \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_{0+}^1 \ln x \,\mathrm{d}(x^a) = \frac{1}{a}x^a \ln x\Big|_{0+}^1 - \frac{1}{a}\int_{0+}^1 x^{a-1}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a^2}$$

和

$$\begin{aligned}\int_{0+}^1 x^{a-1}(\ln x)^{n+1}\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}\int_{0+}^1 (\ln x)^{n+1}\mathrm{d}(x^a) \\ &= \frac{1}{a}x^a(\ln x)^{n+1}\Big|_{0+}^1 - \frac{n+1}{a}\int_{0+}^1 x^{a-1}(\ln x)^n \mathrm{d}x \\ &= -\frac{n+1}{a}\int_{0+}^1 x^{a-1}(\ln x)^n \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为要么$(\ln x)^n \geqslant 0$ 对所有$x \in (0,1]$ 成立要么$(\ln x)^n \leqslant 0$ 对所有$x \in (0,1]$ 成立, 所以函数$\phi(x) = x^{a-1}(\ln x)^n, x \in (0,1]$ 在$(0, 1]$上是Lebesgue可积的. 于是, 设

$$g(x) = \begin{cases} x^{a-1}|\ln x|^n, & 0<x \leqslant 1, \\ M\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

并且注意到$g(x)$在$(0,\infty)$ 上是Lebesgue可积的. 为了完成证明, 注意到

$$|h(x,t)| \leqslant g(x)$$

对所有的$x>0$和$a<t<b$ 成立.

习题24.14　设$f:[0,1] \to \mathbb{R}$ 是Lebesgue可积函数并且由$F(t) = \int_0^1 f(t)\sin(xt)\mathrm{d}\lambda(x)$ 定义函数$F:[0,1] \to \mathbb{R}$.

(a) 证明定义F的积分存在并且F是一致连续函数;

(b) 证明F有所有阶导数并且对$n=1,2,\cdots,t\in[0,1]$,

$$F^{(2n)}(t)=(-1)^n\int_0^1 x^{2n}f(x)\sin(xt)\mathrm{d}\lambda(x),$$
$$F^{(2n-1)}(t)=(-1)^n\int_0^1 x^{2n-1}f(x)\cos(xt)\mathrm{d}\lambda(x);$$

(c) 证明$F=0$(即, $F(t)=0,t\in[0,1]$)当且仅当$f=0$ a.e..

解 (a)注意到对每个固定的$t\in[0,1]$, 函数$x\mapsto\sin(xt)$ 是连续的因此是可测的. 不等式$|f(x)\sin(xt)|\leqslant|f(x)|$ 保证了对每个$t\in[0,1]$, $x\mapsto f(x)\sin(xt)$ 是可积的. 所以, F是一个定义明确的函数.

对于F的一致连续性, 注意到

$$\begin{aligned}|F(t)-F(s)|&=\left|\int_0^1 f(x)\sin(xt)\mathrm{d}\lambda(x)-\int_0^1 f(x)\sin(xs)\mathrm{d}\lambda(x)\right|\\&=\left|\int_0^1 f(x)[\sin(xt)-\sin(xs)]\mathrm{d}\lambda(x)\right|\\&\leqslant\int_0^1|f(x)|\,|\sin(xt)-\sin(xs)|\mathrm{d}\lambda(x)\\&\leqslant\int_0^1|f(x)|\,|xt-xs|\mathrm{d}\lambda(x)\\&=\left[\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}\lambda(x)\right]|t-s|\end{aligned}$$

对所有的$s,t\in[0,1]$ 成立.

(b) 考虑两个变量的函数$h(x,t)=f(x)\sin(xt)$. 那么容易用归纳法得到, 对每个$n=1,2,\cdots$, 我们有

$$\frac{\partial^{2n}h(x,t)}{\partial t^{2n}}=(-1)^n x^{2n}f(x)\sin(xt)\text{和}\frac{\partial^{2n-1}h(x,t)}{\partial t^{2n-1}}=(-1)^n x^{2n-1}f(x)\cos(xt)$$

对一切$t\in[0,1]$ 和几乎所有的x成立. 这可推出$\left|\frac{\partial^n h(x,t)}{\partial t^n}\right|\leqslant|x^nf(x)|=g_n(x)$ 对所有的$t\in[0,1]$ 和几乎所有的x成立. 因为对每个n, g_n是Lebesgue可积的, 所以由定理24.5我们可以"在积分号下微分"并且得到所要的公式.

(c) 假设对每个$t\in[0,1]$, $F(t)=0$. 那么对所有的n有$F^{(2n)}(t)=0$, 从而由(b)我们得到$\int_0^1 x^{2n}f(x)\sin(xt)\mathrm{d}\lambda(x)=0$ 对每个n和所有的$t\in[0,1]$ 成立. 取$t=1$, 我们得到

$$\int_0^1 x^{2n}[f(x)\sin x]\mathrm{d}\lambda(x)=0$$

对每个n成立. 于是, 由习题22.21可推出对几乎所有x有$f(x)\sin x=0$. 因为对一切$0<x\leqslant1,\sin x>0$, 所以我们容易推得$f(x)=0$ 对几乎所有的x成立.

25. 逼近可积函数

习题25.1 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是Lebesgue可积函数. 证明

$$\lim_{t\to\infty}\int f(x)\cos(xt)\mathrm{d}\lambda(x)=\lim_{t\to\infty}\int f(x)\sin(xt)\mathrm{d}\lambda(x)=0.$$

解 由定理25.2知道, 只要对特殊情形$f=\chi_{[a,b)}$证明这个结果. 所以, 设$f=\chi_{[a,b)}$, 其中$-\infty<a<b<\infty$. 在这种情况下, 对每个$t>0$我们有

$$|\int f(x)\cos(xt)\mathrm{d}\lambda(x)|=|\int_a^b\cos(xt)\mathrm{d}x|$$
$$=\left|\left|\frac{\sin(xt)}{t}\right|\begin{matrix}x=b\\x=a\end{matrix}\right|=\left|\frac{\sin(bt)-\sin(at)}{t}\right|\leqslant\frac{2}{t},$$

从而$\lim_{t\to\infty}\int f(x)\cos(xt)\mathrm{d}\lambda(x)=0$成立. 同理, 我们可以证明$\lim_{t\to\infty}\int f(x)\sin(xt)\mathrm{d}\lambda(x)=0$.

习题25.2 一个函数$f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ (其中$\mathcal{O}$是$\mathbb{R}^n$的一个非空开子集)被称为是一个C^∞函数如果f有所有阶的连续偏导数.

(a) 考虑函数$\rho:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 它定义为, 当$|x|<1$时, $\rho(x)=\exp[\frac{1}{x^2-1}]$, 当$|x|\geqslant 1$时, $\rho(x)=0$. 证明ρ是一个C^∞函数使得$\mathrm{Supp}\rho=[-1,1]$[1].

(b) 对于$\varepsilon>0$和$a\in\mathbb{R}$证明函数$f(x)=\rho((x-a)/\varepsilon)$也是一个$C^\infty$函数并且具有$\mathrm{Supp}f=[a-\varepsilon,a+\varepsilon]$.

解 (a)我们将证明对每个$n,\rho^{(n)}(1)$存在.

由L'Hôpital法则, 首先观察到对$k=0,1,2,\cdots,\lim_{t\to\infty}t^k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}=0$成立. 注意到对$0<x<1$如果我们令$t=1/(1-x)$, 那么我们有不等式

$$\left|\frac{x^m\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}}}{(x^2-1)^k(x-1)}\right|\leqslant\left|\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-x)}}}{(1-x)^{k+1}}\right|=t^{k+1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t},$$

由此可得

$$\lim_{x\uparrow 1}\frac{x^m\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}}}{(x^2-1)^k(x-1)}=\lim_{t\uparrow\infty}t^{k+1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}=0,k,m=0,1,2,\cdots. \qquad (\bigstar)$$

于是, 由归纳法, 我们容易看出对于$-1<x<1$, 导数$\rho^{(n)}(x)$是形如$\frac{x^m\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}}}{(x^2-1)^k}$项的有限和. 利用($\bigstar$)和归纳法, 我们还可以看出$\rho^{(n)}(1)=0$对$n=1,2,\cdots$成立.

(b) 注意到: $f(x)\neq 0$当且仅当$-1<\frac{x-a}{\varepsilon}<1$当且仅当$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$. 因此, Supp $f=[a-\varepsilon,a+\varepsilon]$.

习题25.3 设$[a,b]$是一个区间, $\varepsilon>0$使得$a+\varepsilon<b-\varepsilon$, ρ是上一题中的函数. 对所有的$x\in\mathbb{R}$定义函数$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为$h(x)=\int_a^b\rho(\frac{t-x}{\varepsilon})\mathrm{d}t$. 证明

(a) Supp $h\subseteq[a-\varepsilon,b+\varepsilon]$;

(b) 对所有的$x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon],h(x)=c$ (常数函数);

(c) h是C^∞函数并且$h^{(n)}(x)=\int_a^b\frac{\partial^n}{\partial x^n}\rho(\frac{t-x}{\varepsilon})\mathrm{d}t$对所有$x\in\mathbb{R}$成立;

(d) C^∞函数$f=h/c$满足: $0\leqslant f(x)\leqslant 1,x\in\mathbb{R};f(x)=1,x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$; $\int|\chi_{[a,b)}-f|\mathrm{d}\lambda<4\varepsilon$.

解 为了简单起见, 设函数$g_x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$定义为$g_{x(t)}=\rho(\frac{t-x}{\varepsilon})$, 从而$h(x)=\int_a^b g_x(t)\mathrm{d}t$.

---

1. 符号"Suppρ"表示函数ρ的支集, 即, Supp$\rho=\{x:\rho(x)\neq 0\}$. ——译者注

(a) 由上一题的(b)我们知道$\operatorname{Supp} g_x = [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. 因此, 如果$a < t < b$ 并且$x \notin [a-\varepsilon, b+\varepsilon]$, 那么$g_x(t) = \rho((t-x)/\varepsilon) = 0$ (因为$|\frac{t-x}{\varepsilon}| \geqslant 1$). 这可推出$h(x) = 0$ 对所有$x \notin [a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ 成立, 从而$\operatorname{Supp} h \subseteq [a-\varepsilon, b+\varepsilon]$.

(b) 如果$a+\varepsilon < x < b-\varepsilon$, 那么$\operatorname{Supp} g_x = [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ 从而

$$h(x) = \int_a^b g_x(t)\mathrm{d}t = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \rho\left(\frac{t-x}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}t = \varepsilon\int_{-1}^{1} \rho(u)\mathrm{d}u = c > 0.$$

(c) 因为每个偏导数$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\rho(\frac{t-x}{\varepsilon})$ 是连续的, 所以它在$[a,b]$ 上(因此在$\mathbb{R}$上)是有界的. 于是, 所要的结论由定理24.5可得.

(d) 因为$\operatorname{Supp} g_x = [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ 并且g_x是正函数, 所以

$$0 \leqslant h(x) = \int_a^b g_x(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \rho\left(\frac{t-x}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}t \leqslant \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \rho\left(\frac{t-x}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}t = c$$

对所有x成立. 因此, $f = h/c$ 对所有x满足$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

最后, 观察到

$$|\chi_{(a,b)} - f| \leqslant \chi_{(a-\varepsilon,a+\varepsilon)} + \chi_{(b-\varepsilon,b+\varepsilon)}$$

成立, 从而$\int|\chi_{[a,b)} - f|\mathrm{d}\lambda = \int|\chi_{(a,b)} - f|\mathrm{d}\lambda < 4\varepsilon$.

f的图形如图4.3所示.

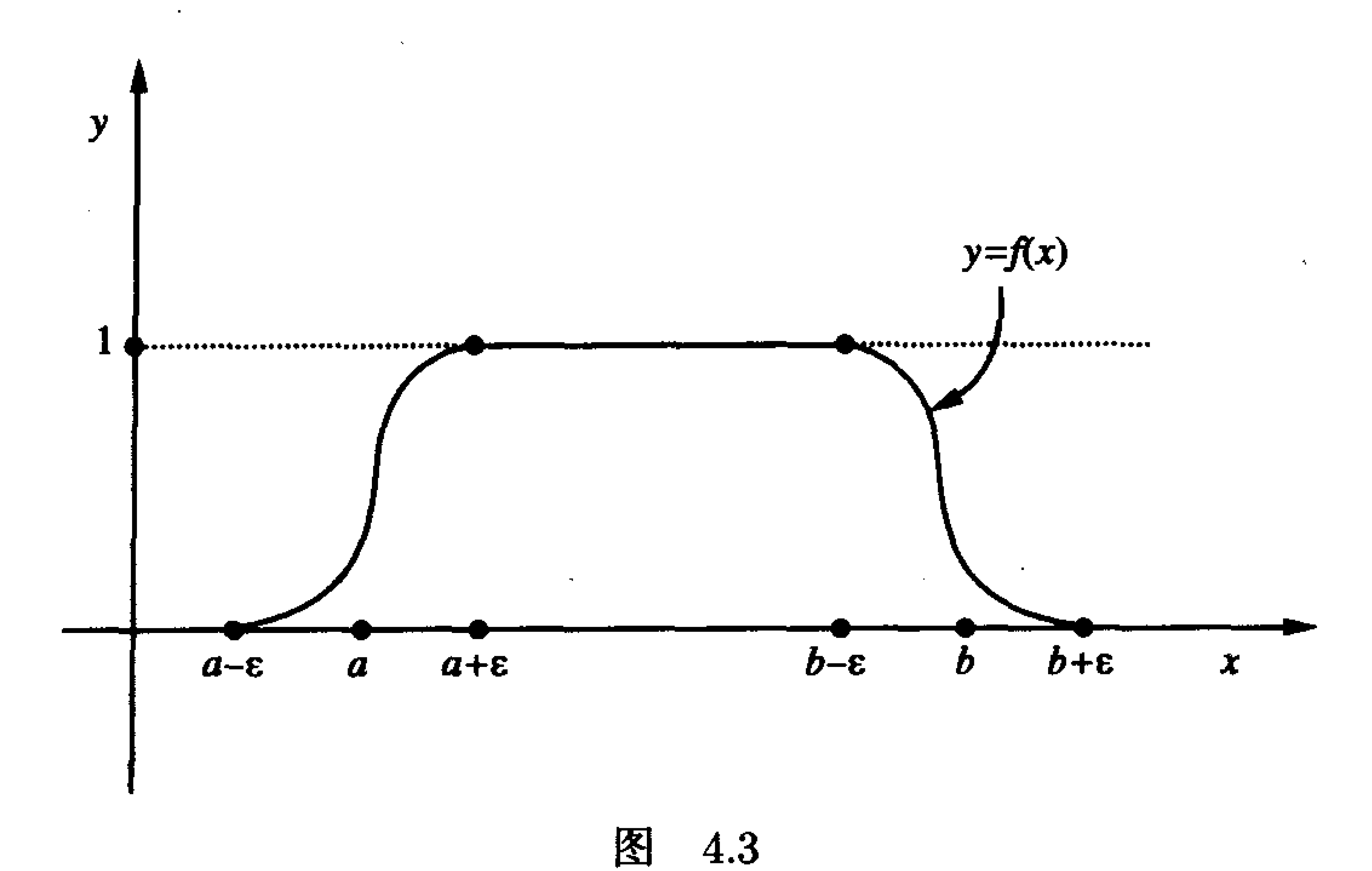


图　4.3

习题25.4　设$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 关于Lebesgue测度是可积函数, 并且$\varepsilon > 0$. 证明存在一个C^∞ 函数g使得$\int|f-g|\mathrm{d}\lambda < \varepsilon$.

解　设$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是Lebesgue可积函数并且$\varepsilon > 0$. 由定理25.2知道存在一个阶梯函数$\phi = \sum_{i=1}^n c_i\chi_{[a_i,b_i)}$ (其中对每个$i, c_i \neq 0$)使得$\int|f-\phi|\mathrm{d}\lambda < \varepsilon$. 于是, 由上一题, 对每个i存在一个具有紧支集的C^∞ 函数g_i使得$\int|\chi_{[a_i,b_i)} - g_i|\mathrm{d}\lambda < \varepsilon/(n/|c_i|)$. 然后, 注意到C^∞ 函数$g = \sum_{i=1}^n c_i g_i$ 具有紧支集并且满足

$$\int|f-g|\mathrm{d}\lambda \leqslant \int|f-\phi|\mathrm{d}\lambda + \int|\phi-g|\mathrm{d}\lambda$$

$$
\begin{aligned}
&< \varepsilon + \int |\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{[a_i,b_i)} - \sum_{i=1}^{n} c_i g_i| \mathrm{d}\lambda \\
&\leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} |c_i| \int |\chi_{[a_i,b_i)} - g_i| \mathrm{d}\lambda \\
&< \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} |c_i| \frac{\varepsilon}{n|c_i|} \\
&= \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

习题25.5　本题的目的是建立如下一般性的结果. 如果$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是可积函数(关于Lebesgue测度)并且$\varepsilon > 0$，那么存在一个$C^\infty$函数$g$使得$\int |f-g|\mathrm{d}\lambda < \varepsilon$.

(a) 设$a_i < b_i, i = 1, \cdots, n$，并且$I = \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$. 取$\varepsilon > 0$使得对每个$i, a_i + \varepsilon < b_i - \varepsilon$. 利用习题25.3对每个$i$取$C^\infty$函数$f_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$使得: $0 \leqslant f_i(x) \leqslant 1, x \in \mathbb{R}; f_i(x) = 1, x \in [a+\varepsilon, b_i - \varepsilon]$; $\mathrm{Supp} f_i \subseteq [a_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon]$. 于是, 由$h(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$定义$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. 证明$h$是一个$\mathbb{R}^n$上的$C^\infty$函数并且

$$\int |\chi_I - h| \mathrm{d}\lambda \leqslant 2\left[\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i + 2\varepsilon) - \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)\right];$$

(b) 设$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是Lebesgue可积的, 并且$\varepsilon > 0$. 利用(a)证明存在一个具有紧支集的$C^\infty$函数$g$使得

$$\int |f-g| \mathrm{d}\lambda < \varepsilon.$$

解　(a)显然, h是一个C^∞函数. 设$A = \prod_{i=1}^{n}(a_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon)$, $B = \prod_{i=1}^{n}(a_i + \varepsilon, b_i + \varepsilon)$, 并且$C = \prod_{i=1}^{n}(a_i - \varepsilon, b_i - \varepsilon)$. 于是, 由不等式

$$|\chi_I - h| \leqslant (\chi_A - \chi_B) + (\chi_A - \chi_C)$$

可得所要的结论.

(b) 设f是可积函数并且$\varepsilon > 0$. 取一个形如$\phi = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{I_i}$; (其中每个$I_i$是$\mathbb{R}^n$中的有限开区间)的阶梯函数使得$\int |f - \phi| \mathrm{d}\lambda < \varepsilon$. 由(a)可得存在一个具有紧支集的$C^\infty$函数$g$使得$\int |\phi - g| \mathrm{d}\lambda < \varepsilon$. 因此, $\int |f-g| \mathrm{d}\lambda < 2\varepsilon$.

习题25.6　设μ是$\mathbb{R}^n$上的正则Borel测度, f是μ可积函数并且$\varepsilon > 0$. 证明存在一个C^∞函数g使得$\int |f-g| \mathrm{d}\mu < \varepsilon$.

解　设$I = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$具有限闭子区间. 给定$\delta > 0$,取$\varepsilon > 0$使得闭区间$J = \prod_{i=1}^{n}[a_i - 2\varepsilon, b_i + 2\varepsilon]$满足$\mu(J \backslash I) = \mu(J) - \mu(I) < \delta$. (这总是可能的, 因为$\prod_{i=1}^{n}[a_i - \frac{1}{k}, b_i + \frac{1}{k}] \downarrow_k I$.)如同习题25.5中的证明, 存在一个$C^\infty$函数$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$使得: $0 \leqslant h(x) \leqslant 1, x \in \mathbb{R}^n$; $h(x) = 1, x \in I$; $\mathrm{Supp} h \subseteq J$. 因此, 结果$f = \chi_I$, 那么

$$\int |\chi_I - h| \mathrm{d}\mu = \int (h - \chi_I) \mathrm{d}\mu \leqslant \int (\chi_J - \chi_I) \mathrm{d}\mu = \mu(J) - \mu(I) < \delta.$$

因此, 所要的结果对有限闭区间的特征函数正确.

于是, 设$I = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i)$ 是有限的. 因为$\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i - 1/k] \uparrow_k I$. 所以该逼近结果对形如$\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i)$ 的集合的特征函数也正确. 因为这些集合构成了一个半环并且每个开集是σ集(关于这个半环), 所以不难看出该结果对具有有限测度的开集的特征函数是正确的. μ 的正则性保证了该逼近结果对具有有限μ 测度的μ 可测集的特征函数是正确的. 这依次可推出该结果对μ 阶梯函数正确. 最后, 因为对每个μ 可积函数f和一切$\varepsilon > 0$, 都存在某个μ 阶梯函数ϕ 使得$\int |f - \phi| \mathrm{d}\mu < \varepsilon$ 成立, 所以具有紧支集的C^{∞} 函数满足所要的逼近性质.

习题25.7 设$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是Lebesgue可积函数, 并且$\varepsilon > 0$. 证明存在一个多项式p 使得$\int |f - p| \mathrm{d}\lambda < \varepsilon$, 其中积分当然认为在$[a, b]$ 上.

解 设$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是($[a, b]$ 上)可积的, 并且设$\varepsilon > 0$. 由定理25.3知道存在一个连续函数$g : [a, b] \to \mathbb{R}$ 使得$\int |f - g| \mathrm{d}\lambda < \varepsilon$. 于是, 由推论11.6知道存在一个多项式$p$使得$|g(x) - p(x)| < \varepsilon$ 对所有的$x \in [a, b]$ 成立. 因此,

$$\int |f - p| \mathrm{d}\lambda \leqslant \int |f - g| \mathrm{d}\lambda + \int |g - p| \mathrm{d}\lambda < \varepsilon + \varepsilon(b - a) = \varepsilon(1 + b - a),$$

并由此可得我们的结论.

26. 乘积测度和累次积分

习题26.1 设$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 和(Y, Σ, ν) 是两个测度空间, 并且假设$A \times B \in \Lambda_{\mu} \otimes \Lambda_{\nu}$.

(a) 证明$\mu^*(A) \cdot \nu^*(B) \leqslant (\mu \times \nu)^*(A \times B)$;

(b) 证明如果$\mu^*(A) \cdot \nu^*(B) \neq 0$, 那么$(\mu \times \nu)^*(A \times B) = \mu^*(A) \cdot \nu^*(B)$;

(c) 举出一个$(\mu \times \nu)^*(A \times B) \neq \mu^*(A) \cdot \nu^*(B)$ 的例子.

解 (a)我们有$\mathcal{S} \otimes \Sigma \subseteq \Lambda_{\mu} \otimes \Lambda_{\nu}$. 设$A \times B \in \Lambda_{\mu} \otimes \Lambda_{\nu}$. 另外, 设$\{A_n \times B_n\}$ 是$\mathcal{S} \otimes \Sigma$ 的序列使得$A \times B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times B_n$. 因为(由定理26.1)$\mu^* \times \nu^*$ 是半环$\Lambda_{\mu} \otimes \Lambda_{\nu}$ 上的测度, 所以由定理13.8可得

$$\mu^* \times \nu^*(A \times B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* \times \nu^*(A_n \times B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu \times \nu(A_n \times B_n).$$

因此, 我们看到

$$\begin{aligned}\mu^*(A) \cdot \nu^*(B) &= \mu^* \times \nu^*(A \times B) \\ &\leqslant \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu \times \nu(A_n \times B_n) : \{A_n \times B_n\} \subseteq S \otimes \Sigma \text{并且} A \times B \\ &\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times B_n\} = (\mu \times \nu)^*(A \times B).\end{aligned}$$

(b) 如果$0 < \mu^*(A) < \infty$并且$0 < \nu^*(B) < \infty$, 那么由定理26.2知道

$$(\mu \times \nu)^*(A \times B) = \mu^*(A) \cdot \nu^*(B)$$

正确. 另一方面, 如果$\mu^*(A)=\infty$或者$\nu^*(B)=\infty$, 那么——由(a)——等式两边都等于∞.

(c) 设$X=Y=\{0\}, \mathcal{S}=\{\phi\}$, 并且$\Sigma=\mathcal{P}(Y)$. 另外, 在$\mathcal{S}$上设$\mu=0$ (唯一的选择!)并且在Σ 上设$\nu=0$. 于是, 注意到$\mu^*(X)\cdot\nu^*(Y)=\infty\cdot 0=0$, 而$(\mu\times\nu)^*(X\times Y)=\infty$.

习题26.2 设$(X,\mathcal{S},\mu)$和(Y,Σ,ν)是两个σ有限测度空间. 证明$(\mu\times\nu)^*(A\times B)=\mu^*(A)\cdot\nu^*(B)$对$\Lambda_\mu\otimes\Lambda_\nu$中的每个$A\times B$成立.

解 设$\{X_n\}\subseteq\Lambda_\mu$和$\{Y_n\}\subseteq\Lambda_\nu$满足$X_n\uparrow X, Y_n\uparrow Y$, 并且对每个$n$, $\mu^*(X_n)<\infty$而且$\nu^*(Y_n)<\infty$. 利用定理15.4和定理26.2, 我们看到对一切$A\times B\in\Lambda_{\mu\otimes}\Lambda_\nu$有

$$\begin{aligned}(\mu\times\nu)^*(A\times B)&=\lim_{n\to\infty}(\mu\times\nu)^*((A\cap X_n)\times(B\cap Y_n))\\&=\lim_{n\to\infty}[\mu^*(A\cap X_n)\cdot\nu^*(B\cap Y_n)]\\&=\mu^*(A)\cdot\nu^*(B).\end{aligned}$$

习题26.3 设$(X,\mathcal{S},\mu)$和(Y,Σ,ν)是两个测度空间. 假设A和B分别是X和Y的子集, 它们满足$0<\mu^*(A)<\infty$和$0<\nu^*(B)<\infty$. 证明$A\times B$是$\mu\times\nu$可测的当且仅当A和B在它们相应的空间中都是可测的. 如果A或者B的测度为零, 前面的结论正确吗?

解 如果$A\in\Lambda_\mu$并且$B\in\Lambda_\nu$, 那么由定理26.3知道$A\times B\in\Lambda_{\mu\times\nu}$. 反之, 假设$A\times B\in\Lambda_{\mu\times\nu}$. 我们断言$(\mu\times\nu)^*(A\times B)<\infty$. 为了看出这一点, 取两个序列$\{A_n\}\subseteq\mathcal{S}$, $\{B_m\}\subseteq\Sigma$使得$A\subseteq\bigcup_{n=1}^\infty A_n, \sum_{n=1}^\infty\mu^*(A_n)<\mu^*(A)+1, B\subseteq\bigcup_{m=1}^\infty B_m, \sum_{m=1}^\infty\nu^*(B_m)<\nu^*(B)+1$. 于是, 由$A\times B\subseteq\bigcup_{n=1}^\infty\bigcup_{m=1}^\infty A_n\times B_m$, 我们看到

$$\begin{aligned}(\mu\times\nu)^*(A\times B)&\leqslant\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty(\mu\times\nu)^*(A_n\times B_m)\\&=\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty\mu(A_n)\cdot\nu(B_m)=\left[\sum_{n=1}^\infty\mu(A_n)\right]\cdot\left[\sum_{m=1}^\infty\nu(B_m)\right]\\&<[\mu^*(A)+1]\cdot[\nu^*(B)+1]<\infty.\end{aligned}$$

因此, 由定理26.4, 对ν几乎所有的y, $(A\times B)^y$是μ可测的. 因为$(A\times B)^y=A$对所有的$y\in B$成立并且$\nu^*(B)>0$, 所以得到A是μ可测的. 类似地, B是ν可测的.

最后, 如果$\mu^*(A)=0, A\neq\phi$, 并且$A\times B\in\Lambda_{\mu\times\nu}$, 那么未必有$B$一定是$\nu$可测的. 例如: 取$X=Y=\mathbb{R}$其中$\mu=\nu=\lambda$. 如果$E\subseteq[0,1]$是不可测的, 那么$\{0\}\times E$是$\mu\times\nu$零集(因为$\{0\}\times E\subseteq\{0\}\times[0,1]$), 从而$\{0\}\times E$是一个$\mu\times\nu$可测集.

习题26.4 设$(X,\mathcal{S},\mu)$和(Y,Σ,ν)是两个σ有限的测度空间, 并且设$f:X\times Y\to\mathbb{R}$是$\mu\times\nu$可测函数. 证明对μ几乎所有的x函数f_x是ν可测函数. 类似地, 证明对ν几乎所有的y函数f^y是μ可测的.

解 我们可以假设对一切$(x,y)\in X\times Y$, $f(x,y)\geqslant 0$. 因为(在这种情形下)乘积测度是σ有限的, 所以存在$\mu\times\nu$可测集列$\{A_n\}$使得$A_n\uparrow X\times Y$并且对每个n有$(\mu\times\nu)^*(A_n)<\infty$.

1. 函数$f_x:Y\to\mathbb{R}$定义为$f_x(y)=f(x,y)$, 函数$f^y:X\to\mathbb{R}$定义为$f^y(x)=f(x,y)$. ——译者注

于是, 由Fubini定理可知对μ 几乎所有的x函数$(f\wedge\chi_{A_n})_x$是ν 可积的. 因为$(f\wedge\chi_{A_n})_x\uparrow f_x$, 所以对$\mu$ 几乎所有的x, f_x是ν 可测的.

习题26.5 证明如果$f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$, 并且$f(0,0)=0$, 那么

$$\int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{4}\quad 并且\quad \int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

解 注意到

$$\int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_0^1\left[-\frac{x}{x^2+y^2}\Bigg|\begin{matrix}x=1\\x=0\end{matrix}\right]\mathrm{d}y=-\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{4}$$

和

$$\int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\frac{y}{x^2+y^2}\Bigg|\begin{matrix}y=1\\y=0\end{matrix}\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

习题26.6 设$X=Y=\mathbb{N},\mathcal{S}=\Sigma=\mathbb{N}$ 的所有子集全体, 并且$\mu=\nu=$ 计数测度. 解释这种情形下的Fubini定理.

解 设$f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 是非负$\mu\times\nu$ 可积函数. 那么, 由习题22.3和Fubini定理, 我们看到

$$\int f\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\int\int f\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu=\int\left[\sum_{m=1}^{\infty}f(n,m)\right]\mathrm{d}\nu(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}f(n,m).$$

另一方面, 如果$f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 是使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}f(n,m)<\infty$$

成立的非负函数, 那么由Tonelli定理可得f是$\mu\times\nu$ 可积函数. 结论: 函数$f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 是$\mu\times\nu$ 可积的当且仅当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}|f(n,m)|<\infty$, 并且这时

$$\int f\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}f(n,m)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f(n,m).$$

习题26.7 证明下列Cavalieri原理. 设$(X,\mathcal{S},\mu)$和(Y,Σ,ν) 是两个测度空间, 并且设E和F是$X\times Y$ 的两个具有有限测度的$\mu\times\nu$ 可测子集. 如果对μ 几乎所有的x有$\nu^*(E_x)=\mu^*(F_x)$ 成立, 那么

$$(\mu\times\nu)^*(E)=(\mu\times\nu)^*(F).$$

解 由定理26.4, 我们有

$$(\mu\times\nu)^*(E)=\int_X\nu^*(E_x)\mathrm{d}\mu(x)=\int_X\nu^*(F_x)\mathrm{d}\mu(x)=(\mu\times\nu)^*(F).$$

习题26.8 本题中λ 表示$\mathbb{R}$上的Lebesgue测度. 设$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是σ 有限测度空间, 并且设$f:X\to\mathbb{R}$ 是使得$f(x)\geqslant 0$ 对所有x成立的可测函数. 证明

(a) 集合$A = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$，叫做$f$的纵标集，是$X \times \mathbb{R}$ 的$\mu \times \lambda$ 可测子集；

(b) 集合$B = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leqslant y < f(x)\}$ 是$X \times \mathbb{R}$ 的$\mu \times \lambda$ 可测子集并且$(\mu \times \lambda)^*(A) = (\mu \times \lambda)^*(B)$ 成立；

(c) f的图象，即，集合$G = \{(x, f(x)) : x \in X\}$，是$X \times \mathbb{R}$ 的$\mu \times \lambda$ 可测子集；

(d) 如果f是μ 可积的，那么$(\mu \times \lambda)^*(A) = \int f\mathrm{d}\mu$ 成立；

(e) 如果f是μ 可积的，那么$(\mu \times \lambda)^*(G) = 0$ 成立.

解　如果$g : X \to \mathbb{R}$ 是任意的正可测函数，我们记$A_g = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leqslant y \leqslant g(x)\}$ 和

$$B_g = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leqslant y < g(x)\}.$$

观察到如果$f_n(x) \uparrow f(x)$ 和$h_n(x) \downarrow f(x)$ 对一切$x \in X$ 成立，那么$B_{f_n} \uparrow B_f$ 并且$A_{h_n} \downarrow A_f$.

首先假设g是正的简单函数. 设$g = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{C_i}$ 是g的标准表示，其中$a_i > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n$. 那么，容易看出

$$A_g = (X \times \{0\}) \cup (C_1 \times [0, a_1]) \cup (C_2 \times [0, a_2]) \cup \cdots \cup (C_n \times [0, a_n]) \qquad (\bigstar)$$

和

$$B_g = (C_1 \times [0, a_1]) \cup (C_2 \times [0, a_2]) \cup \cdots \cup (C_n \times [0, a_n])^1. \qquad (\bigstar\bigstar)$$

由定理26.3可知，A_g和B_g都是$X \times \mathbb{R}$ 的$\mu \times \lambda$ 可测子集.

(a) 首先假设f是有界可测函数. 也就是，假设存在某个$M > 0$使得$0 \leqslant f(x) \leqslant M$ 对所有的$x \in X$ 成立. 由定理17.7知道存在一个简单函数列$\{\psi_n\}$ 使得$\psi_n(x) \uparrow M - f(x)$ 对一切$x \in X$ 成立. 因此，由$\phi_n(x) = M - \psi_n(x)$ 定义的简单函数列$\{\phi_n\}$，满足$\phi_n(x) \downarrow f(x)$ 对一切$x \in X$ 成立. 这可推出$A\phi_n \downarrow A_f$. 因为(由前面的讨论)每个$A\phi_n$ 是$\mu \times \lambda$ 可测的，所以我们看到在这种情况下A_f也是$\mu \times \lambda$ 可测的.

于是，设f是任意的正可测函数. 对每个n，设$f_n = f \wedge n1$，并且注意到(由前面的情形)每个A_{f_n} 是$\mu \times \lambda$ 可测的. 要推出A_f是$\mu \times \lambda$ 可测集，只要观察到$A_{f_n} \uparrow A_f$ 成立.

(b) 由定理17.7知道存在一个简单函数列$\{s_n\}$ 使得$0 \leqslant s_n(x) \uparrow f(x)$ 对所有$x \in X$ 成立. 显然，$B_{s_n} \uparrow B_f$ 成立. 因为每个B_{s_n} 是$\mu \times \lambda$ 可测的，所以B_f 也是$\mu \times \lambda$ 可测的.

其次，我们分情况证明等式$(\mu \times \lambda)^*(A_f) = (\mu \times \lambda)^*(B_f)$.

情形1　假设$\mu^*(X) < \infty$.

显然，$(\mu \times \lambda)^*(X \times \{0\}) = \mu^*(X) \cdot \lambda(\{0\}) = 0$. 另外，假设$0 \leqslant f(x) \leqslant M < \infty$ 对所有x 成立. 那么存在两个阶梯函数列$\{\phi_n\}$ 和$\{\psi_n\}$ 使得$0 \leqslant \phi_n(x) \uparrow f(x)$ 和$\psi_n(x) \downarrow f(x)$ 对所有$x \in X$ 成立. 显然，$B_{\phi_n} \uparrow B_f$ 而且$A_{\psi_n} \downarrow A_f$. 于是，利用($\bigstar$)和($\bigstar\bigstar$) 结合定理26.3以及Lebesgue控制收敛定理可以看出

$$\int \phi_n \mathrm{d}\mu = (\mu \times \lambda)^*(B_{\phi_n}) \uparrow (\mu \times \lambda)^*(B_f) = \int f \mathrm{d}\mu$$

---

1. 原书中$B_g = (C_1 \times [0, a_1]) \cup (C_2 \times [0, a_2]) \cup \cdots \cup (C_n \times [0, a_n])$，译者认为这里应该是$B_g = (C_1 \times [0, a_1)) \cup (C_2 \times [0, a_2)) \cup \cdots \cup (C_n \times [0, a_n))$. ——译者注

和

$$\int \psi_n \mathrm{d}\mu = (\mu\times\lambda)^*(A_{\psi_n}) \downarrow (\mu\times\lambda)^*(A_f) = \int f\mathrm{d}\mu.$$

因此, 在这种情形下有$(\mu\times\lambda)^*(A_f)=(\mu\times\lambda)^*(B_f)=\int f\mathrm{d}\mu$ 成立.

情形2 假设$\mu^*(X)<\infty$ 并且f 是正的μ 可测函数.

对每个n 设$f_n=f\wedge n\mathbf{1}$. 注意到$B_{f_n}\uparrow B_f$ 并且$A_{f_n}\uparrow A_f$. 由前面的情形, 对每个n 我们有$(\mu\times\lambda)^*(A_{f_n})=(\mu\times\lambda)^*(B_{f_n})$. 因此, 由定理15.4可得

$$(\mu\times\lambda)^*(A_f)=(\mu\times\lambda)^*(B_f)=\lim_{n\to\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu.$$

情形3 一般情形, 这里我们要利用μ 是σ 有限的这一假设.

取X 的一个可测子集列$\{E_n\}$ 使得$E_n\uparrow X$ 并且对每个n 有$\mu^*(E_n)<\infty$. 设$g_n=f\chi_{E_n}$, 并且观察到$B_{g_n}\uparrow B_f$ 和$A_{f_n}\uparrow A_f$. 利用前面的情形和定理15.4, 我们看到

$$(\mu\times\lambda)^*(B_f)=\lim_{n\to\infty}(\mu\times\lambda)^*(B_{g_n})=\lim_{n\to\infty}(\mu\times\lambda)^*(A_{f_n})=(\mu\times\lambda)^*(A_f).$$

另外, 这里应该注意到如果f 是可积的, 那么$(\mu\times\lambda)^*(B_f)=(\mu\times\lambda)^*(A_f)=\int f\mathrm{d}\mu$.

(c) 由等式$G=A_f\backslash B_f$ 可得f 的图像G 是$\mu\times\lambda$ 可测的.

(d) 由(b) 中的讨论可得等式.

(e) 由$G=A_f\backslash B_f$ 和(d) , 我们看到

$$(\mu\times\lambda)^*(G)=(\mu\times\lambda)^*(A_f)-(\mu\times\lambda)^*(B_f)=0.$$

习题26.9 设$g: X\to\mathbb{R}$ 是μ 可积函数, 并且设$h: Y\to\mathbb{R}$ 是ν 可积函数. 对每个x 和y 由$f(x,y)=g(x)h(y)$ 定义函数$f: X\times Y\to\mathbb{R}$. 证明f 是$\mu\times\nu$ 可积的并且

$$\int f\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\left(\int_X g\mathrm{d}\mu\right)\cdot\left(\int_Y h\mathrm{d}\nu\right).$$

解 我们可以假设$g\geqslant 0$ 和$h\geqslant 0$. 取一个μ 阶梯函数列$\{\phi_n\}$ 和一个ν 阶梯函数列$\{\psi_n\}$ 使得$\phi_n\uparrow g$ 并且$\psi_n\uparrow h$. 那么, $\{\phi_n\psi_n\}$ 是一个$\mu\times\nu$ 阶梯函数列使得$\phi_n\psi_n\uparrow gh$. 于是由关系式

$$\int \phi_n\psi_n\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\left(\int\phi_n\mathrm{d}\mu\right)\cdot\left(\int\psi_n\mathrm{d}\nu\right)\uparrow\left(\int g\mathrm{d}\mu\right)\cdot\left(\int h\mathrm{d}\nu\right)$$

可得结论.

习题26.10 利用Tonelli定理证明

$$\int_\varepsilon^r \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^\infty\left(\int_\varepsilon^r \mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

对一切$0<\varepsilon<r$ 成立. 令$\varepsilon\to 0^+$ 和$r\to\infty$ (并证明你的步骤) 给出公式

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

的另一种证明.

解　固定$0<\varepsilon<r$ 并考虑函数

$$g_{\varepsilon,r}(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-xy}, & (x,y)\in[\varepsilon,r]\times[0,1],\\ \mathrm{e}^{-\varepsilon y}, & (x,y)\in[\varepsilon,r]\times[1,\infty).\end{cases}$$

显然, 连续(因此是可测的) 函数$f(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}\sin x$ 对所有$(x,y)\in[\varepsilon,r]\times[0,\infty)$ 满足$|f(x,y)|\leqslant g_{\varepsilon,r}(x,y)$. 由

$$\int_\varepsilon^r\left[\int_1^\infty g_{\varepsilon,r}(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\leqslant\int_\varepsilon^r\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{d}x=\frac{r-\varepsilon}{\varepsilon}<\infty$$

和Tonelli定理, 我们看出$g_{\varepsilon,r}$ 在$[\varepsilon,r]\times[0,\infty)$ 上是Lebesgue可积的. 于是Fubini定理保证了

$$\int_\varepsilon^r\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^\infty\int_\varepsilon^r(\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x)\mathrm{d}y. \tag{$\bigstar$}$$

利用初等积分

$$\int \mathrm{e}^{-\alpha t}\sin t\mathrm{d}t=-\frac{\alpha\sin t+\cos t}{1+\alpha^2}\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

并且对($\bigstar$) 中最里面的积分进行计算, 我们得到

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^r\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x&=\int_0^\infty\left[-\frac{y\sin x+\cos x}{1+y^2}\mathrm{e}^{-xy}\Big|_{x=\varepsilon}^{x=r}\right]\mathrm{d}y\\&=\int_0^\infty\frac{y\sin\varepsilon+\cos\varepsilon}{1+y^2}\mathrm{e}^{-\varepsilon y}\mathrm{d}y-\int_0^\infty\frac{y\sin r+\cos r}{1+y^2}\mathrm{e}^{-ry}\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

因此,

$$\int_\varepsilon^r\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\sin\varepsilon\int_0^\infty\frac{y\mathrm{e}^{-\varepsilon y}}{1+y^2}\mathrm{d}y+\cos\varepsilon\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon y}}{1+y^2}\mathrm{d}y-\int_0^\infty\frac{y\sin r+\cos r}{1+y^2}\mathrm{e}^{-ry}\mathrm{d}y. \tag{$\bigstar\bigstar$}$$

我们来计算当$r\to\infty$ 和$\varepsilon\to0^+$ 时($\bigstar\bigstar$) 右边的3项极限.

我们首先计算$\lim_{\varepsilon\to0^+}\sin\varepsilon\int_0^\infty\frac{y\mathrm{e}^{-\varepsilon y}}{1+y^2}\mathrm{d}y$. 为此, 设$\eta>0$. 因为$\lim_{y\to\infty}\frac{y}{1+y^2}=0$, 所以存在某个$y_0>0$ 使得$0<\frac{y}{1+y^2}<\eta$ 对所有的$y\geqslant y_0$ 成立. 于是, 由$\lim_{\varepsilon\to0^+}y_0\sin\varepsilon=0$ 和$\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}=1$, 我们看出存在某个$0<\delta<1$ 使得当$0<\varepsilon<\delta$ 时

$$0<y_0\sin\varepsilon<\eta \text{ 并且} \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}<2.$$

于是, 如果$0<\varepsilon<\delta$, 那么(考虑到对所有的$y\geqslant0$ 有$0\leqslant\frac{y\mathrm{e}^{-\varepsilon y}}{1+y^2}\leqslant1$) 我们可以推出

$$\begin{aligned}\left|\sin\varepsilon\int_0^\infty\frac{y\mathrm{e}^{-\varepsilon y}}{1+y^2}\mathrm{d}y\right|&\leqslant\left|\sin\varepsilon\int_0^{y_0}\frac{y\mathrm{e}^{-\varepsilon y}}{1+y^2}\mathrm{d}y\right|+\left|\sin\varepsilon\int_{y_0}^\infty\frac{y\mathrm{e}^{-\varepsilon y}}{1+y^2}\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant y_0\sin\varepsilon+\eta\sin\varepsilon\int_{y_0}^\infty\mathrm{e}^{-\varepsilon y}\mathrm{d}y\\&\leqslant y_0\sin\varepsilon+\eta\sin\varepsilon\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\varepsilon y}\mathrm{d}y\\&=y_0\sin\varepsilon+\eta\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}<\eta+2\eta=3\eta.\end{aligned}$$

即, $\lim_{\varepsilon\to 0+}\sin\varepsilon\int_0^\infty \frac{y\mathrm{e}^{-\varepsilon y}}{1+y^2}\mathrm{d}y=0$.

对于第2个极限, 注意到$|\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon y}}{1+y^2}|\leqslant\frac{1}{1+y^2}$ 对一切$y\in[0,\infty)$ 成立, 因此, 由函数$h(y)=\frac{1}{1+y^2}$ 在$[0,\infty)$ 上的Lebesgue可积性, 定理24.4推得

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\cos\varepsilon\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon y}}{1+y^2}\mathrm{d}y\right]&=\lim_{\varepsilon\to 0+}[\cos\varepsilon]\cdot\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon y}}{1+y^2}\mathrm{d}y\right]\\&=1\cdot\int_0^\infty\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon y}}{1+y^2}\right]\mathrm{d}y=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

对于第3个极限, 注意到对每个$r\geqslant 1$ 和$y\geqslant 0$, 我们有

$$\left|\frac{y\sin r+\cos r}{1+y^2}\mathrm{e}^{-ry}\right|\leqslant\frac{1+y}{1+y^2}\mathrm{e}^{-y}\leqslant 2\mathrm{e}^{-y},$$

从而由$g(y)=2\mathrm{e}^{-y}$ 在$[0,\infty)$ 上的Lebesgue可积性, 由定理24.4可得

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\int_0^\infty\frac{y\sin r+\cos r}{1+y^2}\mathrm{e}^{-ry}\mathrm{d}y&=\int_0^\infty\lim_{r\to\infty}\left[\frac{y\sin r+\cos r}{1+y^2}\mathrm{e}^{-ry}\right]\mathrm{d}y\\&=\int_0^\infty 0\mathrm{d}y=0.\end{aligned}$$

最后, 由(★★) 我们看到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x&=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ r\to\infty}}\int_\varepsilon^r\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\sin\varepsilon\int_0^\infty\frac{y}{1+y^2}\mathrm{e}^{-\varepsilon y}\mathrm{d}y\right]+\\&\quad\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\cos\varepsilon\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon y}}{1+y^2}\mathrm{d}y\right]-\lim_{r\to\infty}\int_0^\infty\frac{y\sin r+\cos r}{1+y^2}\mathrm{e}^{-ry}\mathrm{d}y\\&=0+\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

习题26.11 证明如果对一切x 和y , $f(x,y)=y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}$, 那么

$$\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

利用前面的等式给出公式

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

的另一种证明.

解 注意到

$$\int_0^\infty\left[\int_0^\infty y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

和

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y&=\left(\int_0^\infty\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^\infty\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right)\\&=\left(\int_0^\infty\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

因为$ye^{-(1+x^2)y^2} \geqslant 0$ 对所有的$x \geqslant 0$ 和$y \geqslant 0$ 成立, Tonelli定理说明

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

习题26.12 证明

$$\int_0^\infty \left(\int_0^r e^{-xy^2}\sin x dx\right) dy = \int_0^r \left(\int_0^\infty e^{-xy^2}\sin x dy\right) dx$$

对所有$r > 0$ 成立. 通过令$r \to \infty$ 证明

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

用类似的方法证明$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{2\pi}/2$.

解 因为

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\int_0^r e^{-xy^2}dx\right) dy &= \int_0^1 \left(\int_0^r e^{-xy^2}dx\right) dy + \int_1^\infty \left(\frac{1}{y^2}\int_0^{ry^2} e^{-t}dt\right) dy\\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^r 1dx\right) dy + \int_1^\infty \left(\frac{1}{y^2}\int_0^\infty e^{-t}dt\right) dy\\ &\leqslant r + \int_1^\infty \frac{1}{y^2}dy = r+1,\end{aligned}$$

所以由Tonelli定理可得e^{-xy^2} 在$[0,r]\times[0,\infty)$ 上可积. 由于$|e^{-xy^2}\sin x| \leqslant e^{-xy^2}$ ，我们看到$e^{-xy^2}\sin x$ 在$[0,r]\times[0,\infty)$ 上也是可积的, 并且所述的等式由Fubini定理可得.

计算最里面的积分并且利用初等积分

$$\int e^{-\alpha t}\sin t dt = -\frac{\alpha\sin t + \cos t}{1+\alpha^2}e^{-\alpha t},$$

我们得到

$$\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4} - \int_0^\infty \frac{y^2\sin r + \cos r}{1+y^4}e^{-ry^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^r \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx. \qquad (\star)$$

因为$\left|\frac{y^2\sin r+\cos r}{1+y^4}e^{-ry^2}\right| \leqslant \frac{1+y^2}{1+y^4} = f(y)$ 成立, 并且f 在$[0,\infty)$ 上是Lebesgue可积的, 所以由定理24.4可得

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to\infty}\left[\int_0^r \frac{dy}{1+y^4} - \int_0^\infty \frac{y^2\sin r+\cos r}{1+y^4}e^{-ry^2}dy\right]\\ &= \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4} - \lim_{r\to\infty}\left[\int_0^\infty \frac{y^2\sin r+\cos r}{1+y^4}e^{-ry^2}dy\right]\\ &= \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4} - \int_0^\infty \lim_{r\to\infty}\left[\frac{y^2\sin r+\cos r}{1+y^4}e^{-ry^2}\right]dy\\ &= \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4} - \int_0^\infty 0dy = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4}.\end{aligned}$$

于是, 利用初等积分

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ln\left(\frac{1+y\sqrt{2}+y^2}{1-y\sqrt{2}+y^2}\right) + 2\arctan\frac{y\sqrt{2}}{1-y^2}\right]$$

以及简单的计算, 我们看到

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{1+y^4} = \int_0^{1^-} \frac{\mathrm{d}y}{1+y^4} + \int_{1+}^\infty \frac{\mathrm{d}y}{1+y^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

因此, 由(★) 我们看到

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\int_0^r \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

习题26.13 利用前一题的结论(和一个适当的变量替换), 证明Fresnel积分的值(参见习题24.6) 是

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

解 利用变量替换$x=\sqrt{u}$, 我们得到

$$\int_0^r \sin(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{r}} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \quad 和 \quad \int_0^r \cos(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{r}} \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$

然后, 令$r\to\infty$ 并且利用前一题.

习题26.14 设$X=Y=[0,1]$, $\mu=[0,1]$ 上的Lebesgue测度, 并且$\nu=[0,1]$ 上的计数测度. 考虑$X\times Y$ 的"对角线"$\Delta=\{(x,x):x\in X\}$. 证明

(a) Δ 是$X\times Y$ 的$\mu\times\nu$ 可测集, 因此, χ_Δ 是非负的$\mu\times\nu$ 可测函数;

(b) 两个累次积分$\int\int\chi_\Delta\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu$ 和$\int\int\chi_\Delta\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\mu$ 都存在;

(c) 函数χ_Δ 不是$\mu\times\nu$ 可积的. 这与Tonelli定理为什么不矛盾?

解 (a) 考虑两个集合

$$A=\{(x,y)\in X\times Y: x>y\} \quad 和 \quad B=\{(x,y)\in X\times Y: x<y\}.$$

注意到$A=\bigcup[a,b]\times[c,d]$, 其中的并取遍所有有理数端点的矩形$[a,b]\times[c,d]$ 并且$a>d$; 参见图4.4.

显然, 所有这样的矩形全体是可数的. 因为每个矩形是$\mu\times\nu$ 可测的, 所以A 是$\mu\times\nu$ 可测的. 类似地, 集合B 也是$\mu\times\nu$ 可测的, 因此, $\Delta=X\times Y\backslash A\cup B$ 是$\mu\times\nu$ 可测集.

(b) 注意到

$$\begin{aligned}\int\int\chi_\Delta\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu &= \int_0^1\left[\int_0^1\chi_\Delta(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right]\mathrm{d}\nu(y)\\ &= \int_0^1\left[\int_0^1\chi_{\{y\}}\mathrm{d}\mu(x)\right]\mathrm{d}\nu(y) = \int_0^1 0\cdot\mathrm{d}\nu(y)=0,\end{aligned}$$

和

$$\int\int \chi_\Delta \mathrm{d}\nu\mathrm{d}\mu = \int_0^1 \left[\int_0^1 \chi_\Delta(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}\mu(x)$$
$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 \chi_{\{x\}}\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}\mu(x) = \int_0^1 \mathbf{1}\mathrm{d}\mu(x) = 1.$$

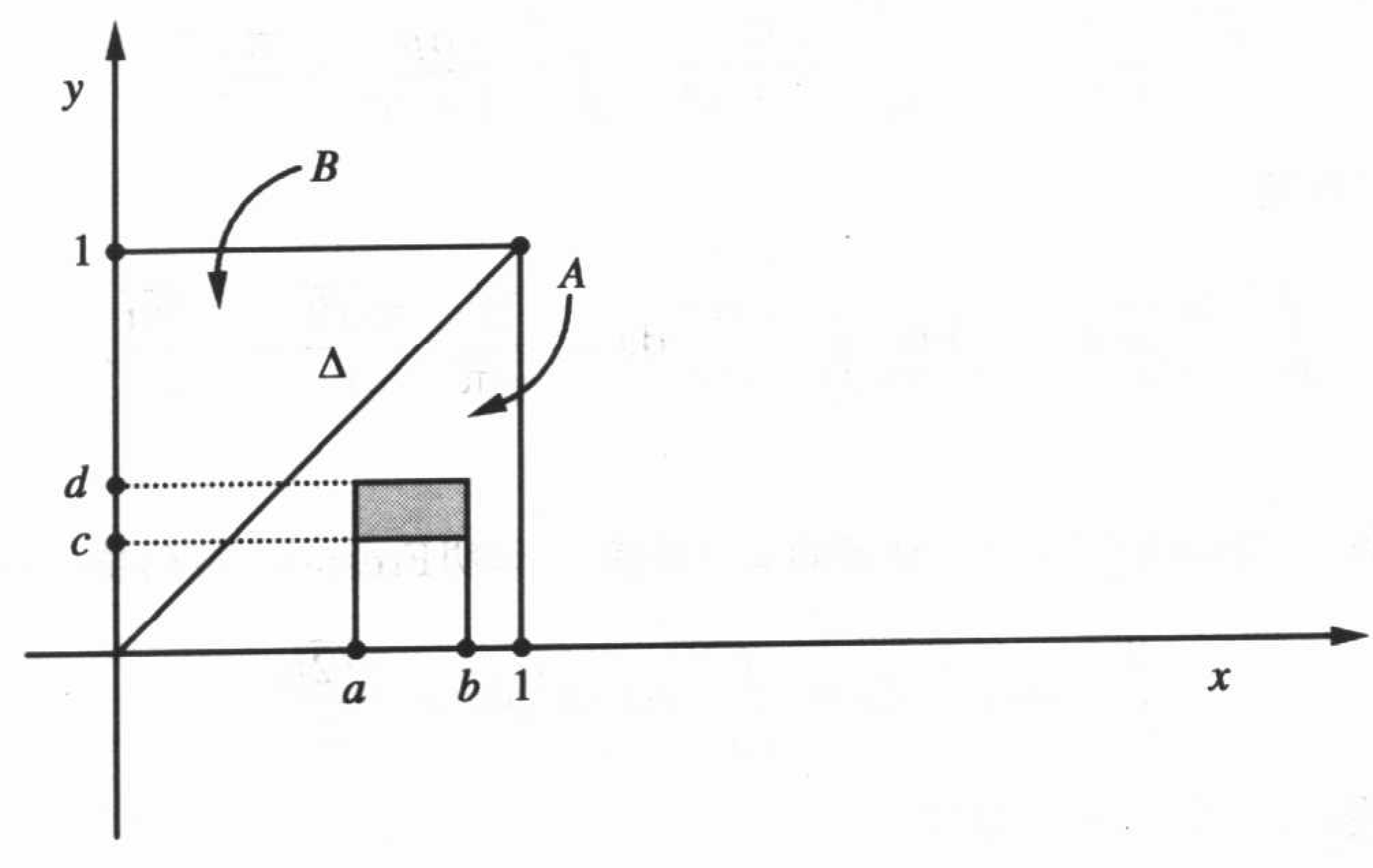


图　4.4

(c) Fubini定理连同(b) 说明χ_Δ 在$X \times Y$ 上不可积(即, $(\mu\times\nu)^*(\Delta) = \infty$ 一定成立) . 这与Tonelli定理不矛盾因为ν 不是σ 有限测度.

习题26.15　设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是Borel可测的, 证明函数$f(x+y)$ 和$f(x-y)$ 都是$\lambda\times\lambda$ 可测的.

解　因为f 是阶梯函数列的极限, 所以只要对具有有限测度的可测集的特征函数证明这个结果. Lebesgue测度的正则性允许我们简化为考虑具有有限测度的开集的特征函数. 最终, 这可以简化为对某个有限开区间(a,b) 当$f=\chi_{(a,b)}$ 时的情形.

函数$g(x,y)=\chi_{(a,b)}(x+y)$ 的$\lambda\times\lambda$ 可测性容易从图4.5得到.

$f(x-y)$ 的$\lambda\times\lambda$ 可测性可以按类似的方式证得.

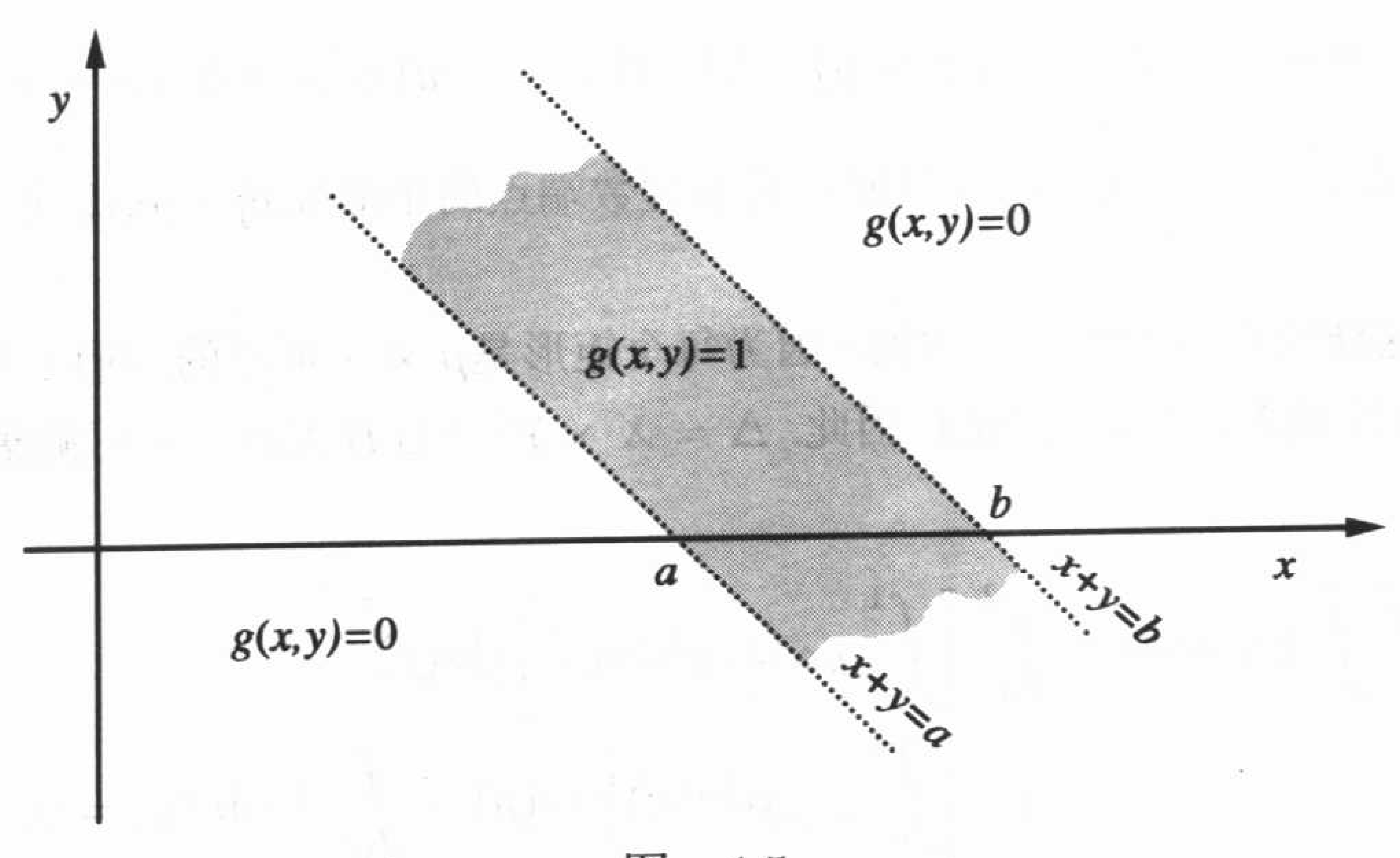


图　4.5

第 5 章　赋范空间和L_p空间

27. 赋范空间和Banach空间

习题27.1　设X是一个赋范空间. 证明X是Banach空间当且仅当其单位球$\{x \in X : \|x\| = 1\}$是完备的度量空间(在诱导度量$d(x,y) = \|x - y\|$ 的意义下).

解　设$S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$，并注意到$S$是一个闭集. 显然, 如果$X$是一个Banach空间, 则$S$是一个完备的度量空间.

反之, 假设S是完备的.设$\{x_n\}$ 是X的Cauchy序列. 考虑到不等式

$$\big|\|x_n\| - \|x_m\|\big| \leqslant \|x_n - x_m\|,$$

我们看到$\{\|x_n\|\}$ 是实数组成的Cauchy序列. 如果$\lim \|x_n\| = 0$，则$\lim x_n = 0$.因此, 我们不妨设$\delta = \lim \|x_n\| > 0$. 在这种情况下, 我们也能假设存在某个$M > 0$, 对每一个$n$, $1/\|x_n\| \leqslant M$ 与$\|x_n\| \leqslant M$ 成立. 下面的不等式

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|}\right\| &= \frac{\|(\|x_m\| x_n - \|x_n\| x_m)\|}{\|x_n\| \cdot \|x_m\|} \\ &\leqslant M^2 \big\|\|x_m\| (x_n - x_m) - (\|x_n\| - \|x_m\|)x_m\big\| \\ &\leqslant 2M^3 \|x_n - x_m\|\end{aligned}$$

证明了序列$\{x_n/\|x_n\|\}$ 是S中的Cauchy序列. 如果它的极限x在S中, 则$x_n = \|x_n\|\cdot x_n/\|x_n\| \to \delta x$ 在X中成立, 因此X是Banach空间.

习题27.2　设X是赋范向量空间.给定$a \in X$ 和不等于零的数α .

(a) 证明映射$x \mapsto a + x$ 和$x \mapsto \alpha x$ 都是同胚[1];

(b) 如果A和B是两个集合, 它们中至少有一个是开集, α 和β 是两个不等于零的标量, 证明$\alpha A + \beta B$ 是开集.

解　(a)注意到对所有的x和y, $\|(a + x) - (a + y)\| = \|x - y\|$，这就证明了$x \mapsto a + x$ 实际是等距[2].

同时注意到对所有的x, y, 我们有$\|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \cdot \|x - y\|$. 这容易得出$x \mapsto \alpha x$ 是一个同胚.

---

1. 两个拓扑空间(X, τ) 和(Y, τ_1) 之间的一一映射$f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ 如果满足: ①f是连续的; ②f^{-1} 也是连续的.则称这两个拓扑空间同胚, f称为一个同胚. ——译者注

2. 两个度量空间之间的映射$f : (X, d) \to (Y, \rho)$ 是等距, 如果$\rho(f(x), f(y)) = d(x, y), x, y \in X$.
——译者注

(b) 首先假设B是开集. 由于映射$x \mapsto a + x$ 是同胚, 我们得出对所有$a \in X$, $a + B$是开集.这就意味着对X的任意子集A, 集合$A + B = \bigcup_{a \in A} (a + B)$ 是开集.

现在, 假设B是开集, α 和β 是不等于零的标量. 由于映射$x \mapsto \beta x$ 是同胚, 从而集合βB 是开集. 因此, 由前面的讨论可知, $\alpha A + \beta B$ 一定是开集.

习题27.3　设X是赋范向量空间. 设$B = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ 是它的单位开球. 证明$\overline{B} = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

解　重复习题6.2的证明.

习题27.4　设X是赋范空间, $\{x_n\}$ 是X中的序列并且$\lim x_n = x$. 设$y_n = n^{-1}(x_1 + \cdots + x_n), n = 1, 2, \cdots$, 试证明$\lim y_n = x$.

解　给定任意的$\varepsilon > 0$.选定某个k, 它满足对于所有的$n > k$, $\|x_n - x\| < \varepsilon$. 固定某个$m > k$, 使得对所有的$n > m$, $\left\|\frac{1}{n}[(x_1 - x) + \cdots + (x_k - x)]\right\| < \varepsilon$. 因此, 当$n > m$时,

$$\begin{aligned}\|y_n - x\| &= \left\|\frac{1}{n}[(x_1 - x) + \cdots + (x_k - x) + (x_{k+1} - x) + \cdots + (x_n - x)]\right\| \\ &\leqslant \left\|\frac{1}{n}[(x_1 - x) + \cdots + (x_k - x)]\right\| + \frac{1}{n}[\|x_{k+1} - x\| + \cdots + \|x_n - x\|] \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\end{aligned}$$

也即$\lim y_n = x$ (参见习题4.11).

习题27.5　设赋范空间中的两个向量x和y满足$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. 证明对所有的标量$\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0$,

$$\|\alpha x + \beta y\| = \alpha \|x\| + \beta \|y\| .$$

解　假设$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ 对赋范空间中的两个向量x和y成立. 设$\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0$. 不失一般性, 我们假设$\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$. 由三角不等式, 得出

$$\|\alpha x + \beta y\| \leqslant \alpha \|x\| + \beta \|y\| .$$

接下来, 注意到

$$\begin{aligned}\|\alpha x + \beta y\| &= \|\alpha(x + y) + (\beta - \alpha)y\| \\ &\geqslant \|\alpha(x + y)\| - \|(\beta - \alpha)y\| \\ &= \alpha \|x + y\| - (\alpha - \beta) \|y\| \\ &= \alpha(\|x\| + \|y\|) - (\alpha - \beta) \|y\| \\ &= \alpha \|x\| + \beta \|y\|\end{aligned}$$

因此, $\|\alpha x + \beta y\| = \alpha \|x\| + \beta \|y\|$ 成立.

习题27.6 设X是所有定义在[0, 1]上, 具有一阶连续导数的实值函数组成的向量空间. 证明定义在X上的范数$\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ 等价于范数$\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

解 $\|\cdot\|$ 满足范数性质的证明是显而易见的.

由

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

我们得到$|f(x)| \leqslant |f(0)| + \|f'\|_\infty$ 对所有的$x \in [0,1]$ 成立, 因此, $\|f\|_\infty \leqslant |f(0)| + \|f'\|_\infty$ 成立.

两个范数的等价由不等式

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty &\leqslant |f(0)| + 2\|f'\|_\infty \leqslant 2(|f(0)| + \|f'\|_\infty) \\ &= 2\|f\| \leqslant 2(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)\end{aligned}$$

得出.

习题27.7 赋范空间的级数$\sum_{n=1}^\infty x_n$ 称作收敛于x, 如果$\lim \left\|x - \sum_{i=1}^n x_i\right\| = 0$. 习惯上, 我们记作$x = \sum_{n=1}^\infty x_n$. 级数$\sum_{n=1}^\infty x_n$ 称作是绝对可和的, 如果$\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$ 成立.

证明赋范空间是Banach空间当且仅当每个绝对可和级数是收敛的.

解 设X是Banach空间, $\sum_{n=1}^\infty x_n$ 是绝对可和级数. 令$s_n = \sum_{i=1}^n x_i, n = 1, 2, 3, \cdots$. 不等式

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \left\|\sum_{i=n+1}^{n+p} x_i\right\| \leqslant \sum_{i=n+1}^{n+p} \|x_i\|$$

说明$\{s_n\}$ 是Cauchy序列, 因此, 在X中收敛.

至于必要性, 设$\{x_n\}$ 是赋范空间X的Cauchy序列, 其中X中的所有绝对可和级数收敛. 通过转到一个子列(如果有必要), 我们不妨设$\|x_{n+1} - x_n\| < 2^{-n}, n = 1, 2, \cdots$ 成立. 令$x_0 = 0$, 而且注意到$\sum_{n=0}^\infty \|x_{n+1} - x_n\| < \infty$. 因此, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在且属于X, 从而X是Banach空间.

习题27.8 证明赋范向量空间的闭的真子向量空间是无处稠密的.

解 设E是赋范空间X的闭的真子空间. 假设E有一个内点a, 则存在某个$r > 0$, 使得$B(a, r) \subseteq E$. 现设y是x的任一非零元, 则$a + ry/(2\|y\|) \in B(a, r) \subseteq E$, 因此$y = 2\|y\|[(a + \frac{r}{2\|y\|}y) - a]/r \in E$. 也即, $E = X$, 得出矛盾! 因此$E^\circ = \varnothing$.

习题27.9 设$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 是连续函数, 且f不是多项式函数. 由推论11.6, 我们知道存在一个多项式函数序列$\{p_n\}$ 一致收敛于f, 证明自然数集

$$\{k \in \mathbb{N} : k\text{是某个多项式}p_n\text{的次数}\}$$

是可数的.

解　设$f:[0,1]\to\mathbb{R}$为非多项式的连续函数, $\{p_n\}$是一致收敛于定义在$[0,1]$上的函数f的多项式序列. 假设自然数集

$$K=\{k\in\mathbb{N}:k\text{是某个多项式}p_n\text{ 的次数}\}$$

是有界的. 这就是说, 存在某个$m\in\mathbb{N}$, 使得每一个p_n 的次数至多为m. 因此, 如果V是由函数$\{1,x,x^2,\cdots,x^m\}$ 生成的$C[0,1]$的有限维向量子空间, 则$\{p_n\}\subseteq V$. 现在, 粗略地浏览定理27.7, 发现V是$C[0,1]$的闭子空间, 因此$\{p_n\}$ 的(上)范极限f必定在V中, 即, f必定是次数至多为m的多项式; 与我们的假设矛盾. 因此, K不是有界的, 从而它必定是可数集; 见定理2.4.

习题27.10　该习题描述了向量空间的一些重要子集类. 向量空间的非空子集A被称作是:

(a) 对称的, 如果$x\in A$, 则$-x\in A$, 即$A=-A$;

(b) 凸的, 如果$x,y\in A$, 则对所有的$0\leqslant\lambda\leqslant 1$, $\lambda x+(1-\lambda)y\in A$, 即, 对任意两个向量$x,y\in A$, 连接$x,y$的线段在$A$中;

(c) 圆形的(或平衡的), 如果$x\in A$, 则对所有$|\lambda|\leqslant 1$, $\lambda x\in A$.

证明以下结论:

(i) 一个圆形集是对称的;

(ii) 包含零的凸对称集是圆形的;

(iii) 向量空间的非空子集是凸的当且仅当对所有的$a\geqslant 0,b\geqslant 0,aA+bA=(a+b)A$ 成立;

(iv) 如果A是赋范空间的凸子集, 则A的闭包$\overline{A}$ 和内部A° 也是凸集.

解　(i) 设A是一个圆形集. 由于$|-1|=1\leqslant 1$, 由此得到对所有有$x\in A$, $-x=(-1)x\in A$. 因此, A是一个对称集.

(ii) 设A是包含0的凸对称集. 取定$x\in A$ 和$|\lambda|\leqslant 1$. 如果$0\leqslant\lambda\leqslant 1$, 则$\lambda x=\lambda x+(1-\lambda)0\in A$. 如果$-1\leqslant\lambda<0$, 则$\lambda x=(-\lambda)(-x)+(1+\lambda)0\in A$. 因此, A是圆形集.

(iii) 设A是向量空间的子集. 首先假设A是凸子集, 令$a>0,b>0$. 如果$x\in(a+b)A=\{(a+b)u:u\in A\}$, 则对某个$u\in A$, 我们有$x=(a+b)u=au+bu\in aA+bA$, 从而$(a+b)A\subseteq aA+bA$. 现在, 设$x\in aA+bA$. 则存在$u,v\in A$ 使得$x=au+bv$. 由于A是凸集, 我们有$z=au/(a+b)+bv/(a+b)\in A$, 从而$x=(a+b)[au/(a+b)+bv/(a+b)]=(a+b)z\in(a+b)A$. 因此, $aA+bA\subseteq(a+b)A$ 也总是正确的, 故$aA+bA=(a+b)A$.

然后, 假设$aA+bA=(a+b)A$对所有$a\geqslant 0$和$b\geqslant 0$成立. 设$x,y\in A$ 和$0\leqslant\lambda\leqslant 1$. 令$a=\lambda$ 和$b=1-\lambda$, 我们可得到

$$\lambda x+(1-\lambda)y=ax+by\in(a+b)A=A.$$

这证明了A是凸集.

(iv) 设A是赋范空间的一个凸子集. 我们首先证明$\overline{A}$是凸集. 设$x,y\in\overline{A}$, 取定$0\leqslant\lambda\leqslant 1$. 选出$A$的两个序列$\{x_n\}$ 和$\{y_n\}$, 使得$x_n\to x$, $y_n\to y$. 令$z_n=\lambda x_n+(1-\lambda)y_n$, 则$\{z_n\}$ 是A中的序列. 由于由$f(u)=\lambda u+(1-\lambda)u$ 定义的函数$f:X\to X$ 是连续的(见习题27.2), 所以得出$z_n\to\lambda x+(1-\lambda)y$. 这隐含着$\lambda x+(1-\lambda)y\in\overline{A}$, 因此$\overline{A}$ 是凸集.

接下来，我们证明A° 是凸集. 选定$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. 由于$A^\circ$ 是开集，(由习题27.2)得出集合$\lambda A^\circ + (1-\lambda)A^\circ$ 也是开集，它包含在A中(由于A是凸集). 由于A° 是包含在A中的最大开集，我们推断$\lambda A^\circ + (1-\lambda)A^\circ \subseteq A^\circ$. 这证明了$A^\circ$ 是凸集.

习题27.11 该习题描述了向量空间X上的所有范数等价于一个给定的范数，设A是X的以0为内点的范数有界的凸对称子集(相对于由范数$\|\cdot\|$ 生成的拓扑). 定义函数$p_A : X \to \mathbb{R}$:

$$p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}.$$

证明以下结论:

(a) 函数p_A 是X上的范数;

(b) 范数p_A 等价于$\|\cdot\|$，即存在两个常数$C > 0$ 和$K > 0$，使得$C\|x\| \leqslant p_A(x) \leqslant K\|x\|$ 对所有的$x \in X$ 成立;

(c) p_A 的闭单位球是A的闭包，即$\{x \in X : p_A(X) \leqslant 1\} = \overline{A}$;

(d) 设$|||\cdot|||$ 是X上等价于$\|\cdot\|$ 的范数. 考虑范数有界的非空凸对称子集$B = \{x \in X : |||x||| \leqslant 1\}$，则0是$B$的内点，并且$|||x||| = p_B(x)$ 对所有$x \in X$ 成立.

解 假设A是赋范空间$(X, \|\cdot\|)$ 的范数有界的凸对称子集，并且0是A的内点.

(a) 选择$r > 0$，使得$B(0, 2r) = \{x \in X : \|x\| < 2r\} \subseteq A$. 如果$x \in X$ 是非零向量，则$rx/\|x\| \in B(0, 2r) \subseteq A$，从而$x \in (\|x\|/r)A$. 这证明了集合$\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$ 是非空集，因此公式$p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$ 有意义，并且满足

$$p_A(x) \leqslant r\|x\|, \quad x \in X. \tag{$\bigstar$}$$

接下来，我们将证明p_A是X上的范数.

显然，$p_A(x) \geqslant 0$ 并且$p_A(0) = 0$. 现设$p_A(x) = 0$，则存在序列$\{a_n\} \subseteq A$ 和正实数列$\{\lambda_n\}$ 满足$\lambda_n \to 0$ 并且对所有的n，$x = \lambda_n a_n$. 由于A是范数有界集，容易得出$x = \lim \lambda_n a_n = 0$. 因此$p_A(x) = 0$ 当且仅当$x = 0$.

接下来，我们将证明$p_A(\alpha x) = |\alpha| p_A(x)$ 对所有的$\alpha \in \mathbb{R}$ 和$x \in X$ 成立. 由于A是对称集，我们有

$$\{\lambda > 0 : \lambda x \in A\} = \{\lambda > 0 : \lambda(-x) \in A\},$$

因此，为证明$p_A(\alpha x) = |\alpha| p_A(x)$，不失一般性，我们假设$\alpha > 0$. 现在，注意到

$$\begin{aligned} p_A(\alpha x) &= \inf\{\lambda > 0 : \alpha x \in \lambda A\} = \inf\left\{\lambda > 0 : x \in \frac{\lambda}{\alpha} A\right\} \\ &= \alpha \inf\left\{\frac{\lambda}{\alpha} : x \in \frac{\lambda}{\alpha} A\right\} = \alpha \inf\{\mu > 0 : x \in \mu A\} \\ &= \alpha p_A(x). \end{aligned}$$

至于三角不等式，设$x, y \in X$，取定$\varepsilon > 0$. 选择$\lambda > 0$ 和$x \in \lambda A$ 使得$\lambda < p_A(x) + \varepsilon$. 同样地，选择某个$\mu > 0$ 使得$y \in \mu A$ 且$\mu < p_A(y) + \varepsilon$. 由习题27.10，我们知道$x + y \in \lambda A + \mu A =$

$(\lambda+\mu)A$, 于是

$$p_A(x+y) \leqslant \lambda+\mu < [p_A(x)+\varepsilon]+[p_A(y)+\varepsilon] = p_A(x)+p_A(y)+2\varepsilon,$$

由于$\varepsilon>0$ 是任意的, 我们得出$p_A(x+y) \leqslant p_A(x)+p_A(y)$.

(b) 设$x \in X$, 选定$M>0$, 使得对所有$a \in A$, $\|a\| \leqslant M$. 现在, 如果$\lambda>0$ 满足$x \in \lambda A$, 则存在某个$y \in A$ 使得$x=\lambda y$. 因此, $\|x\| = \lambda\|y\| \leqslant \lambda M$, 或$\lambda \geqslant \|x\|/M$, 这隐含着$p_A(x) \geqslant \|x\|/M$. 这个不等式和(★)结合起来证明了$p_A$是等价于$\|\cdot\|$ 的范数.

(c) 首先假设$p_A(x) \leqslant 1$, $x \neq 0$, 则对所有n, 存在$0<\lambda_n \leqslant 1+1/n$ 和$a_n \in A$ 使得$x=\lambda_n a_n$. 考虑到子列, 我们不妨设$\lambda_n \to \lambda$. 由于$x \neq 0$ 且A是范数有界集, 很容易得出$0<\lambda \leqslant 1$. 注意到序列$\{a_n\} \subseteq A$ 并且满足$a_n = x/\lambda_n \to x/\lambda$, 于是$\frac{1}{\lambda}x \in \overline{A}$. 由于$\overline{A}$ 也是凸集(见习题27.10), 我们得到$x=\lambda\left(\frac{1}{\lambda}x\right)+(1-\lambda)\cdot 0 \in \overline{A}$.

现在, 设$x \in \overline{A}$, 则存在序列$\{x_n\} \subseteq A$ 且$\|x_n-x\| \to 0$. 由于$\|\cdot\|$ 等价于p_A, 我们也有$p_A(x_n-x) \to 0$. 特别地, $p_A(x_n) \to p_A(x)$. 注意到由于$x_n \in A$, 我们有对所有的n, $p_A(x_n) \leqslant 1$, 这一点隐含着$p_A(x) \leqslant 1$. 因此, p_A的闭单位球是$\overline{A}$.

(d) 设$|||\cdot|||$ 是X上等价于$\|\cdot\|$ 的范数. 容易检验, $|||\cdot|||$ 的闭单位球B是以0为内点的有界凸对称集. 我们接下来将证明对所有的$x \in X$, $|||x||| = p_B(x)$.

设$x \in X$ 是非零向量. 由于$x/|||x||| \in B$, 我们看到$p_B(x)/|||x||| = p_B(x/|||x|||) \leqslant 1$, 于是$p_B(x) \leqslant |||x|||$. 另一方面, 存在正实数列$\{\lambda_n\}$ 和B中的序列$\{b_n\}$ 使得对所有的n, $\lambda_n \to p_B(x)$, $b_n \in B$ 和$x=\lambda_n b_n$. 由于$|||x_n||| = \lambda_n |||b_n||| \leqslant \lambda_n$, 我们容易得出$|||x||| \leqslant p_B(x)$. 因此, $p_B(x) = |||x|||$, $x \in X$.

28. Banach空间之间的算子

习题28.1 *设X和Y是两个Banach空间, $T: X \to Y$ 是有界线性算子. 证明T或者是在上的或者$T(X)$ 是贫集*[1].

解 假设$T(X)$ 不是贫集, 则我们必须证明$T(X)=Y$ 成立.

设$V=\{x \in X: \|x\| \leqslant 1\}$. 由于$T(X)$ 不是贫集(因为假设), 某个$\overline{nT(V)} = n\overline{T(V)}$ 有一个内点, 这意味着$\overline{T(V)}$ 有一个内点. 因此, 存在某个$y_0 \in \overline{T(V)}$ 和某个$r>0$, 使得$B(y_0, 2r) \subseteq \overline{T(V)} = -\overline{T(V)}$. 注意到如果$y \in Y$ 满足$\|y\|<2r$, 则$y-y_0 = -(y_0-y) \in \overline{T(V)}$, 于是$y=(y-y_0)+y_0 \in \overline{T(V)}+\overline{T(V)} \subseteq 2\overline{T(V)}$. (最后一个包含关系当然是由于等式$V+V=2V$.)因此, 我们证明了$\{y \in Y: \|y\|<r\} \subseteq \overline{T(V)}$. 由于T是线性的, 我们得出

$$\{y \in Y: \|y\|<2^{-n}r\} \subseteq 2^{-n}\overline{T(V)} = \overline{T(2^{-n}V)} \tag{★★}$$

对所有的n成立.

接下来, 选定$y \in Y$, 使得$\|y\| < 2^{-1}r = r/2$. 由(★★), 我们得到$y \in \overline{T(2^{-1}V)}$. 因此, 对某个向量$x_1 \in 2^{-1}V$, 我们有$\|y-T(x_1)\| < 2^{-2}r$. 现在, 归纳地进行下去. 假设已经选定

1. 度量空间的子集Y称为贫集(或第一范畴集),如果存在无处稠密子集列$\{A_n\}$使得$Y=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. ——译者注

好$x_n \in 2^{-n}V$, 使得$\left\|y-\sum_{i=1}^{n}T(x_i)\right\| < 2^{-n-1}r$. 由(★★)得出$y-\sum_{i=1}^{n}T(x_i) \in \overline{T(2^{-n-1}V)}$, 于是存在某个$x_{n+1} \in 2^{-n-1}V$ 使得$\|y-\sum_{i=1}^{n+1}T(x_i)\| < 2^{-n-2}r$. 因此, 存在$X$中的序列$\{x_n\}$ 使得$\|x_n\| \leqslant 2^{-n}$, 并且对所有的n,

$$\left\|y-\sum_{i=1}^{n}T(x_i)\right\| = \left\|y-T\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\right\| < 2^{-n-1}r$$

成立. 现在, 令$s_n = x_1+x_2+\cdots+x_n, n=1,2,\cdots$, 注意到关系式

$$\|s_{n+p}-s_n\| = \left\|\sum_{i=n+1}^{n+p}x_i\right\| \leqslant \sum_{i=n+1}^{n+p}\|x_i\| \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty}2^{-i} = 2^{-n}$$

表明$\{s_n\}$ 是X的Cauchy序列. 由于X是Banach空间, 序列$\{s_n\}$ 收敛. 令$s = \lim s_n$. 显然, $\|s\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| \leqslant 1$ (即$s \in V$), 而且由于T的连续性和线性性. 我们得出

$$T(s) = \lim_{n\to\infty}T(s_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}T(x_i) = y,$$

也即, $y \in T(V)$, 于是$\{y \in Y : \|y\| < r/2\} \subseteq T(V) \subseteq T(X)$. 由于$T(X)$ 是Y的子向量空间, 后面的包含关系蕴含着$T(X) = Y$ 必然成立.

习题28.2 设X是Banach空间, $T : X \to X$ 是有界算子[1]. I是X上的恒等算子. 如果$\|T\| < 1$, 证明$I-T$ 是可逆算子.

解 如果$A, B \in L(X,X)$, 则不等式

$$\|ABx\| \leqslant \|A\|\cdot\|Bx\| \leqslant \|A\|\cdot\|B\|\cdot\|x\|$$

显然蕴含$\|AB\| \leqslant \|A\|\cdot\|B\|$. 特别地, 如果$L(X,X)$中的算子列$\{A_n\}$ 满足$\lim A_n = A$, $B \in L(X,X)$, 则不等式

$$\|BA_n - BA\| = \|B(A_n - A)\| \leqslant \|B\|\cdot\|A_n - A\|$$

表明$\lim BA_n = BA$. 类似地, $\lim A_nB = AB$.

现设$T \in L(X,X)$ 满足$\|T\| < 1$. 考虑到不等式$\|T^n\| \leqslant \|T\|^n$, 易得出

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|T^n\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\|T\|^n = \frac{1}{1-|T|} < \infty.$$

因此, $\sum_{n=0}^{\infty}T^n$ 是绝对可和级数. 由于$L(X,X)$ 是Banach空间, $S = \sum_{n=0}^{\infty}T^n$ 在$L(X,X)$中收敛; 见习题27.7. 而且,

$$(I-T)S = \lim_{n\to\infty}(I-T)\left(\sum_{i=0}^{n}T^i\right) = \lim_{n\to\infty}(I-T^{n+1}) = I.$$

---

1. 两个向量空间之间的映射$T : X \to Y$ 叫作线性算子, 如果对所有的$x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 有$T(\alpha x+\beta y) = \alpha T(x)+\beta T(y)$. 算子T的范数定义为$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}$. 如果$\|T\|$ 有限, 则称T为有界算子. 以上的算子T称作紧算子, 如果$\overline{T(B)}$ 是Y的紧子集, 其中B为X的开单位球.
——译者注

类似地, $S(\boldsymbol{I}-T)=\boldsymbol{I}$. 因此, $S=(\boldsymbol{I}-T)^{-1}$.

习题28.3 在$C[0,1]$上考虑两个范数

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|:x\in[0,1]\} \quad 和 \quad \|f\|_1=\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x.$$

证明恒等算子$\boldsymbol{I}$: $(C[0,1],\|\cdot\|_\infty)\to(C[0,1],\|\cdot\|_1)$ 是连续的, 到上的, 但不是开的. 为什么这个结论和开映射定理不矛盾.

解 显然I是到上的, 并且考虑到不等式$\|f\|_1\leqslant\|f\|_\infty$, 我们知道I也是连续的.

至于其他的证明, 我们先证明$(C[0,1],\|\cdot\|_1)$ 不是Banach空间. 为证明这一点, 考虑连续函数列$\{f_n\}$, 它们的图像如图5.1.

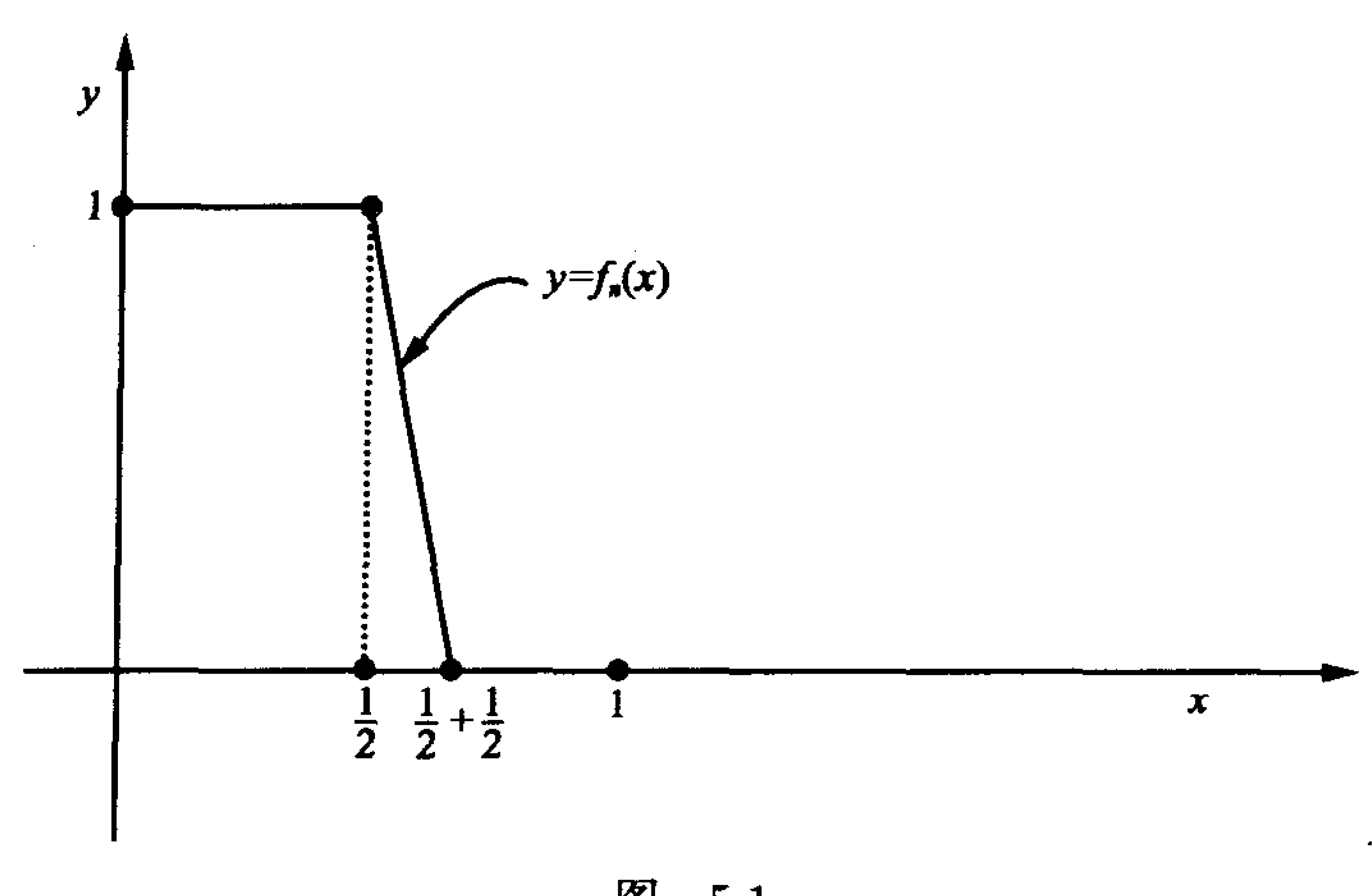


图 5.1

不等式$\|f_{n+p}-f_n\|_1\leqslant 1/n$ 表明$\{f_n\}$对范数$\|\cdot\|_1$ 来说是Cauchy序列, 假设$\lim\|f_n-f\|_1=0$ 对某个$f\in C[0,1]$ 成立.

设$a\in\{0,1/2\}$. 如果$f(a)\neq 1$, 则存在某个$\varepsilon>0$ 和某个$0<\delta<\min\{a,1/2-a\}$ 使得当$|x-a|<\delta$ 时, $|f(x)-1|\geqslant\varepsilon$. 现在, 注意到$2\delta\varepsilon\leqslant\int_0^1|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=\|f_n-f\|_1$ 对所有充分大的n成立, 与$\lim\|f_n-f\|_1=0$ 矛盾. 因此$f(a)=1, a\in(0,1/2)$. 类似地, $f(a)=0$ 对所有的$a\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 成立. 容易看出f不可能是连续函数, 与$f\in C[0,1]$ 矛盾. 因此, $\{f_n\}$关于$\|\cdot\|_1$范在$C[0,1]$中不收敛.

最后, $I:(C[0,1],\|\cdot\|_\infty)\to(C[0,1],\|\cdot\|_1)$ 不是开映射[1]. 因为不然的话, $\|\cdot\|_1$ 和$\|\cdot\|_\infty$ 将是等价的范数, 从而$(C[0,1],\|\cdot\|_1)$ 将是Banach空间.

习题28.4 设X是由[0, 1]上所有具有连续导数的实值函数组成的向量空间, 在X上赋予上确界范数, $Y=C[0,1]$被赋予上确界范数. 定义$D:X\to Y, D(f)=f'$.

1. 函数$f:(X,d)\to(Y,\rho)$ 叫作开映射, 如果f把开集映成开集.同样的, f被称作闭映射, 如果$f(A)$为闭集, 其中A为闭集. ——译者注

(a) 证明D是无界线性算子;

(b) 证明D有一个闭图[1];

(c) 为什么(b)中的结论和闭图像定理不矛盾?

解 (a)微分的性质保证了D是线性算子. 设$f_n(x) = x^n, n = 1, 2, \cdots$, 则$f_n \in X$, 且$\|f_n\|_\infty = \sup\{|f_n(x)| : 0 \leqslant x \leqslant 1\} = 1, n = 1, 2, \cdots$. 注意到$D(f_n)(x) = nx^{n-1}, n = 1, 2, \cdots$, 由此得到

$$\|D\| \geqslant \|D(f_n)\|_\infty = \sup\{nx^{n-1} : 0 \leqslant x \leqslant 1\} = n,$$

因此, $\|D\| = \infty$, 从而D是无界算子.

(b) 为证明D有闭图, 假设在X中, $f_n \to 0$, 在Y中$Df_n = f_n' \to g$. 也就是, $\{f_n\}$一致收敛于0且$\{f_n'\}$一致收敛于g. 我们将证明$g = 0$.

由$\int_0^x f_n'(t)\mathrm{d}t = f_n(x) - f_n(0)$ (见习题9.16), 得到

$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n'(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}[f_n(x) - f_n(0)] = 0$$

对所有$x \in [0,1]$成立. 两边微分, 有$g(x) = 0, x \in [0,1]$, 这就得到我们所要证明的. (也可参见习题9.29.)

(c) 由于X不是Banach空间, (b)中的结论与闭图像定理不矛盾. 比如, (由推论11.6)我们知道每个函数$f \in C[0,1]$是多项式函数序列的一致极限. 因此, 如果$f \in C[0,1]$是不可微的连续函数, $\{p_n\}$是一致收敛于f的多项式序列, 则$\{p_n\}$是在X中不收敛的Cauchy序列.

习题28.5 考虑映射$T : C[0,1] \to C[0,1], Tf(x) = x^2 f(x), f \in C[0,1], x \in [0,1]$.

(a) 证明T是有界线性算子;

(b) 如果$\boldsymbol{I}$: $C[0,1] \to C[0,1]$表示恒等算子(即, $\boldsymbol{I}(f) = f, f \in C[0,1]$), 证明$\|\boldsymbol{I} + T\| = 1 + \|T\|$.

解 (a)由等式

$$T(f+g)(x) = x^2(f+g)(x) = x^2 f(x) + x^2 g(x) = (Tf + Tg)(x)$$

和

$$T(\alpha f)(x) = \alpha x^2 f(x) = (\alpha Tf)(x),$$

我们容易推出T是线性算子. 至于T的范数, 注意到对每个$f \in C[0,1]$, 我们有

$$\|Tf\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|Tf(x)| = \sup_{x\in[0,1]} x^2|f(x)| \leqslant \sup_{x\in[0,1]}|f(x)| = \|f\|_\infty,$$

于是$\|T\| \leqslant 1$.另一方面, 对常数函数$\mathbf{1}$, 我们有

$$\|T\| \geqslant \|T\cdot\mathbf{1}\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} x^2 = 1.$$

---

1. 如果$T : X \to Y$为一个函数, 则$X \times Y$的子集$G = \{(x, T(x)) : x \in X\}$叫作$T$的图. 如果$G$是$X \times Y$的闭子空间, 则称$G$为$T$的闭图. ——译者注

因此, $\|T\|=1$, 从而T是有界算子.

(b) 显然, $\|\boldsymbol{I}+T\| \leqslant \|\boldsymbol{I}\|+\|T\|=1+1=2$. 而且, 我们有

$$\|\boldsymbol{I}+T\| \geqslant \|(\boldsymbol{I}+T)\mathbf{1}\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}(1+x^2)=2,$$

于是$\|\boldsymbol{I}+T\|=1+\|T\|=2$.

习题28.6 设X是在范数$\|\cdot\|_1$ 和$\|\cdot\|_2$ 下完备的向量空间. 如果存在实数$M>0$使得$\|x\|_1 \leqslant M\|x\|_2$, $x\in X$, 证明两个范数一定是等价的.

解 恒等映射$\boldsymbol{I}:(X,\|\cdot\|_2)\to(X,\|\cdot\|_1)$ 是一一的, 连续的和到上的.由开映像定理, 它是同胚, 从而由此得出结论.

习题28.7 设X,Y和Z是三个Banach空间. 假设$T:X\to Y$ 是线性算子, $S:Y\to Z$ 是有界的、一一线性算子. 证明T是有界算子当且仅当复合线性算子$S\circ T$ (从X映到Z)是有界的.

解 假设$S\circ T$ 是有界算子. 设在X中$x_n\to 0$, 在Y中$T(x_n)\to y$. 利用$S\circ T$和T都连续, 我们得到

$$S(y)=\lim_{n\to\infty}S(T(x_n))=\lim_{n\to\infty}S\circ T(x_n)=0.$$

由于S是1-1的, 我们得出$y=0$, 因此, 由闭图像定理, T是连续的.

习题28.8 向量空间上的算子$P:V\to V$ 被称作一个射影, 如果$P^2=P$. Banach空间的闭向量子空间Y被称作有余的, 如果存在X的另一个闭子空间Z使得$Y\oplus Z=X$.

证明Banach空间的闭子空间是有余的当且仅当它是连续射影的像.

解 设Y是Banach空间X的闭子空间. 首先假设存在一个连续射影$P:X\to X$, 它的像为Y, 即$P(X)=Y$. 由$P^2=P$得$Y=\{y\in X: y=Py\}$

如果$I:X\to X$ 表示恒等算子, 令Z表示连续算子$I-P$的像, 即$Z=(I-P)(X)$. 显然, Z是X的向量子空间, 而且考虑到$x=Px+(I-P)(x)$, 我们得到$Y+Z=X$.如果$u\in Y\cap Z$, 则对于某个$z\in Z$, $u=z-Pz$, 于是$u=P(u)=P(z-Pz)=P(z)-P^2(z)=0$. 这意味着$Y\oplus Z=X$. 最后, 为证明$Z$是闭的, 假设$X$中的序列$\{z_n\}$ 满足$(I-P)(z_n)\to z$. P的连续性得出$0=P(I-P)z_n\to Pz$, 于是$Pz=0$. 因此, $z=(I-P)(z)\in Z$, 证明了Z也是闭的. 所以, Y是有余的闭子空间.

另一方面, 假设Z是闭子空间, 满足$Y\oplus Z=X$. 于是, 对所有$x\in X$, 存在$y\in Y$ 和$z\in Z$ (两者都是唯一确定的)使得$x=y+z$. 由$P(x)=y$ 定义算子$P:X\to X$, 其中y满足$x-y\in Z$. 我们将论证P是像为Y的连续射影.

首先, 注意到P是线性算子. 而且, $P^2(x)=P(y)=y=P(x)$ 对所有$x\in X$ 成立, 因此P是射影. 显然, Y是P的像.下面, 我们证明P也是连续的. 只需证明P有一个闭图就够了(考虑到闭图像定理).

为实现这个目标, 假设X的序列$\{x_n\}$满足$x_n\to x$ 且在X中$P(x_n)\to y$. 令$x_n=y_n+z_n, n=1,2,\cdots$, 其中$y_n\in Y$, $z_n\in Z$. 显然, $y_n=P(x_n), n=1,2,\cdots$. 由于Y是闭子空间, 得

出$y \in Y$. 现在, 由$z_n = x_n - y_n \to x - y$ 和Z是闭的, 我们得出$z = x - y \in Z$, 因此$x = y + z$, 于是$y = P(x)$. 这就证明了P有闭图. 证明完毕.

29. 线性泛函

习题29.1 *设$f: X \to \mathbb{R}$ 是定义在向量空间X上的线性泛函. f的核是向量子空间:*

$$\mathrm{Ker}f = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in X : f(x) = 0\}.$$

如果X是赋范空间, $f: X \to \mathbb{R}$ 是非零的线性泛函, 证明下面的结论:

(a) f是连续的当且仅当它的核是X的闭子空间;

(b) f是不连续的, 当且仅当它的核在X中稠密.

解 (a) 显然, 如果f是连续的, 则它的核$f^{-1}(\{0\})$ 是闭集. 至于必要性, 假设$f \neq 0$ 且$f^{-1}(\{0\})$ 是闭集. 选取$e \in X$, 满足$f(e) = 1$.

假设$\|f\| = \infty$, 则存在X的子列$\{x_n\}$, 使得$\|x_n\| = 1$ 且$|f(x_n)| \geqslant n, n = 1, 2, \cdots$. 令$y_n = e - x_n/f(x_n)$, 注意到序列$\{y_n\}$ 满足$y_n \in f^{-1}(\{0\}), n = 1, 2, \cdots$, 且$y_n \to e$. 由于集合$f^{-1}(\{0\})$ 是闭集, 所以得出$e \in f^{-1}(\{0\})$, 于是$f(e) = 0$, 矛盾. 因此, f是连续线性泛函.

(b) 如果$\mathrm{Ker}f$在X中稠密, 则$\mathrm{Ker}f$不是闭的, 从而由(a), f是不连续的. 另一方面, 假设f是不连续的线性泛函, 即$\|f\| = \infty$. (正如前一部分)这蕴含着存在X的序列$\{x_n\}$, 满足$\|x_n\| = 1$, 且$|f(x_n)| \geqslant n, n = 1, 2, \cdots$. 如果$x \in X$ 且$y_n = x - \frac{f(x)}{f(x_n)} \cdot x_n$, 则$\{y_n\}$是$\mathrm{Ker}f$中的序列且满足$y_n \to x$. 这证明$\mathrm{Ker}f$在$X$中稠密.

习题29.2 *证明赋范空间X上的线性泛函是不连续的, 当且仅当对每个$a \in X$ 和每个$r > 0$,*

$$f(B(a, r)) = \{f(x) : \|a - x\| < r\} = \mathbb{R}.$$

解 设f是赋范空间X上的线性泛函, 令$B = B(0, 1) = \{x \in X : \|x\| < 1\}$. 假设$f$是不连续的. 选取$a \in X$ 和$r > 0$. 由关系式$B(a, r) = a + rB(0, 1) = a + rB$ 和f的线性性得出$f(B(a, r)) = \mathbb{R}$ 成立当且仅当$f(B) = \mathbb{R}$.

我们首先论证$f(B)$无上界. 为证明这点, 假设存在某个$M > 0$使得$f(x) \leqslant M$, $x \in B$. 注意到如果$x \in X$ 满足$\|x\| \leqslant 1$, 则$\pm x/2 \in B$, 于是由

$$\pm\frac{1}{2}f(x) = f\left(\pm\frac{1}{2}x\right) \leqslant \frac{1}{2}M,$$

我们得出$|f(x)| \leqslant M$ 对所有满足$\|x\| \leqslant 1$ 的$x \in X$ 成立. 即, $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leqslant 1\} \leqslant M < \infty$, 于是$f$是连续线性泛函, 矛盾. 因此, f是上无界的. 现在, 假设$\alpha > 0$ 是任意正实数. 由上面的讨论, 存在某个$x \in B$ 使得$f(x) > \alpha$. 注意到$y = \alpha x/f(x) \in B$ 满足$f(y) = \alpha$ (而且, 当然$-y \in B$ 满足$f(-y) = -\alpha$). 因而, $f(B) = \mathbb{R}$.

至于必要性, 假设$f(B(a, r)) = \mathbb{R}$ 对所有$a \in X$ 和每个$r > 0$成立. 特别地, 由

$$\infty = \sup\left\{|f(x)| : \|x\| \leqslant \frac{1}{2}\right\} \leqslant \sup\{|f(x)| : \|x\| \leqslant 1\} = \|f\|,$$

我们得到$\|f\| = \infty$. 因此f是无界的, 从而(由定理28.6)f是不连续的线性泛函.

习题29.3 设$f, f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是定义在普通的向量空间X上的线性泛函. 证明存在常数$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 满足$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ (即f属于$f_1, \cdots f_n$ 的线性扩张)当且仅当$\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} f_i \subseteq \operatorname{Ker} f$.

解 如果$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$, 则显然$\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} f_i \subseteq \operatorname{Ker} f$.至于必要性, 设$\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} f_i \subseteq \operatorname{Ker} f$. 令

$$V = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists x \in X \text{ 使得} y = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))\}.$$

容易证明V是$\mathbb{R}^n$ 的向量子空间, 现在定义线性泛函$g : V \to \mathbb{R}$

$$g(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)) = f(x).$$

注意到g的定义有意义. 为说明这点, 假设

$$(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)) = (f_1(y), f_2(y), \cdots f_n(y)),$$

则$f_i(x - y) = 0,\ i = 1, \cdots n$, 于是$x - y \in \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} f_i$. 由我们的假设得出$x - y \in \operatorname{Ker} f$, 这表明$f(x) = f(y)$ 容易证明g是线性的.

仍然用g 表示g 到$\mathbb{R}^n$ 上的线性扩张. 这意味着存在$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ 使得$g(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i$ 对所有$(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ 成立. 特别地, 我们有

$$f(x) = g(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x)$$

对所有$x \in X$ 成立, 正如所愿.

习题29.4 证明定理28.7的逆命题, 即证明如果X 和Y 是(非平凡)赋范空间, 并且$L(X, Y)$是Banach 空间, 则Y是Banach 空间.

解 设$\{y_n\}$是Y中的Cauchy序列. 选择某个不等于零的$f \in X^*$, 然后考虑$L(X, Y)$中的算子列$\{T_n\}$, 其中$T_n(x) = f(x)y_n$. 不等式

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|f(x)(y_n - y_m)\| \leqslant \|f\| \cdot \|y_n - y_m\| \cdot \|x\|$$

表明$\|T_n - T_m\| \leqslant \|f\| \cdot \|y_n - y_m\|$, 于是$\{T_n\}$ 是$L(X, Y)$中的Cauchy序列. 由$L(X, Y)$的完备性, 存在某个$T \in L(X, Y)$, 使得$\lim T_n = T$. 现在, 选取$e \in X$, 使得$f(e) = 1$, 且注意到

$$\lim_{n\to\infty} T_n(e) = \lim_{n\to\infty} y_n = T(e).$$

习题29.5 Banach空间$B(\mathbb{N})$ 由$\mathcal{L}_\infty$ 表示, 即$\mathcal{L}_\infty$ 是由所有具有上确界范数的有界序列组成的Banach 空间. 考虑向量的全体:

$$c_0 = \{x = (x_1, x_2, x_3, \cdots) \in \mathcal{L}_\infty : x_n \to 0\} \text{和} c = \{x = (x_1, x_2, x_3, \cdots) \in \mathcal{L}_\infty : \lim x_n \in \mathbb{R}\}$$

证明c_0和c都是$\mathcal{L}_\infty$ 的闭向量子空间.

解 显然c_0和c都是$\mathcal{L}_\infty$ 的向量子空间(且c_0和c的向量子空间), 我们需要证明它们是闭的. 为证明c_0 是闭的, 设$\{x^n\}$ 是c_0中的序列, 其中$x^n = (x_1^n, x_2^n, \cdots)$, 且满足$\|x^n - x\|_\infty \to 0$. 如果$x = (x_1, x_2, \cdots)$, 我们必须证明$\lim x_n = 0$

令$\varepsilon > 0$. 选取某个k, 使得当$n \geqslant k$ 时, $\|x^n - x\| < \varepsilon$; 显然, $|x_i^n - x_i| < \varepsilon$ 对所有的$n \geqslant k$ 和所有的i成立. 由于$\lim\limits_{i\to\infty} x_i^k = 0$, 所以存在某个$m \geqslant k$, 使得$|x_i^k| < \varepsilon$ 对所有的$i \geqslant m$ 成立. 注意到如果$i \geqslant m$, 则

$$|x_i| \leqslant |x_i - x_i^k| + |x_i^k| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

则$\lim x_n = 0$, 证毕.

接下来, 我们将证明c是闭的. 为简便记, 一个序列$x = (x_1, x_2, \cdots) \in c$ 我们将记$x_\infty = \lim x_n$. 设c中的序列$\{x^n\}$ 满足$x^n \to x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathcal{L}_\infty$. 我们必须证明$\lim x_n$ 存在.

由选取某个$\varepsilon > 0$ 开始, 则存在某个k, 使得:

$$\|x^n - x\|_\infty < \varepsilon, \quad n \geqslant k \tag{$\bigstar$}$$

这一点蕴涵当$n, m \geqslant k$ 时, $\|x^n - x^m\|_\infty < 2\varepsilon$, 于是$|x_i^n - x_i^m| < 2\varepsilon$ 对所有$n, m \geqslant k$ 和所有的i成立. 因此, $|x_\infty^n - x_\infty^m| \leqslant 2\varepsilon$, $n, m \geqslant k$. 这表明$\{x_\infty^n\}$ 是Cauchy实数列. 令$x_\infty = \lim x_\infty^n$, 且注意$|x_\infty^n - x_\infty| \leqslant 2\varepsilon$ 对所有$n \geqslant k$ 成立.

我们论证$x_n \to x_\infty$. 为证明这一点, 再次设$\varepsilon > 0$, 选取某个k使得($\bigstar$)正确. 然后, 选定某个$r \geqslant k$ 使得当$n \geqslant r$ 时, $|x_n^k - x_\infty^k| < \varepsilon$. 注意到如果$n \geqslant r$, 则

$$|x_n - x_\infty| \leqslant |x_n - x_n^k| + |x_n^k - x_\infty^k| + |x_\infty^k - x_\infty| < \varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon.$$

这就证明了$x_n \to x_\infty$, 于是$x \in c$. 因此, c是$\mathcal{L}_\infty$ 的闭子空间.

习题29.6 设c表示由所有收敛序列组成的$\mathcal{L}_\infty$ 的向量子空间(见习题29.5). 定义极限泛函$L : c \to \mathbb{R}$ 为

$$L(x) = L(x_1, x_2, \cdots) = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

并定义$p : \mathcal{L}_\infty \to \mathbb{R}$ 为$p(x) = p(x_1, x_2, \cdots) = \limsup x_n$.

(a) 证明L是连续线性泛函, 其中c具有上确界范数.

(b) 证明p是次线性泛函且$L(x) = p(x), x \in c$.

(c) 由Hahn-Banach定理29.2, 存在L在$\mathcal{L}_\infty$ 上的线性开拓(我们将仍然用L表示), 使得$L(x) \leqslant p(x), x \in \mathcal{L}_\infty$. 证明开拓$L$具有如下性质:

(i) 对任意$x \in \mathcal{L}_\infty$, 我们有

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant L(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n;$$

(ii) L是正线性泛函, 即$x \geqslant 0$ 隐含$L(x) \geqslant 0$;

(iii) L是连续线性泛函(而且事实上$\|L\| = 1$).

解 (a)显然L是线性泛函. 而且, 如果$x = (x_1, x_2, \cdots) \in c$, 则$|x_n| \leqslant \|x\|_\infty = \sup_m |x_m|$, $n = 1, 2, \cdots$, 于是$|L(x)| = \lim |x_n| \leqslant \|x\|_\infty$. 这证明$L$是连续线性泛函. (由于$L(1, 1, 1, \cdots) = 1$, 容易得出$\|L\| = 1$.)

(b) p的次线性性由习题4.7马上得到. 等式$p(x) = L(x) = \lim x_n, x \in c$ 也是显而易见的.

(c) 我们将证明阐述的性质.

(i) 如果$x \in \mathcal{L}_\infty$, 则注意到

$$-L(x) = L(-x) \leqslant \limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n$$

于是$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant L(x) \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ 正确.

(ii) 如果$x = (x_1, x_2, \cdots) \geqslant 0$ (即, $x_n \geqslant 0, n = 1, 2, \cdots$), 则由习题4.8和前面的结论得到$L(x) \geqslant \liminf\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant 0$. 即$L$是正线性泛函.

(iii) 如果$\|x\|_\infty \leqslant 1$ (即, 如果$|x_n| \leqslant 1, n = 1, 2, \cdots$), 则由(i)和习题4.8得到

$$-1 \leqslant \liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant L(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n \leqslant 1,$$

于是$|L(x)| \leqslant 1$. 这表明$\|L\| = \sup\{|L(x)| : \|x\|_\infty \leqslant 1\} \leqslant 1$. 由于$L(1, 1, 1, \cdots) = 1$, 我们容易得出$\|L\| = 1$.

习题29.7　将习题29.6作如下推广. 证明存在一个线性泛函$\mathcal{L}\text{im} : \mathcal{L}_\infty \to \mathbb{R}$ (称作Banach-Mazur极限)具有如下性质:

(a) $\mathcal{L}\text{im}$是范数为**1** 的正线性泛函;

(b) 对于任意的$x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathcal{L}_\infty$, 我们有

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leqslant \mathcal{L}\text{im}(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

特别地, $\mathcal{L}$是极限泛函L的开拓.

(c) 对所有的$x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathcal{L}_\infty$, 我们有

$$\mathcal{L}\text{im}(x_1, x_2, x_3, \cdots) = \mathcal{L}\text{im}(x_2, x_3, x_4, \cdots).$$

解　对每个$x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathcal{L}_\infty$.令

$$A(x) = \left(x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}, \cdots, \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \cdots\right)$$

是x的平均数序列. 如果我们由公式

$$p(x) = \lim\ \sup A(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

定义$p : \mathcal{L}_\infty \to \mathbb{R}$, 则习题4.7保证了p是次线性泛函. 而且, 容易得出如果$x \in c$, 则

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} x_n = p(x).$$

由Hahn-Banach定理29.2, L有开拓$\mathcal{L}\text{im} : \mathcal{L}_\infty \to \mathbb{R}$ 满足$\mathcal{L}\text{im}(x) \leqslant p(x)$, $x \in \mathcal{L}_\infty$. 性质(a)和(b)恰好能由习题29.6的证明中得到.

为证明(c), 设$x = (x_1, x_2, x_3, \cdots) \in \mathcal{L}_\infty$ 并且令$y = (x_2, x_3, \cdots)$, 则简单的计算得到

$$A(x - y) = \left(x_1 - x_2, \frac{x_1 - x_3}{2}, \frac{x_1 - x_4}{3}, \cdots, \frac{x_1 - x_{n+1}}{n}, \cdots\right).$$

由于$x = (x_1, x_2, \cdots)$ 是有界序列, 后者隐含着

$$p(x-y) = \limsup \frac{x_1 - x_{n+1}}{n} = 0.$$

因此, $\mathcal{L}\mathrm{im}(x-y) \leqslant p(x-y) = 0$. 类似地, $L(y-x) \leqslant 0$, 于是$\mathcal{L}\mathrm{im}(x) - \mathcal{L}\mathrm{im}(y) = \mathcal{L}\mathrm{im}(x-y) = 0$. 因此, $\mathcal{L}\mathrm{im}(x) = \mathcal{L}\mathrm{im}(y)$, 得证.

习题29.8 设X是赋范向量空间. 证明如果X^*是可分的(在它包含一个可数稠密子集的意义下), 则X也是可分的.

解 设$\{f_1, f_2, \cdots\}$ 是X^*的可数稠密子集.选取$x_n \in X$, 使其满足$\|x_n\| = 1$ 且$|f_n(x_n)| \geqslant \|f_n\|/2$, 令$Y$是由$\{x_1, x_2, \cdots\}$ 生成的闭子空间. 我们论证$Y = X$.

为证明这个结论, 假设$Y \neq X$. 选取某个$a \notin Y$, 且$\|a\| = 1$. 由定理29.5, 存在某个$f \in X^*$, 使得$f(y) = 0$, $y \in Y$ 且$f(a) \neq 0$. 给定$\varepsilon > 0$, 选取某个n, 使得$\|f - f_n\| < \varepsilon$, 且注意到

$$|f_n(a)| \leqslant \|f_n\| \leqslant 2|f_n(x_n)| = 2|(f_n - f)(x_n)| \leqslant 2\|f_n - f\| < 2\varepsilon.$$

因此, $|f(a)| \leqslant |f(a) - f_n(a)| + |f_n(a)| < 3\varepsilon$ 对所有的$\varepsilon > 0$ 成立, 于是$f(a) = 0$, 矛盾. 因此$Y = X$成立.

现在, 注意到可数集$\{x_1, x_2, \cdots\}$ 的所有有理系数的有限的线性组合全体是X的可数稠密子集.

习题29.9 证明Banach空间X是自反的当且仅当X^*是自反的.

解 假设X^*是自反的. 如果$X \neq X^{**}$, 则由定理29.5, 存在某个非零的$F \in X^{***}$ 使得$F(x) = 0$, $x \in X$. 由于X^*是自反的, 存在非零$x^* \in X^*$ 使得$F(f) = f(x^*)$, $f \in X^{**}$. 特别地,

$$x^*(x) = \hat{x}(x^*) = F(x) = 0$$

对所有$x \in X$ 成立, 于是$x^* = 0$, 矛盾. 因此, X必然是自反的Banach空间.

习题29.10 本习题描述了有界算子的伴随算子. 如果$T : X \to Y$ 是两个赋范空间之间的有界算子, 则T的伴随算子$T^* : Y^* \to X^*$ 定义为$(T^*f)(x) = f(Tx), f \in Y^*, x \in X$. (记$h(x) = \langle x, h \rangle$, 伴随算子的定义用"对偶"的符号表示为$\langle Tx, f \rangle = \langle x, T^*f \rangle, f \in Y^*, x \in X$.)

(a) 证明$T^* : Y^* \to X^*$ 是定义有意义的、范数等于T的范数的有界线性算子;

(b) 选取某个$g \in X^*$ 和某个$u \in Y$, 定义$S : X \to Y, S(x) = g(x)u$. 证明$S$是满足$\|S\| = \|g\| \cdot \|u\|$ 的有界线性算子; (任何这样的算子S叫作一阶算子).

(c) 描述(b)中定义的算子S的伴随算子;

(d) 设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是$m \times n$ 实数矩阵. 习惯上, 我们把$\boldsymbol{A}^*$ 看成是从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^m$ 的(有界)线性算子. 描述$\boldsymbol{A}^*$.

解 像往常一样, 我们将把$T(x)$简记为Tx.

(a) 选取$f \in Y^*$, 则对$x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 有

$$(T^*f)(\alpha x + \beta y) = f(T(\alpha x + \beta y)) = f(\alpha Tx + \beta Ty)$$

$$= \alpha f(Tx) + \beta f(Ty) = \alpha(T^*f)(x) + \beta(T^*f)(y),$$

因为T^*f 是X上的线性泛函. 为证明T^*f 也是连续的, 注意到

$$|(T^*f)(x)| = |f(Tx)| \leqslant \|f\| \cdot \|T(x)\| \leqslant \|f\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$$

对所有$x \in X$ 成立, 这表明T^*f 是一个有界的(因此连续的)线性泛函, 并且对所有的$f \in Y^*$, $\|T^*f\| \leqslant \|T\| \cdot \|f\|$.

后面这个不等式表明$T^* : Y^* \to X^*$ 是有界算子且$\|T^*\| \leqslant \|T\|$. 至于相反方向的不等式, 设$x \in X$ 且$\|x\| \leqslant 1$. 由定理29.4, 存在某个$h \in Y^*$, 使得$\|h\| = 1$ 且$h(Tx) = \|Tx\|$. 于是

$$\|T^*\| \geqslant \|T^*h\| \geqslant \|T^*h(x)\| = \|h(Tx)\| = \|Tx\|$$

对所有满足$\|x\| \leqslant 1$ 的$x \in X$ 成立, 这表明$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leqslant 1\} \leqslant \|T^*\|$. 因此, $\|T^*\| = \|T\|$.

(b) 证明S是线性的是一件常规的事情. 由

$$\begin{aligned}\|S(x)\| &= \|g(x)u\| = |g(x)| \cdot \|u\| \\ &\leqslant \|g\| \cdot \|x\| \cdot \|u\| = (\|g\| \cdot \|u\|)\, \|x\|,\end{aligned}$$

得出S是有界算子且$\|S\| \leqslant \|g\| \cdot \|u\|$. 现在, 如果$x \in X$ 且$\|x\| \leqslant 1$, 我们有

$$\|S\| \geqslant \|S(x)\| = \|g(x)u\| \geqslant |g(x)| \cdot \|u\|,$$

于是$\|S\| \geqslant \sup\{|g(x)| \cdot \|u\| : x \in X \text{ 且} \|x\| \leqslant 1\} = \|g\| \cdot \|u\|$. 上述表明$\|S\| = \|g\| \cdot \|u\|$.

(c) 注意到对每个$f \in Y^*$ 和每个$x \in X$, 我们有

$$(S^*f)(x) = f(Sx) = f(g(x)u) = f(u)g(x) = [f(u)g](x)$$

于是, $S^*f = f(u)g$ 对所有$f \in Y^*$ 成立.

(d) 设$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ 是$m \times n$ 实矩阵. 注意到$\mathbb{R}^n$ 的范数对偶仍然是$\mathbb{R}^n$, 其中每个$y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ 由公式

$$y(x) = < x, y > = x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

定义了$\mathbb{R}^n$ 上的线性泛函. 这表明$\boldsymbol{A}$的伴随算子A^*是满足对偶等式$< \boldsymbol{A}x, y > = < x, \boldsymbol{A}^*y >$ 或$\boldsymbol{A}x \cdot y = x \cdot \boldsymbol{B}y$ 的$n \times m$ 矩阵$\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$, 也即, $\boldsymbol{B}$的元素满足方程

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ji} y_j x_i, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m.$$

这容易得出$b_{ij} = a_{ji}$ 对所有i和j成立. 因此, $\boldsymbol{A}^*$ 是$\boldsymbol{A}$的转置矩阵, 即$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

30. Banach格

习题30.1 设X是向量格, $f : X^+ \to [0, +\infty)$ 是可加函数(即$f(x+y) = f(x) + f(y), x, y \in X^+$). 证明存在$X$上唯一的线性泛函$g$使得$g(x) = f(x), x \in X^+$.

解 首先设$x \geqslant y \geqslant 0$, 则

$$f(x) = f(y + (x - y)) = f(y) + f(x - y) \geqslant f(y)$$

而且, 引理18.7的证明表明$f(rx) = rf(x)$对所有$x \in X^+$ 和所有有理数$r \geqslant 0$成立.

现在, 设$\alpha > 0, x \geqslant 0$. 选取两个有理数列$\{r_n\}$ 和$\{t_n\}$ 使得$0 \leqslant r_n \uparrow \alpha, t_n \downarrow \alpha$, 则不等式$r_n x \leqslant \alpha x \leqslant t_n x$ 表明

$$r_n f(x) = f(r_n x) \leqslant f(\alpha x) \leqslant f(t_n x) = t_n f(x).$$

由此我们得出$\alpha f(x) = f(\alpha x)$.

定义$g : X \to \mathbb{R}, g(x) = f(x^+) - f(x^-)$.

注意到如果$x = y - z$, $y, z \in X^+$, 则关系式$x^+ + z = y + x^-$ 以及X^+ 上函数f的可加性表明$f(x^+) + f(z) = f(y) + f(x^-)$, 即

$$g(x) = f(x^+) - f(x^-) = f(y) - f(z).$$

特别地, 对$x, y \in X$, 我们有

$$\begin{aligned} g(x+y) &= g(x^+ + y^+ - (x^- + y^-)) = f(x^+ + y^+) - f(x^- + y^-) \\ &= f(x^+) + f(y^+) - f(x^-) - f(y^-) \\ &= [f(x^+) - f(x^-)] + [f(y^+) - f(y^-)] \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

而且, 对$\alpha > 0$, 有

$$g(\alpha x) = f(\alpha x^+) - f(\alpha x^-) = \alpha[f(x^+) - f(x^-)] = \alpha g(x)$$

对$\alpha < 0$,

$$g(\alpha x) = -\alpha g(-x) = -\alpha[g(x^- - x^+)] = -\alpha[f(x^-) - f(x^+)] = \alpha g(x)$$

因此, g是X上的线性泛函, 而且显然是f的唯一开拓.

习题30.2 一个向量格被称作有序完备的, 如果每一个有上界的非空子集有最小上界(也称作集合的上确界).

证明如果X是向量格, 则它的有序对偶$X^\sim$ 是有序完备的向量格.

解 设A是$X^{\sim}$的非空子集，且有上界$g \in X^{\sim}$．用集合$\{g-f: f \in A\}$代替A，我们不妨假设$A \subseteq X_+^{\sim}$．含B表示A的所有有限上确界的全体，即，$f \in B$当且仅当存在$f_1, f_2, \cdots f_n \in A$且$f = \vee_{i=1}^n f_i$．显然，$f \leqslant g$对所有$f \in B$也成立．然后对$x \in X^+$，由

$$h(x) = \sup\{f(x) : f \in B\}$$

定义$h: X^+ \to \mathbb{R}^+$.显然$0 \leqslant h(x) \leqslant g(x)$．

设$x, y \in X^+$，由于对于所有的$f \in B$，$f(x+y) = f(x) + f(y) \leqslant h(x) + h(y)$，有

$$h(x+y) \leqslant h(x) + h(y).$$

另一方面，给定$\varepsilon > 0$，选取$f_1, f_2 \in B$使得$h(x) - \varepsilon < f_1(x)$和$h(y) - \varepsilon < f_2(y)$．考虑到$f_1 \vee f_2 \in B$，我们有

$$\begin{aligned} h(x) + h(y) - 2\varepsilon &\leqslant f_1(x) + f_2(y) \leqslant f_1 \vee f_2(x) + f_1 \vee f_2(y) \\ &= f_1 \vee f_2(x+y) \leqslant h(x+y). \end{aligned}$$

因此,

$$h(x) + h(y) \leqslant h(x+y)$$

也成立，于是$h(x+y) = h(x) + h(y)$.

由前面的习题，h唯一开拓成正线性泛函．显然，$f \leqslant h$，$f \in A$．另一方面，若$f \leqslant \phi$对所有$f \in A$成立，则$f \leqslant \phi$也对所有$f \in B$成立，这容易导出$h \leqslant \phi$，即$h = \sup A$在$X^{\sim}$中成立.

习题30.3 证明[0,1]上的所有有界函数全体是$\mathbb{R}^{[0,1]}$的理想．而且证明$C[0,1]$是$\mathbb{R}^{[0,1]}$的子向量格但不是理想.

解 设$f: [0,1] \to \mathbb{R}$是有界函数.如果$|f(x)| \leqslant M$对所有$x \in [0,1]$及满足$|g| \leqslant |f|$的$g \in \mathbb{R}^{[0,1]}$成立，则$|g(x)| \leqslant M$对所有$x \in [0,1]$也成立，这表明所有有界函数组成的空间是$\mathbb{R}^{[0,1]}$的理想.

函数$\chi_{(0,\frac{1}{2})}$不是连续函数且满足$0 \leqslant \chi_{(0,\frac{1}{2})} \leqslant \mathbf{1}$，其中$\mathbf{1}$表示[0, 1]上的常数函数1. 因此，$C[0,1]$不是$\mathbb{R}^{[0,1]}$的理想.

习题30.4 设X是向量格．证明X上的范数$\|\cdot\|$是格范数，当且仅当它满足以下两条性质：

(a) 如果$0 \leqslant x \leqslant y$，则$\|x\| \leqslant \|y\|$；

(b) $\|x\| = \||x|\|$对所有$x \in X$成立.

解 假设$\|\cdot\|$是格范数.显然，$0 \leqslant x \leqslant y$隐含$\|x\| \leqslant \|y\|$，而且$|x| = \|x\|$，于是$\|x\| \leqslant \||x|\| \leqslant \|x\|$.

另一方面，设(a)和(b)正确.如果$|x| \leqslant |y|$，则

$$\|x\| = \||x|\| \leqslant \||y|\| = \|y\|$$

因此$\|\cdot\|$是格范数.

习题30.5 证明赋范向量格X中，它的正锥X^+是闭集.

解 由定理30.1(3)得

$$|x^- - y^-| = |(-x)^+ - (-y)^+| \leqslant |x-y|,$$

这表明由X到X的函数$x \to x^-$ 是(一致)连续的. 因此, $X^+ = \{x \in X : x^- = 0\}$ 是闭集.

习题30.6 设X是赋范向量格.假设$\{x_n\}$ 是X中满足$x_n \leqslant x_{n+1}$, $n=1,2,\cdots$ 的序列. 证明如果$\lim x_n = x$ 在x中成立, 则向量x是X中的序列$\{x_n\}$ 的最小上界. 用符号表示就是$x_n \uparrow x$ 成立.

解 假设$\{x_n\}$ 满足$x_n \leqslant x_{n+1}$, $n=1,2,\cdots$ 且$\lim\ x_n = x$, 则$x_{n+p}-x_n \geqslant 0$ 对所有的n和p成立且$\lim\limits_{p\to\infty}(x_{n+p}-x_n) = x - x_n$. 由于正锥$X^+$ 是闭的(由习题30.5得到), 所以$x - x_n \geqslant 0$ 或$x \geqslant x_n$, $n=1,2,\cdots$. 这表明x是序列$\{x_n\}$ 的上界.

为证明x是序列$\{x_n\}$ 的最小上界, 假设$y \geqslant x_n$, $n=1,2,\cdots$. 于是$y-x_n \geqslant 0, n=1,2,\cdots$; 且$\lim(y-x_n) = y-x$. 再一次利用X^+ 是闭的, 我们得到$y-x \in X^+$, 即$y-x \geqslant 0$ 或$y \geqslant x$, 因此$x = \sup\{x_n\}$ 或$x_n \uparrow x$ 成立, 得证.

习题30.7 假设$x_n \to x$ 在Banach格中成立, $\{\varepsilon_n\}$ 是严格大于0的实数列. 证明存在$\{x_n\}$ 的子序列$\{x_{k_n}\}$ 和某个正向量u使得$|x_{k_n}-x| \leqslant \varepsilon_n u$ 对所有的n成立.

解 一个简单的归纳论证保证了$\{x_n\}$ 的子列$\{x_{k_n}\}$ 的存在, 它使得对所有的k, $\|x_{k_n}-x\| \leqslant \varepsilon_n 2^{-n}$. 注意到正向量级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\varepsilon_n)^{-1}|x_{k_n}-x|$ 是绝对可和的. 由于X是Banach空间, $u = \sum_{n=1}^{\infty}(\varepsilon_n)^{-1}|x_{k_n}-x|$ 存在于X中. 习题30.6表明$(\varepsilon_n)^{-1}|x_{k_n}-x| \leqslant u, n=1,2,\cdots$. 因此$|x_{k_n}-x| \leqslant \varepsilon_n u, n=1,2,\cdots$, 得证.

习题30.8 设$T: X \to Y$ 是两个赋范向量格之间的正算子, 即$x \geqslant 0$, $x \in X$ 隐含着$Tx \geqslant 0$. 如果X是Banach格, 证明T是连续的.

解 设$T: X \to Y$ 是正算子, 其中X是Banach格, Y是赋范向量格. 仅设T不连续, 则存在X的序列$\{x_n\}$ 和某个$\varepsilon > 0$ 使得$x_n \to 0$ 且对所有n, $\|Tx_n\| \geqslant \varepsilon$. 由习题30.7, 存在$\{x_n\}$ 的子列$\{y_n\}$ 和某个$u \in X^+$, 使得对所有n, $|y_n| \leqslant u/n$. 注意到T是正算子, 所以对所有n, $|Ty_n| \leqslant T|y_n| \leqslant Tu/n$, 于是$\|Ty_n\| \leqslant \|Tu\|/n$, 由于$\|Tu\|/n \to 0$, 所以$\|Ty_n\| \to 0$, 与$\|Ty_n\| > \varepsilon$, $n=1,2,\cdots$ 矛盾. 故T是连续算子.

习题30.9 证明向量格上的任意两个完备格范数等价.

解 如果$\|\cdot\|_1$ 和$\|\cdot\|_2$ 是向量格上的两个完备格范数, 则由习题30.8, 恒等算子$I: (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ 是同胚, 即$\|\cdot\|_1$ 与$\|\cdot\|_2$ 是两个等价的范数.

习题30.10 平均算子$A: \mathcal{L}_\infty \to \mathcal{L}_\infty$ 定义成

$$A(x) = \left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \cdots, \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}, \cdots\right),$$

其中$x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathcal{L}_\infty$. 证明下面的结论:

(a) A是正算子;

(b) A是连续算子;

(c) 向量空间

$$V=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots)\in\mathcal{L}_\infty:\left\{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right\}\text{收敛}\right\}$$

是$\mathcal{L}_\infty$的闭子空间. $V=\mathcal{L}_\infty$吗?

解　(a)如果$x=(x_1,x_2,\cdots)\geqslant 0$，则$x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots$，于是$(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n\geqslant 0$，这隐含着$A(x)\geqslant 0$，因此$A$是正算子.

(b) 由习题30.8, Banach格上的每个正算子是连续的, 因此A(作为一个正算子)是连续的.

(c) 由习题29.5, 我们知道所有收敛序列组成的空间

$$c=\{x=(x_1,x_2,\cdots)\in\mathcal{L}_\infty:\lim_{n\to\infty}x_n\text{存在}\}$$

是$\mathcal{L}_\infty$的闭子空间. 显然$V=A^{-1}(c)$，由于A是连续的, 后者保证了V是$\mathcal{L}_\infty$的闭子空间.

存在有界序列, 具有发散的平均序列.看下面的例子.

$$(1,-1,1,1,-1,-1,1,1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,\cdots).$$

因此V是$\mathcal{L}_\infty$的真闭子空间.

习题30.11　本题说明赋范向量格X的范数对偶X^*, 可能是它的有序对偶$X^\sim$的真理想. 设X为所有序列$\{x_n\}$的全体, 其中x_n只有有限项不为零(由序列决定). 证明:

(a) X是函数空间;

(b) X配上上确界范数是赋范向量格, 但不是Banach格;

(c) 如果$f:X\to\mathbb{R}$由$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx_n, x=\{x_n\}\in X$所确定, 则$f$是$X$上的正线性泛函但不连续.

解　(a) 常规作法.

(b) 如果$x_n=(1,1/2,1/3,\cdots,1/n,\cdots)$，则$\{x_n\}$是$X$的Cauchy序列但在$X$中不收敛.

(c) 显然, f是正线性泛函. 如果e_n表示第n个元素为1, 其余各项都是0的序列, 则$\|e_n\|_\infty=1$且$n=f(e_n)\leqslant\|f\|$，即$\|f\|=\infty$.

习题30.12　证明上题中赋范向量格的范数完备化.

解　令

$$c_0=\{x=(x_1,x_2,\cdots)\in\mathcal{L}_\infty:\lim_{n\to\infty}x_n=0\}$$

显然, c_0是$\mathcal{L}_\infty$的子向量格. 而且, 说明c_0是闭子空间并不难, 于是c_0是(在上确界范数下)是Banach格. 我们论证c_0是赋范向量格X的范数完备化.

为说明这点, 首先注意到X是c_0的子向量格. 令$x=(x_1,x_2,\cdots)\in c_0, \varepsilon>0$. 选取某个$n$, 使得当$k\geqslant n$时, $|x_k|<\varepsilon$. 注意到$y=(x_1,\cdots x_n,0,0,\cdots)\in X$满足$\|x-y\|_\infty\leqslant\varepsilon$. 因此, X在c_0中稠密, 故我们的论证成立.

习题30.13 令$C_c(X)$ 是局部紧的Hausdorff拓扑空间上, 所有连续实值函数在上确界范数下的赋范向量格. 确定$C_c(X)$ 的范数完备化.

解 考虑函数向量空间

$$c_0(X) = \{f \in C(X) : \forall \varepsilon > 0, \text{ 存在紧集}k, \text{ 使得}|f(x)| < \varepsilon, \ x \notin K\}.$$

显然, $c_0(X)$ 是$B(X)$的子向量格. 我们声明$c_0(X)$ 是闭子空间. 为说明这一点, 设$\{f_n\} \subseteq c_0(X)$ 且f_n在$B(X)$中收敛于f. 令$\varepsilon > 0$. 由定理9.2, $f \in C(X)$. 选取某个n, 使得$\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$, 然后选取一个紧集$K$, 使得对$x \notin K$, $|f_n(x)| < \varepsilon$. 因此,

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < 2\varepsilon$$

对所有$x \notin K$ 成立, 于是$f \in c_0(X)$. 因此$c_0(X)$ (在上确界范数下)是Banach格.

显然, $C_c(X)$ 是$c_0(X)$的子向量格, 且我们声明$C_c(X)$ 在$c_0(X)$ 中稠密. 为说明这一点, 设$f \in c_0(X)$, $\varepsilon > 0$. 选取某个紧集K, 使得当$x \notin K$ 时, $|f(x)| < \varepsilon$, 然后利用定理10.8选取某个$g \in C_c(X)$, 使得$g(x) = 1$, $x \in K$, $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$, $x \notin K$. 于是$fg \in C_c(X)$ 且$\|fg - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$, 证明了$\overline{C_c(X)} = c_0(X)$. 因此$c_0(X)$ 是$C_c(X)$ 的范数完备化.

习题30.14 设X和Y是两个向量格, 设$T : X \to Y$ 是线性算子. 证明下列命题等价:

(a) $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$, $x, y \in X$;

(b) $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$, $x, y \in X$;

(c) 当$x \wedge y = 0$ 时, $T(x) \wedge T(y) = 0$;

(d) $|T(x)| = T(|x|)$, $x \in X$.

(满足上述等价命题的线性算子T被称作**格同态**.)

解 (a) $\Rightarrow$ (b)由习题9.1的等式(a), 有

$$\begin{aligned} T(x \wedge y) &= T(x + y - x \vee y) = T(x) + T(y) - T(x \vee y) \\ &= T(x) + T(y) - T(x) \vee T(y) = T(x) \wedge T(y) \end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (c)如果$x \wedge y = 0$, 则

$$T(x) \wedge T(y) = T(x \wedge y) = T(0) = 0$$

(c) $\Rightarrow$ (d)利用习题9.1的等式(e), 有

$$\begin{aligned} |T(x)| &= |T(x^+) - T(x^-)| = T(x^+) \vee T(x^-) - T(x^+) \wedge T(x^-) \\ &= T(x^+) \vee T(x^-) = T(x^+) + T(x^-) - T(x^+) \wedge T(x^-) \\ &= T(x^+) + T(x^-) = T(x^+ + x^-) = T(|x|). \end{aligned}$$

(d) $\Rightarrow$ (a)由习题9.1的等式(f), 我们得到

$$T(x \vee y) = T\left(\frac{1}{2}[x + y + |x - y|]\right) = \frac{1}{2}[T(x) + T(y) + T(|x - y|)]$$

$$= \frac{1}{2}[T(x) + T(y) + |T(x) - T(y)|] = T(x) \vee T(y)$$

习题30.15　设$\mathcal{L}_\infty$ 是所有有界实数列组成的Banach格, 即$\mathcal{L}_\infty = B(\mathbb{N}), \{r_1, r_2 \cdots\}$ 是[0, 1]内的有理数的计数. 证明映射$T : C[0,1] \to \mathcal{L}_\infty$, $T(f) = (f(r_1), f(r_2), \cdots)$ 是格等距但不是到上的.

解　显然, T是线性算子.设$f \in C[0,1]$, 由于f是连续函数且[0,1]内的有理数集是稠密集, 容易得出

$$\begin{aligned}\|Tf\|_\infty &= \sup\{|f(r_n)| : n = 1, 2, \cdots\} \\ &= \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\} = \|f\|_\infty\end{aligned}$$

另外, 注意到

$$|T(f)| = (|f(r_1)|, |f(r_2)|, \cdots) = (|f|(r_1), |f|(r_2), \cdots) = T(|f|).$$

这说明T是格等距.

为说明T不是到上的, 注意到

$$T(f) \neq (0, 1, 0, 1, \cdots)$$

对所有$f \in C[0,1]$ 成立.

习题30.16　设X是赋范向量格. 证明元素$x \in X$ 满足$x \geqslant 0$ 当且仅当$f(x) \geqslant 0$ 对X上的每一个连续正线性泛函成立.

解　如果$x \geqslant 0$, 则显然$f(x) \geqslant 0$ 对每个$0 \leqslant f \in X^\sim$ 成立.

至于必要性, 取定x, 且$f(x) \geqslant 0$ 对所有$f \in X_+^\sim$ 成立. 取定$0 \leqslant f \in X^\sim$. 由于$-g(x) \leqslant 0$ 对所有$0 \leqslant g \leqslant f$ 成立, 由定理30.3得

$$0 \leqslant f(x^-) = \sup\{-g(x) : g \in X^\sim \text{且} 0 \leqslant g \leqslant f\} \leqslant 0,$$

即$f(x^-) = 0$ 对所有$0 \leqslant f \in X^\sim$ 成立, 因此$f(x^-)$ 对所有$f \in X^*$ 成立. 由定理29.4, 我们得到$x^- = 0$, 因此, $x = x^+ - x^- = x^+ \geqslant 0$, 得证.

习题30.17　设X是Banach格.如果$0 \leqslant x \in X$, 则证明

$$\|x\| = \sup\{f(x) : 0 \leqslant f \in X^* \text{且} \|f\| = 1\}.$$

解　设$x \geqslant 0$, 考虑到不等式$|f(x)| \leqslant |f|(x) \leqslant \|f\| \cdot \|x\|$, 我们有

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sup\{|f(x)| : f \in X^* \text{且} \|f\| = 1\} \\ &\leqslant \sup\{|f|(x) : f \in X^* \text{且} \|f\| = 1\} \\ &= \sup\{f(x) : 0 \leqslant f \in X^* \text{且} \|f\| = 1\} \leqslant \|x\|.\end{aligned}$$

从而得到结论.

习题30.18 设$\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是严格单调的连续函数且$T:C[0,1]\to C[0,1]$ 是连续线性算子. 如果$T(\varphi f)=\varphi T(f)$ 对$f\in C[0,1]$ 成立(其中φf 表示φ 和f的乘积). 证明存在唯一的函数$h\in C[0,1]$ 使得$T(f)=hf, f\in C[0,1]$.

解 取f为常数函数**1**，即$f=\mathbf{1}$，令$h=T\mathbf{1}$，我们得到$T(\varphi)=h\varphi$，且通过归纳法, $T(\varphi^n)=h\varphi^n$ 对所有$n\geqslant 0$ 成立. 因此, 由于T的线性性, 我们得到

$$T(P(\varphi))=hP(\varphi) \tag{$\bigstar$}$$

对每个单变量的多项式P成立. 由于函数φ 是严格递增的, 代数$\mathcal{A}=\{P(\varphi):P \text{ 为多项式}\}$分离点且包含常数函数**1**. 因此, 由Stone-Weierstrass定理11.5, $\mathcal{A}$在$C[0,1]$中稠密. 由($\bigstar$), 容易得出$T(f)=hf, f\in C[0,1]$.

习题30.19 如果$f\in C[0,1]$，多项式

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k},$$

其中$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 是二项式系数, 称为f的**Bernstein多项式**.

证明: 如果$f\in C[0,1]$，则f的Bernstein多项式序列$\{B_n\}$ 一致收敛于f.

解 设$\{T_n\}$ 是从$C[0,1]$到$C[0,1]$的正算子序列, 其中

$$T_nf(t)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)t^k\cdot(1-t)^{n-k}, f\in C[0,1], t\in[0,1].$$

我们必须证明

$$\lim\|T_nf-f\|_\infty=0$$

对所有$f\in C[0,1]$ 成立. 由Korovkin定理30.13, 证明$\lim\|T_nf-f\|_\infty=0$ 对$f=\mathbf{1}$，x和x^2就足够了.

为做到这一点, 我们需要一些基本的等式. 首先注意到二项式定理

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}=[t+(1-t)]^n=1 \tag{$\bigstar$}$$

对所有t成立.

在($\bigstar$)求导, 我们得到

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[kt^{k-1}(1-t)^{n-k}-(n-k)t^k(1-t)^{n-k-1}]$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^{k-1}(1-t)^{n-k-1}(k-nt)=0.$$

两边同乘以$t(1-t)$得

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}(k-nt)=0,$$

利用(★), 我们得到

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}t^k(1-t)^{n-k}=t. \qquad (★★)$$

在(★★)式两边求导, 得

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}t^{k-1}(1-t)^{n-k-1}(k-nt)=1.$$

两边乘以$t(1-t)$, 我们得到

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}t^k(1-t)^{k-n}(k-nt)=t(1-t),$$

即 $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}\right)^2t^k(1-t)^{k-n}-t\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}t^k(1-t)^{k-n}=\frac{t(1-t)}{n},$$

考虑到(★★), 我们看到

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}\right)^2t^k(1-t)^{n-k}-t^2=\frac{t(t-1)}{n} \qquad (★★★)$$

等式(★), (★★)和(★★★)可以写成如下形式:

$$T_n\mathbf{1}=\mathbf{1},\quad T_nx=x,\quad 和\quad [T_nx^2-x^2](t)=\frac{t(1-t)}{n}.$$

注意到这些等式已经隐含着$\lim\|T_nf-f\|_\infty=0$ 对$f=\mathbf{1}$, x和x^2成立.

习题30.20 设$T:C[0,1]\to C[0,1]$ 为正算子. 证明如果当$f=\mathbf{1}$, x和x^2时$Tf=f$成立, 则T是恒等算子(即, $Tf=f,\ f\in C[0,1]$).

解 令$T_n=T, n=1,2,\cdots$. 显然, 当$f=\mathbf{1}$, x和x^2时, $\lim T_nf=f$. 由Korovkin定理30.13, 我们有$Tf=\lim T_nf=f$ 对每个$f\in C[0,1]$ 成立.

习题30.21(Korovkin) 设$\{T_n\}$ 是$C[0,1]$到$C[0,1]$的正算子序列, 且$T_n\mathbf{1}=\mathbf{1}$, 如果存在某个$c\in[0,1]$ 使得$\lim T_ng=0$ 对函数$g(t)=(t-c)^2$ 成立, 证明$\lim T_nf=f(c)\cdot\mathbf{1}$, 对所有$f\in C[0,1]$ 成立.

解 设$f\in C[0,1]$, $\varepsilon>0$. 只需证明存在常数C_1,C_2使得

$$\|T_nf-f(c)\cdot\mathbf{1}\|_\infty\leqslant\varepsilon+C_1\|T_n\mathbf{1}-\mathbf{1}\|_\infty+C_2\|T_ng\|_\infty$$

对所有n成立就足够了.

令$M=\|f\|_\infty$，由f在c点的连续性, 存在某个$\delta>0$使得当$|t-c|<\delta$时, $-\varepsilon<f(t)-f(c)<\varepsilon$. 然后, 观察到

$$-\varepsilon-\frac{2M}{\delta^2}(t-c)^2\leqslant f(t)-f(c)\leqslant\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}(t-c)^2 \tag{a}$$

对所有$t\in[0,1]$成立. (为弄清楚这点, 重复定理30.13的证明中的论述.) 由于每个T_n是正的和线性的, 由(a)得到

$$-\varepsilon T_n\mathbf{1}-\frac{2M}{\delta^2}T_ng\leqslant T_nf-f(c).\,T_n\mathbf{1}\leqslant\varepsilon T_n\mathbf{1}+\frac{2M}{\delta^2}T_ng.$$

令$C=\frac{2M}{\delta^2}$，注意到

$$|T_nf-f(c)\cdot T_n\mathbf{1}|\leqslant\varepsilon T_n\mathbf{1}+CT_ng=\varepsilon\mathbf{1}+\varepsilon|T_n\mathbf{1}-\mathbf{1}|+CT_ng$$

因此,

$$\begin{aligned}|T_nf-f(c)\cdot\mathbf{1}|&\leqslant|T_nf-f(c)\cdot T_n\mathbf{1}|+|f(c)|\cdot|T_n\mathbf{1}-\mathbf{1}|\\&\leqslant\varepsilon\mathbf{1}+(\varepsilon+|f(c)|)|T_n\mathbf{1}-\mathbf{1}|+CT_ng,\end{aligned}$$

于是

$$\|T_nf-f(c)\cdot\mathbf{1}\|_\infty\leqslant\varepsilon+(\varepsilon+|f(c)|)\,\|T_n\mathbf{1}-\mathbf{1}\|_\infty+C\,\|T_ng\|_\infty.$$

31. L_p空间

习题31.1 设$f\in L_p(\mu)$, $\varepsilon>0$. 证明

$$\mu^*(\{x\in X:|f(x)|\geqslant\varepsilon\})\leqslant\varepsilon^{-p}\int|f|^p\mathrm{d}\mu$$

解 考虑可测集$E=\{x\in X:|f(x)|\geqslant\varepsilon\}$，注意到$E=\{x\in X:|f(x)|^p\geqslant\varepsilon^p\}$. 因此,

$$\int|f|^p\mathrm{d}\mu\geqslant\int\chi_{\mathrm{E}}|f|^p\mathrm{d}\mu\geqslant\int\varepsilon^p\chi_E\mathrm{d}\mu=\varepsilon^p\mu^*(E)$$

习题31.2 设$\{f_n\}$是某个$L_p(\mu)$, $1\leqslant p<\infty$空间的序列. 证明如果$\lim\|f_n-f\|_p=0$在$L_p(\mu)$成立, 则$\{f_n\}$依测度收敛于f.

解 由上面的习题, 我们得到

$$\mu^*(\{x\in X:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})\leqslant\varepsilon^{-p}\int|f_n-f|^p\mathrm{d}\mu.$$

显然, 这个不等式证明了当$\lim\|f_n-f\|_p=0$时, $f_n\xrightarrow{\mu}f$.

习题31.3 设$(X,\mathcal{S},\mu)$是可测空间, 考虑集合

$$E=\{\chi_A:A\in\Lambda_\mu\quad 且\quad\mu^*(A)<\infty\}.$$

证明E是$L_1(\mu)$的闭子集(因此本身是完备的度量空间), 利用这个结论和等式

$$\mu(A\Delta B)=\int|\chi_A-\chi_B|\mathrm{d}\mu=\|\chi_A-\chi_B\|_1$$

给出习题14.12(c)的另一种解法.

解 假设$\{\chi_{A_n}\}$是E中的序列, 它使得$\int|\chi_{A_n}-f|\mathrm{d}\mu\to 0$对某个$f\in L_1(\mu)$成立. 由引理31.6, 存在$\{\chi_{A_n}\}$的子列$\{\chi_{A_{k_n}}\}$使得$\chi_{A_{k_n}}\to f$ a.e.. 这表明(怎么表明?)对某个$A\in\wedge_\mu$且$\mu^*(A)<\infty$, $f=\chi_A$ a.e.. 因此, $f\in E$, 从而E是$L_1(\mu)$的闭子集.

习题31.4 证明不等式

$$a^tb^{1-t}\leqslant ta+(1-t)b,\quad 0<t<1;a\geqslant 0;\ b\geqslant 0$$

中的等号成立当且仅当$a=b$. 利用这一点证明如果$f\in L_p(\mu)$, $g\in L_q(\mu)$, 其中$1<p,q<\infty$且$1/p+1/q=1$, 则$\int|fg|\mathrm{d}\mu=\|f\|_p\cdot\|g\|_q$成立当且仅当存在两个常数$C_1$和$C_2$(两个不都等于0)使得$C_1|f|^p=C_2|g|^q$.

解 显然, 如果$a=b\geqslant 0$, 则$a^tb^{1-t}=ta+(1-t)b=a$. 至于充分性, 令$a^tb^{1-t}=ta+(1-t)b$.令$y=a/b$, 给定的等式表示成$1-t+ty-y^t=0$. 由于函数$f(x)=1-t+tx-x^t$对于$x\geqslant 0$ (和某个固定的t, $0<t<1$)在$x=1$时达到最小值(见引理31.2的证明), 由此得出$y=a/b=1$, 于是$a=b$. 因此, $a^tb^{1-t}=ta+(1-t)b$当且仅当$a=b$.

至于第二部分, 首先假设存在(两个不全为零)的常数C_1和C_2使得$C_1|f|^p=C_2|g|^q$. 我们不妨设$C_1>0$和$C_2\geqslant 0$. 我们有

$$\begin{aligned}\int|fg|\mathrm{d}\mu&=\int\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{\frac{1}{p}}|g|^{\frac{q}{p}}|g|\mathrm{d}\mu=\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{\frac{1}{p}}\int|g|^q\mathrm{d}\mu\\&=\left[\int\left(\frac{C_2}{C_1}\right)|g|^q\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int|g|^q\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{q}}\\&=\left(\int|f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int|g|^q\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}=\|f\|_p\cdot\|g\|_q\end{aligned}$$

至于反面, 假设$\int|fg|\mathrm{d}\mu=\|f\|_p\cdot\|g\|_q$, 如果$f$或$g$等于0, 则结论是平凡的. (如果$f=0$, 令$C_1=1, C_2=0$.) 于是, 我们假设$f\neq 0$, $g\neq 0$. 令$t=1/p, a=(|f(x)|/\|f\|_p)^p$, $b=(|g(x)|/\|g\|_q)^q$, 不等式$a^tb^{1-t}\leqslant ta+(1-t)b$给出

$$0\leqslant\frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p+\frac{1}{q}\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q-\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\cdot\|g\|_q}$$

积分(利用我们的假设)得

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int\left[\frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p+\frac{1}{q}\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q-\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\cdot\|g\|_q}\right]\mathrm{d}\mu(x)\\&=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\int|f(x)g(x)|\mathrm{d}\mu(x)}{\|f\|_p\cdot\|g\|_q}=1-1=0\end{aligned}$$

因此,

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\cdot\|g\|_q}=\frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p+\frac{1}{q}\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q$$

对几乎所有的x成立, 于是由习题的第一部分, 我们得到$\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p=\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q$, 因此

$$(\|g\|_q)^q|f(x)|^p=(\|f\|_p)^p|g(x)|^q$$

对几乎所有x成立, 得证.

习题31.5 假设$\mu^*(x)=1, 0<p<q\leqslant\infty$. 如果$f\in L_q(\mu)$, 则$\|f\|_p\leqslant\|f\|_q$.

解 假设$\mu^*(x)=1, 0<p<q<\infty$, 设$f\in L_q(\mu)$, 由定理31.14, 我们知道$L_q(\mu)\subseteq L_p(\mu)$, 于是$f\in L_p(\mu)$.

令$r=q/p>1$, 选取$s>1$使得$1/r+1/s=1$.由于$|f|^p\in L_r(\mu)$, $\mathbf{1}\in L_s(\mu)$, 由Hölder不等式得到

$$\begin{aligned}(\|f\|_p)^p&=\int|f|^p\mathrm{d}\mu=\int|f|^p\cdot\mathbf{1}\mathrm{d}\mu\leqslant\left(\int|f|^{pr}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{r}}\cdot\left(\int\mathbf{1}^s\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{s}}\\&=\left(\int|f|^{pr}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\int|f|^q\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{p}{q}}=(\|f\|_q)^p\end{aligned}$$

因此$\|f\|_p\leqslant\|f\|_q$.

如果$q=\infty$, 则

$$\|f\|_p=\left(\int|f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int(\|f\|_\infty)^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}=\|f\|_\infty=\|f\|_q.$$

习题31.6 设$f\in L_1(\mu)\cap L_\infty(\mu)$, 则

(a) 对于$1<p<\infty$, $f\in L_p(\mu)$;

(b) 如果$\mu^*(X)<\infty$, 则$\lim\limits_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$.

解 (a) 如果$M=\|f\|_\infty$, 则不等式

$$|f|^p=|f|^{p-1}\cdot|f|\leqslant M^{p-1}\cdot|f|$$

表明对于$1<p<\infty, f\in L_p(\mu)$.

(b) 设$\{p_n\}$是正实数列, 其中$p_n>1, n=1,2,\cdots$ 且$\lim p_n=\infty$. 由不等式

$$\|f\|_{p_n}=\left(\int|f|^{p_n}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p_n}}\leqslant\|f\|_\infty[\mu^*(X)]^{\frac{1}{p_n}}$$

得

$$\lim\ \sup\|f\|_{p_n}\leqslant\|f\|_\infty.$$

设$0<\varepsilon<M$, 则可测集

$$E=\{x\in X:|f(x)|\geqslant\|f\|_\infty-\varepsilon\}$$

的测度$\mu^*(E) > 0$．由$(\|f\|_\infty - \varepsilon)^{p_n} \cdot \chi_E \leqslant |f|^{p_n}$，得$(\|f\|_\infty - \varepsilon)[\mu^*(E)]^{\frac{1}{p_n}} \leqslant \|f\|_{p_n}$，于是$\|f\|_\infty - \varepsilon \leqslant \lim\ \inf \|f\|_{p_n}$ 对所有$0 < \varepsilon < M$ 成立,即

$$\|f\|_\infty \leqslant \lim\ \inf \|f\|_{p_n}.$$

因此, $\lim\ \sup \|f\|_{p_n} \leqslant \|f\|_\infty \leqslant \lim\ \inf \|f\|_{p_n}$，这表明$\lim \|f\|_{p_n} = \|f\|_\infty$，由此得出$\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$．

习题31.7 设$f \in L_2[0,1]$ 满足$\|f\|_2 = 1$ 且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\lambda(x) \geqslant \alpha > 0$．对$\beta \in \mathbb{R}$，令$E_\beta = \{x \in [0,1] : f(x) > \beta\}$. 如果$0 < \beta < \alpha$，证明$\lambda(E_\beta) \geqslant (\beta - \alpha)^2$．(这个不等式以**Paley–Zygmund**引理著称.)

解 设$f \in L_2[0,1]$ 具有上述性质, $0 < \beta < \alpha$．注意到

$$f - \beta \leqslant (f - \beta)\chi_{E_\beta} \leqslant f \cdot \chi_{E_\beta},$$

于是由Hölder不等式得到

$$0 < \alpha - \beta \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}\lambda(x) - \beta = \int_0^1 [f(x) - \beta]\mathrm{d}\lambda(x) \leqslant \int_0^1 f(x)\chi_{E_\beta}(x)\mathrm{d}\lambda(x)$$
$$\leqslant \|f\|_2 \cdot [\lambda(E_\beta)]^{\frac{1}{2}} = [\lambda(E_\beta)]^{\frac{1}{2}}$$

这表明$\lambda(E_\beta) \geqslant (\beta - \alpha)^2$．

习题31.8 证明$\mathcal{L}_p, 1 \leqslant p < \infty$ 是可分Banach格.

解 令e_n 表示第n个元为1其余元都为0的序列, E表示$\{e_1, e_2, \cdots\}$ 具有有理系数的所有有限线性组合的集合. 显然, E是可数集, 我们将论证它在$\mathcal{L}_p, 1 \leqslant p < \infty$ 中稠密.

为说明这点, 设$x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathcal{L}_p(1 \leqslant p < \infty)$, $\varepsilon > 0$. 固定某个自然数n, 使得$\sum_{i=n+1}^\infty |x_i|^p < \varepsilon^p/2$，然后, 选取有理数$r_1, r_2, \cdots r_n$ 使得$\sum_{i=1}^n |x_i - r_i|^p < \varepsilon^p/2$，而且注意到$a = (r_1, r_2, \cdots, r_n, 0, 0, \cdots) = r_1e_1 + r_2e_2 + \cdots + r_ne_n \in E$ 满足

$$\|x - a\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - r_i|^p + \sum_{i=n+1}^\infty |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon,$$

即可数集E在$\mathcal{L}_p$ 中稠密, 因此每个$\mathcal{L}_p(1 \leqslant p < \infty)$ 是可分Banach格.

习题31.9 证明$\mathcal{L}_\infty$ 不是可分的.

解 记$E = \{x_1, x_2, \cdots\}$ 是$\mathcal{L}_\infty$ 的可数子集.记$x_n = (x_1^n, x_2^n, \cdots)$. 定义

$$y_n = \begin{cases} 0, & |x_n^n| \geqslant 1 \\ 2, & |x_n^n| < 1. \end{cases}$$

显然$y = (y_1, y_2, \cdots) \in \mathcal{L}_\infty$ 且

$$\|y - x_n\|_\infty \geqslant |y_n - x_n^n| \geqslant |y_n - |x_n^n|| \geqslant 1$$

对所有n成立.因此$B(y,1)\cap E=\varnothing$，这表明$\mathcal{L}_\infty$ 没有可数子集是稠密的.

另一种证明$\mathcal{L}_\infty$ 不是可分的方法如下：考虑坐标要么是0要么是1的所有序列的集合F. 由习题2.8，集合F是不可数的，而且不难证明对$x,y\in F$ 且$x\neq y$，$\|x-y\|_\infty=1$. 由此得出$\{B(x,1):x\in F\}$ 是不可数的互不相交的开球全体. 从这一点可以推出$\mathcal{L}_\infty$ 的任何稠密子集必然是不可数的.

习题31.10 证明(赋予Lebesgue测度)的$L_\infty([0,1])$ 是不可分的.

解 记$f_x=\chi_{[0,x]}, 0<x<1$.由于$x\neq y$ 时$\|f_x-f_y\|_\infty=1$，因此$\{B(f_x,1):x\in(0,1)\}$ 是$L_\infty([0,1])$ 不可数多互不相交的开球的全体.容易推出$L_\infty([0,1])$ 的任何稠密子集必定是不可数的，因此$L_\infty([0,1])$ 是不可分的Banach格.

习题31.11 设X是局部紧的Hausdorff拓扑空间，给定一点$a\in X$. 设μ 是X上的测度，如此定义在X的所有子集上：当$a\in A$ 时，$\mu(A)=1$；$a\notin A$ 时，$\mu(A)=0$. 换句话说，μ 是Dirac测度(见习题13.4). 证明μ 是正则的Borel测度且Supp $\mu=\{a\}$.

解 首先证明μ 的正则性.

1) 显然$\mu(A)\leqslant 1$ 对$A\subseteq X$ 成立.

2) 设$B\subseteq X$.如果$a\in B$，则

$$1=\mu(B)\leqslant\inf\{\mu(\mathcal{O}):\mathcal{O}\text{是开集且}B\subseteq\mathcal{O}\}\leqslant\mu(X)=1.$$

另一方面，如果$a\notin B$，则利用开集$X\backslash\{a\}$ 得到

$$0=\mu(B)\leqslant\inf\{\mu(\mathcal{O}):\mathcal{O}\text{是开集且}B\subseteq\mathcal{O}\}\leqslant\mu(X\backslash\{a\})=0$$

3) 设$B\leqslant X$.如果$a\notin B$，则B的任何子集C满足$\mu(C)=0$，于是

$$0=\sup\{\mu(K):K\text{ 是紧集且}K\subseteq B\}\leqslant\mu(B)=0$$

如果$a\in B$，则利用$\{a\}$是B的紧子集，得到

$$1=\mu(\{a\})\leqslant\sup\{\mu(K):K\text{ 是紧集且}K\subseteq B\}\leqslant\mu(B)=1.$$

因此，μ 是正则Borel测度.由于$\mu(X\backslash\{a\})=0$，容易得出Supp $\mu=\{a\}$.

习题31.12 如果$g\in C^1[a,b]$, $f\in L_1[a,b]$，则

(a) 证明函数$F:[a,b]\to\mathbb{R}, F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}\lambda(t)$ 是一致连续的；

(b) 证明关于F的分部积分公式：

$$\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}\lambda(x)=g(x)F(x)\Big|_a^b-\int_a^b g'(x)F(x)\mathrm{d}x.$$

解 (a) F的一致连续性由习题22.6马上得到.

(b) 首先选取某个常数$C > 0$, 使得$|g(x)| \leqslant C$ 且$|g'(x)| \leqslant C$, $x \in [a,b]$. 由定理25.33, 存在连续函数列$\{f_n\}$, 使得$\lim \int_a^b |f - f_n| \mathrm{d}\lambda = 0$. 由引理31.6, 我们不妨假设(如果有必要, 可以转移到一个子列)存在某个函数$0 \leqslant h \in L_1[a,b]$ 使得对每个n, $|f_n| \leqslant h$ a.e.且$f_n \to f$ a.e.. 令$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$. 注意到由"标准的"分部积分公式得到

$$\int_a^b g(x)f_n(x)\mathrm{d}\lambda(x) = \int_a^b g(x)f_n(x)\mathrm{d}x = g(x)F_n(x)|_a^b - \int_a^b g'(x)F_n(x)\mathrm{d}x \qquad (\bigstar)$$

由$|gf_n| \leqslant Ch \in L_1[a,b], gf_n \to gf$ a.e.和Lebesgue控制收敛定理得到

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(x)f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}\lambda(x).$$

同时, Lebesgue控制收敛定理表明

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t \to \int_a^x f(t)\mathrm{d}\lambda(t) = F(x), \quad x \in [a,b].$$

观察到$|g'F_n| \leqslant C\int_a^b h\mathrm{d}\lambda$, $g'F_n \to g'F$, Lebesgue控制收敛定理再次获得

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g'(x)F_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g'(x)F(x)\mathrm{d}x.$$

最后, 在($\bigstar$)中令$n \to \infty$, 我们得到

$$\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}\lambda(x) = g(x)F(x)|_a^b - \int_a^b g'(x)F(x)\mathrm{d}x.$$

得证.

习题31.13　设μ 是$\mathbb{R}^n$ 上的正则Borel测度. 证明定义在$\mathbb{R}^n$ 上的所有无穷次可微的实值函数的全体在$L_p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$ 中稠密.

解　设$\mathcal{S}$是由形如$\prod_{i=1}^n [a_i, b_i)$ 的集合组成的半环. 由定理15.10, 由$(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}, \mu)$ 生成的外测度μ与$\mathbb{R}^n$ 的所有Borel集组成的σ代数上的μ 相等. 因此, 需要证明的仅是对于给定的$I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i)$和$\varepsilon > 0$, 存在具有紧支集的C^∞ 函数f使得$\|\chi_I - f\|_p < \varepsilon$.

出于这个目的, 设$I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i)$ 和$\varepsilon > 0$. 习题25.6的解答的第一部分的论述表明存在C^∞ 函数$f: \mathbb{R}^n \to [0,1]$ 使得$\int |\chi_I - f| \mathrm{d}\mu < 2^{-p}\varepsilon^p$, 由于$|\chi_I - f| \leqslant 2$, 因此

$$\begin{aligned}\|\chi_I - f\|_p &= \left(\int |\chi_I - f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |\chi_I - f|^{p-1} \cdot |\chi_I - f| \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant 2\left(\int |\chi_I - f| \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} < 2 \times 2^{-1}\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

习题31.14　设$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间且$\mu^*(x) = 1$.设函数$f \in L_1(\mu)$ 对几乎所有x, $f(x) \geqslant M > 0$, 证明$\ln(f) \in L_1(\mu)$ 且$\int \ln(f)\mathrm{d}\mu \leqslant \ln(\int f\mathrm{d}\mu)$.

解 函数$g(t)=t-1-\ln t, t>0$在$t=1$处达到最小值，因此$0=g(1)\leqslant g(t)=t-1-\ln t,\ t>0$，于是$\ln t\leqslant t-1$，用$t$代替$1/t$，最后的不等式变为$1-1/t\leqslant \ln t$. 因此，$t>0$时，

$$1-\frac{1}{t}\leqslant \ln t\leqslant t-1 \qquad (\bigstar)$$

由于函数$\ln x$ 在$(0,\infty)$ 上连续且f是可测函数，所以$\ln(f)$ 是可测函数. (见习题16.8的解.) 在($\bigstar$)中用$f(x)/\left\|f\right\|_1$ 代替t，得

$$1-\frac{\left\|f\right\|_1}{f(x)}\leqslant \ln(f(x))-\ln(\left\|f\right\|_1)\leqslant \frac{f(x)}{\left\|f\right\|_1}-1 \qquad (\bigstar\bigstar)$$

对几乎所有x成立，由我们的假设，容易得出函数$1-\left\|f\right\|_1/f(x)$ 和$f(x)/\left\|f\right\|_1-1$ 都是可积的，因此由($\bigstar\bigstar$)和定理22.6, $\ln(f)\in L_1(\mu)$.

最后，对($\bigstar\bigstar$) 中右边的不等式积分(考虑到$\mu^*(x)=1$)，得

$$\int \ln(f)\mathrm{d}\mu-\ln(||f||_1)\leqslant \int \frac{f}{||f||_1}\mathrm{d}\mu-1=0,$$

即，

$$\int \ln(f)\mathrm{d}\mu\leqslant \ln(||f||_1)=\ln\left(\int f\mathrm{d}\mu\right).$$

得证.

习题31.15 定理31.7表明：如果$1\leqslant p<\infty, f\in L_p(\mu), \{f_n\}\subseteq L_p(\mu), f_n\to f$ a.e. 且$\lim ||f_n||_p=||f||_p$ ，则$\lim ||f_n-f||_p=0$

用例子说明这个结论在$p=\infty$ 时是错误的.

解 考虑由$f_n=\chi_{(\frac{1}{n},1]}$ 定义的$L_\infty[0,1]$ 中的序列$\{f_n\}$. $f_n\to \mathbf{1}$ a.e.且$||f_n||_\infty=1\to 1=||\mathbf{1}||_\infty$，但$||f_n-\mathbf{1}||_\infty=1$ 对每一个n都对.

习题31.16 本习题给出了从$L_\infty(\mu)$ 到$L_1^*(\mu)$ 的映射$g\to Fg$ (由$F_g(f)=\int fg\mathrm{d}\mu$ 定义) 是等距映射的充分必要条件.

(a) 证明对每个$g\in L_\infty(\mu)$ ，线性泛函$F_g(f)=\int fg\mathrm{d}\mu, f\in L_1(\mu)$ 是$L_1(\mu)$ 上使得$||F_g||\leqslant ||g||_\infty$ 成立的有界线性泛函.

(b) 考察非空集X 和定义在X 的每个子集上的测度μ，其中$\mu(\varnothing)=0$且$A\neq\varnothing$ 时，$\mu(A)=\infty$. 证明$L_1(\mu)=\{0\}, L_\infty(\mu)=B(X)$ (X 上的有界函数)，且由此得出$g\in L_\infty(\mu)$ 满足$||F_g||=||g||_\infty$ 的充分必要条件是$g=0$.

(c) 设我们称测度空间$(X,\mathcal{S},\mu)$ 具有**有限子集性质**，如果具有无穷测度的每个可测集有一个具有有限正测度的可测子集.

证明由$L_\infty(\mu)$ 到$L_1^*(\mu)$ 的线性映射$g\to Fg$ 是格等距当且仅当$(X,\mathcal{S},\mu)$ 具有有限子集性质.

解 (a) 设$g\in L_\infty(\mu)$ ，则对每个$f\in L_1(\mu)$ ，有$|fg|\leqslant ||g||_\infty\cdot|f|$，于是

$$|F_g(f)|=|\int fg\mathrm{d}\mu|\leqslant \int |fg|\mathrm{d}\mu\leqslant ||g||_\infty\int |f|\mathrm{d}\mu=||g||_\infty\cdot||f||_1$$

即, F_g 是$L_1(\mu)$ 上的有界线性泛出且$||F_g|| \leqslant ||g||_\infty$.

(b) 由于每一个非空集有无穷测度, 易知, 只有一个阶梯函数, 即, 常数函数**0**, 即$L_1(\mu) = \{0\}$. 另一方面, 由于每个点集具有无穷测度, $L_\infty(\mu)$ 的每个等价类恰好由一个函数组成. 这表示$L_\infty(\mu) = B(X)$.

最后, 考虑到$L_1^*(\mu) = \{0\}$, 我们必须有$F_g = 0, g \in L_\infty(\mu)$. 因此$||F_g|| = ||g||_\infty$ 当且仅当$||g||_\infty = 0$ (即当且仅当$g = 0$) .

(c) 假设测度空间$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 具有有限子集性质, 设$0 < g \in L_\infty(\mu)$ 且$0 < \varepsilon < ||g||_\infty$. 集合

$$E = \{x \in X : |g(x)| \geqslant ||g||_\infty - \varepsilon\}$$

是可测集且$\mu^*(E) > 0$, 由有限子集性质, 存在一个可测集$F \subseteq E, 0 < \mu^*(F) < \infty$. 令$f = \frac{\text{Sgn}\, g \cdot \chi_F}{\mu^*(F)} \in L_1(\mu)$, 则$||f||_1 = 1$. 因此

$$||F_g|| \geqslant |F_g(f)| = \left|\int fg\mathrm{d}\mu\right| = \int_F \left[\frac{|g|}{\mu^*(F)}\right] \mathrm{d}\mu \geqslant ||g||_\infty - \varepsilon.$$

由于$0 < \varepsilon < ||g||_\infty$ 是任意的, $||F_g|| \geqslant ||g||_\infty$. 利用(a) , 我们得到$||F_g|| = ||g||_\infty$, $g \in L_\infty(\mu)$ 因此, $g \mapsto F_g$ 是格等距.

反过来, 设$g \mapsto F_g$ 是格等距, E 是可测集且$\mu^*(E) = \infty$, 则$g = \chi_E \in L_\infty(\mu)$, 因此$||F_g|| = ||g||_\infty = 1$. 选择某个$0 \leqslant f \in L_1(\mu)$ 使得$F_g(f) = \int fg\mathrm{d}\mu = \int_E f\mathrm{d}\mu > 1/2$. 容易看到存在阶梯函数$0 \leqslant \phi \leqslant f\chi_E$ 使得$\int \phi\mathrm{d}\mu > 1/2$. 由此容易得出存在可测集$F \subseteq E$ 使得$0 < \mu^*(F) < \infty$.

习题31.17　设$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间, 假设存在可测集$E_1, \cdots, E_n$ 使得$0 < \mu(E_i) < \infty, 1 \leqslant i \leqslant n, X = \bigcup_{i=1}^n E_i$, 且每个E_i 没有非空的可测真子集, 证明$L_\infty^*(\mu) = L_1(\mu)$, 即由$L_1(\mu)$ 到$L_\infty^*(\mu)$ 的$g \mapsto F_g$ 是到上的.

解　由假设可知, $E_i \cap E_j = \varnothing, i \neq j$, 对每个$1 \leqslant i \leqslant n$, 固定$x_i \in E_i$, 则$\mu^*(\{x_i\}) > 0$. 如果f是可测函数且$d_i = f(x_i)$, 则$f^{-1}(\{d_i\}) \cap E_i$ 是非空集且是可测的. 因此, 由假设, $f^{-1}(\{d_i\}) \cap E_i = E_i$, 从而f在每个E_i上必然是常数. 换句话说, 对每个可测函数f, 都有$f = \sum_{i=1}^n f(x_i)\chi_E$.

为证明由$L_1(\mu)$ 到$L_\infty^*(\mu)$ 的$g \mapsto F_g$ 是到上的, 设F是$L_\infty^*(\mu)$ 中的任意泛函. 令$c_i = F(\chi_{E_i}), 1 \leqslant i \leqslant n$, 然后令$g = \sum_{i=1}^n [c_i/\mu^*(E_i)]\chi_{E_i} \in L_1(\mu)$. 注意到

$$F_g(\chi_{E_i}) = \int_{\chi_{E_i}} g\mathrm{d}\mu = \int \left[\frac{c_i}{\mu^*(E_i)}\right] \chi_{E_i}\mathrm{d}\mu = c_i = F(\chi_{E_i}).$$

因此,

$$\begin{aligned} F_g(f) &= F_g\left(\sum_{i=1}^n f(x_i)\chi_{E_i}\right) = \sum_{i=1}^n f(x_i)F_g(\chi_{E_i}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i)F(\chi_{E_i}) = F\left(\sum_{i=1}^n f(x_i)\chi_{E_i}\right) = F(f) \end{aligned}$$

对所有的$f \in L_1(\mu)$ 成立, 于是$F = F_g$, 即$g \mapsto F_g$ 是到上的.

习题31.18 设$(X,\mathcal{S},\mu)$是测度空间, $0<p<1$.

(a) 通过反例证明$\|\cdot\|_p$ 不再是$L_p(\mu)$ 上的范数;

(b) 对$f,g\in L_p(\mu)$，令$d(f,g)=\int|f-g|^p\mathrm{d}\mu=(\|f-g\|_p)^p$, 证明$d$是$L_p(\mu)$ 上的度量且配有度量d的$L_p(\mu)$ 是完备的度量空间.

解 (a) 设$0<p<1$．考虑空间$L_p([0,1])$，取$f=\chi_{(0,\frac{1}{2})}, g=\chi_{(\frac{1}{2},1)}$, 则

$$\|f+g\|_p=1>2^{1-\frac{1}{p}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}=\|f\|_p+\|g\|_p,$$

即$\|\cdot\|_p$ 不满足三角不等式.

(b) 如果$a>0$ 且$b>0(0<p<1)$，则

$$\begin{aligned}(a+b)^p&=(a+b)(a+b)^{p-1}=a(a+b)^{p-1}+b(a+b)^{p-1}\\&\leqslant aa^{p-1}+bb^{p-1}=a^p+b^p,\end{aligned}$$

因此, $(a+b)^p\leqslant a^p+b^p$ 对所有$a\geqslant 0,b\geqslant 0$ 成立. 这个不等式容易推出$d(f,g)=\int|f-g|^p\mathrm{d}\mu$是$L_p(\mu)$ 上的度量.

至于完备性, 设$\{f_n\}$ 是度量空间$(L_p(\mu)，d)$ 中的Cauchy序列. 通过转到子列, 我们不妨设对所有n, $\int|f_{n+1}-f_n|^p\mathrm{d}\mu<2^{-n}$. 我们将证明使得$\lim\|f_n-f\|_p=0$ 的某个$f\in L_p(\mu)$ 的存在性.

令$g_1=0, g_n=|f_1|+|f_2-f_1|+\cdots+|f_n-f_{n-1}|, n\geqslant 2$. 显然$0\leqslant g_n\uparrow$ 且

$$\int(g_n)^p\mathrm{d}\mu\leqslant\int|f_1|^p\mathrm{d}\mu+\sum_{i=2}^{n}\int|f_i-f_{i-1}|^p\mathrm{d}\mu\leqslant\int|f_1|^p\mathrm{d}\mu+1<\infty.$$

由Levi定理22.8, 存在某个$g\in L_p(\mu)$ 使得$0\leqslant g_n\uparrow g$ a.e.. 由

$$|f_{n+k}-f_n|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+k}(f_i-f_{i-1})\right|\leqslant\sum_{i=n+1}^{n+k}|f_i-f_{i-1}|=g_{n+k}-g_n$$

容易得出$\{f_n\}$ (几乎处处) 逐点收敛于f．由于$|f_n|=|f_1+\sum_{i=2}^{n}(f_i-f_{i-1})|\leqslant g_n\leqslant g$, a.e., 所以$|f|\leqslant g$ a.e.. 因此$f\in L_p(\mu)$，注意到$|f_n-f|\leqslant 2g$ 且$|f_n-f|^p\to 0$，于是由Lebesgue控制收敛定理, 我们得到

$$d(f_n,f)=\int|f_n-f|^p\mathrm{d}\mu\to 0.$$

因此, $(L_p(\mu),d)$ 是完备的度量空间.

习题31.19 设$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是有限测度空间, 证明由所有阶梯函数组成的向量空间在$L_\infty(\mu)$ 中范数稠密.

解 设$f\in L_\infty(\mu),\varepsilon>0$．选择某个$C>0$，使得对几乎所有的$x$, $|f(x)|<C$，并且选定$[-C,C]$ 的一个分割$-C=a_0<a_1<\cdots<a_n=C$，其中$a_i-a_{i-1}<\varepsilon, 1\leqslant i\leqslant n$. 令$E_i=f^{-1}([a_{i-1},a_i))$，注意到(由于$\mu^*(x)<\infty$) 简单函数$\phi=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}$ 是阶梯函数且$\|f-\phi\|_\infty<\varepsilon$.

习题31.20　如果K是度量空间X的紧子集, 则X上存在一个正则Borel测度μ, 使得$\text{Supp}(\mu)=K$.

解　设K是度量空间X的紧子集. 选取K的可数稠密子集$\{x_1,x_2,\cdots\}$(见习题7.2), 然后考虑支撑在点x_n上的Dirac测度(见习题13.4). 考虑由

$$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\delta_{x_n}(A)=\sum_{n\in\widehat{A}}2^{-n},$$

定义的测度$\mu:\mathcal{P}(X)\to[0,1]$其中$\widehat{A}=\{n\in\mathbb{N}:x_n\in A\}$.

显然, $\mu(X\backslash K)=0$. 另一方面, 如果$\mathcal{O}$是X满足$\mathcal{O}\cap K\neq\varnothing$的开子集. 则对某个$n$, 有$x_n\in\mathcal{O}$, 于是$\mu(\mathcal{O}\cap K)\geqslant 2^{-n}\delta_{x_n}(\mathcal{O}\cap K)=2^{-n}>0$.

仍然需要证明μ是正则Borel测度. 出于这个目的, 令$A\subseteq X$. 首先注意到如果$C_n=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}\cap A\subseteq A$, 则$C_n$是有限集(因此是紧集), 而且$\mu(C_n)\uparrow\mu(A)$.
因此

$$\mu(A)=\sup\{\mu(C):C\text{是紧集且}C\subseteq A\}.$$

另一方面, 如果考虑开集

$$\mathcal{O}_n=X\backslash\{x_i:1\leqslant i\leqslant n\text{且}x_i\notin A\},$$

则$A\subseteq\mathcal{O}_n$且$\mu(\mathcal{O}_n)\downarrow\mu(A)$(为什么?), 因此,

$$\mu(A)=\inf\{\mu(\mathcal{O}):\mathcal{O}\text{是开集且}A\subseteq\mathcal{O}\},$$

从而证明了μ是正则Borel测度.

习题31.21　如果$\{f_n\}$是$L_2(\mu)$中范数有界的序列, 证明$f_n/n\to 0$ a. e. .

解　设对所有的n, 序列$\{f_n\}\subseteq L_2(\mu)$满足$\int(f_n)^2\mathrm{d}\mu\leqslant C$, 其中$C>0$是常数, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\left(\frac{f_n}{n}\right)^2\mathrm{d}\mu\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty.$$

由Levi定理22.9的级数形式, 我们得出级数$\sum_{n=1}^{\infty}(f_n/n)^2$定义了一个可积函数, 因此, $f_n/n\to 0$ a.e.必然成立.

习题31.22　设$(X,\mathcal{S},\mu)$是测度空间, $\mu^*(X)=1$. 如果$f,g\in L_1(\mu)$是两个正函数, 且对几乎所有的x, $f(x)g(x)\geqslant 1$, 证明

$$\left(\int f\mathrm{d}\mu\right)\cdot\left(\int g\mathrm{d}\mu\right)\geqslant 1.$$

解　注意到函数$\sqrt{f}$和$\sqrt{g}$都属于$L_2(\mu)$且对几乎所有的x, $\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}\geqslant 1$. 应用Hölder不等式, 我们得到

$$1=\int\mathbf{1}\mathrm{d}\mu\leqslant\int\sqrt{f}\sqrt{g}\mathrm{d}\mu\leqslant\left(\int(\sqrt{f})^2\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int(\sqrt{g})^2\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}},$$

平方得到$(\int f\mathrm{d}\mu)\cdot(\int g\mathrm{d}\mu)\geqslant 1$.

习题31.23 考虑测度空间$(X,\mathcal{S},\mu)$，$\mu^*(X)=1$. 设$f,g\in L_2(\mu)$. 如果$\int f\mathrm{d}\mu=0$, 则

$$\left(\int fg\mathrm{d}\mu\right)^2\leqslant\left[\int g^2\mathrm{d}\mu-\left(\int g\mathrm{d}\mu\right)^2\right]\int f^2\mathrm{d}\mu.$$

解 令$\alpha=\int g\mathrm{d}\mu$. 利用Hölder不等式, 得

$$\begin{aligned}\left|\int fg\mathrm{d}\mu\right|&=\left|\int(fg-\alpha f)\mathrm{d}\mu\right|=\left|\int f(g-\alpha)\mathrm{d}\mu\right|\\&\leqslant\int|f||g-\alpha|\mathrm{d}\mu\leqslant\left(\int f^2\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int(g-\alpha)^2\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left(\int f^2\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int g^2\mathrm{d}\mu-2\alpha\int g\mathrm{d}\mu+\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left(\int f^2\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left[\int g^2\mathrm{d}\mu-2\left(\int g\mathrm{d}\mu\right)\left(\int g\mathrm{d}\mu\right)+\left(\int g\mathrm{d}\mu\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\&=\left(\int f^2\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left[\int g^2\mathrm{d}\mu-\left(\int g\mathrm{d}\mu\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

我们的不等式由此而来.

习题31.24 如果两个函数$f,g\in L_3(\mu)$ 满足

$$||f||_3=||g||_3=\int f^2g\mathrm{d}\mu=1,$$

则$g=|f|$ a.e..

解 设$p=3/2,q=3$, 则$1/p+1/q=1$. 显然, $f^2\in L_p(\mu)=L_{\frac{3}{2}}(\mu)$，且由于$g\in L_3(\mu)$，我们得到$f^2g\in L_1(\mu)$. 现在利用Hölder不等式, 我们得到

$$\begin{aligned}1=\left|\int f^2g\mathrm{d}\mu\right|&\leqslant\int f^2|g|\mathrm{d}\mu\leqslant||f^2||_p\cdot||g||_q\\&=\left[\int(f^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{2}{3}}\cdot||g||_3=(||f||_3)^2\cdot||g||_3=1,\end{aligned}$$

于是$\int f^2|g|\mathrm{d}\mu=||f^2||_p\cdot||g||_q=1$. 由习题31.4存在一个常数$C>0$ 使得$C|f^2|^p=|g|^q$或$C|f|^3=|g|^3$. 由$||f||_3=||g||_3=1$, 我们推出$C=1$，于是$|f|^3=|g|^3$. 因此,

$$|f|=|g|\quad\text{a.e.}\tag{★}$$

由关系式

$$\int f^2(|g|-g)\mathrm{d}\mu=\int f^2|g|\mathrm{d}\mu-\int f^2g\mathrm{d}\mu=\int|f|^3\mathrm{d}\mu-1=1-1=0$$

和$f^2(|g|-g)\geqslant 0$ a.e., 我们得出$f^2(|g|-g)=0$ a.e.. 结合(★), 后者容易得出$g=|g|=|f|$ a.e..

习题31.25　对于一个函数$f\in L_1(\mu)\cap L_2(\mu)$，证明下列性质:

(a) $f\in L_p(\mu), 1\leqslant p\leqslant 2$;

(b) $\lim\limits_{p\to 1+}\|f\|_p=\|f\|_1$.

解　设$f\in L_1(\mu)\cap L_2(\mu)$，我们不妨设$f(x)\in\mathbb{R}, x\in X$. 考虑可测集$A=\{x\in X:|f(x)|\geqslant 1\}$且定义函数$g:X\to\mathbb{R}$

$$g(x)=\begin{cases}|f(x)|^2, & x\in A\\ |f(x)|, & x\notin A\end{cases}$$

即$g=f^2\chi_A+f\chi_{A^c}$．由假设, $g\in L_1(\mu)$.

(a)　令$1\leqslant p\leqslant 2$，则不等式

$$|f(x)|^p\leqslant\begin{cases}|f(x)|^2, & x\in A\\ |f(x)|, & x\notin A\end{cases}=g(x) \qquad (\bigstar)$$

蕴含对$1\leqslant p\leqslant 2$，$f\in L_p(\mu)$．

(b)　设区间[1, 2]中的序列$\{p_n\}$满足$p_n\to 1$．由(★), 我们得到$|f|^{p_n}\leqslant g$. 由$|f|^{p_n}\to|f|$ a.e. 和Lebesgue控制收敛定理, 我们推出

$$\lim_{n\to\infty}\|f\|_{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\int|f|^{p_n}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p_n}}=\int|f|\mathrm{d}\mu=\|f\|_1.$$

上述容易推出$\lim\limits_{p\to 1+}\|f\|_p=\|f\|_1$.

习题31.26　假设正实数$0<\alpha_i<1$，$i=1,2,\cdots,n$, 且$\sum_{i=1}^n\alpha_i=1$，如果$f_1,\cdots,f_n$是某个测度空间上的正可积函数, 则

(a) $f_1^{\alpha_1}f_2^{\alpha_2}\cdots f_n^{\alpha_n}\in L_1(\mu)$;

(b) $\int f_1^{\alpha_1}f_2^{\alpha_2}\cdots f_n^{\alpha_n}\mathrm{d}\mu\leqslant(\|f_1\|_1)^{\alpha_1}(\|f_2\|_1)^{\alpha_2}\cdots(\|f_n\|_1)^{\alpha_n}$.

解　我们利用归纳法证明这个结果, 当$n=1$时, 结果是平凡的. 当$n=2$时, $f_1^{\alpha_1}\in L_{\frac{1}{\alpha_1}}(\mu)$, $f_2^{\alpha_2}\in L_{\frac{1}{\alpha_2}}(\mu)$. 由于$(\frac{1}{\alpha_1})^{-1}+(\frac{1}{\alpha_2})^{-1}=\alpha_1+\alpha_2=1$，由Hölder不等式得$f_1^{\alpha_1}f_2^{\alpha_2}\in L_1(\mu)$且

$$\int f_1^{\alpha_1}f_2^{\alpha_2}\mathrm{d}\mu\leqslant\left(\int(f_1^{\alpha_1})^{\frac{1}{\alpha_1}}\mathrm{d}\mu\right)^{\alpha_1}\left(\int(f_2^{\alpha_2})^{\frac{1}{\alpha_2}}\mathrm{d}\mu\right)^{\alpha_2}=(\|f_1\|_1)^{\alpha_1}(\|f_2\|_1)^{\alpha_2}.$$

假设结果对某个n正确. 设$f_1,f_2,\cdots,f_n,f_{n+1}$是$n+1$个可积的正函数, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$是正常数且$\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i=1$, 令$\alpha=\sum_{i=1}^n\alpha_i>0$, 则$\sum_{i=1}^n\alpha_i/\alpha=1$. 由归纳假设, 我们有$f_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha}}\cdots f_n^{\frac{\alpha_n}{\alpha}}\in L_1(\mu)$. 对$\alpha$和$1-\alpha=\alpha_{n+1}$利用$n=2$时的结果, 我们得到

$$\begin{aligned}\int f_1^{\alpha_1}\cdots f_n^{\alpha_n}f_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\mathrm{d}\mu&=\int\left(f_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha}}\cdots f_n^{\frac{\alpha_n}{\alpha}}\right)^{\alpha}f_n^{\alpha_{n+1}}\mathrm{d}\mu\\&\leqslant\left(\int f_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha}}\cdots f_n^{\frac{\alpha_n}{\alpha}}\mathrm{d}\mu\right)^{\alpha}\left(\int f_{n+1}\mathrm{d}\mu\right)^{\alpha_{n+1}}\end{aligned}$$

$$\leqslant [(\|f_1\|_1)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}}\cdots(\|f_n\|_1)^{\frac{\alpha_n}{\alpha}}]^{\alpha}\cdot(\|f_{n+1}\|_1)^{\alpha_{n+1}}$$
$$=(\|f_1\|_1)^{\alpha_1}\cdots(\|f_n\|_1)^{\alpha_n}((\|f_{n+1}\|_1)^{\alpha_{n+1}}.$$

归纳过程完毕.

习题31.27 设$(X,\mathcal{S},\mu)$是测度空间, $\{A_n\}$是可测集序列, $\mu^*(A_n)<\infty,(n=1,2,\cdots)$且$\lim\mu^*(A_n)=0$. 固定$1<p<\infty$, 令$g_n=[\mu^*(A_n)]^{-\frac{1}{q}}\chi_{A_n}(n=1,2,\cdots)$, 其中$1/p+1/q=1$. 证明对$f\in L_p(\mu)$, $\lim\int fg_n\mathrm{d}\mu=0$.

解 选定$1<q<\infty$使得$1/p+1/q=1$和$f\in L_p(\mu)$. 由Hölder不等式, 我们有

$$\left|\int fg_n\mathrm{d}\mu\right|=\left|\int(f\chi_{A_n})g_n\mathrm{d}\mu\right|$$
$$\leqslant\left(\int|f\chi_{A_n}|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int|g_n|^q\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_{A_n}|f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

由习题22.6, 我们得: $\lim\int_{A_n}|f|^p\mathrm{d}\mu=0$. 因此$\lim\int fg_n\mathrm{d}\mu=0$.

习题31.28 设$(X,\mathcal{S},\mu)$是测度空间, $\mu^*(x)=1$. 对$1<p<\infty$, 定义集合

$$\varepsilon_p=\{f\in L_1(\mu):\int|f|\mathrm{d}\mu=1\text{且}\int|f|^p\mathrm{d}\mu=2\}.$$

证明对任意$0<\varepsilon<1$, 存在某个$\delta_p>0$使得对每个$f\in\varepsilon_p$.

$$\mu^*(\{x\in X:|f(x)|>\varepsilon\})\geqslant\delta_p.$$

解 固定$0<\varepsilon<1$, 对每个$f\in\varepsilon_p$, 令

$$E_f=\{x\in X:|f(x)|>\varepsilon\},F_f=X\backslash E_f=\{x\in X:|f(x)|\leqslant\varepsilon\}.$$

由$|f|\cdot\chi_{F_f}\leqslant\varepsilon\chi_{F_f}$, 得$\int_{F_f}|f|\mathrm{d}\mu\leqslant\varepsilon\mu^*(F_f)\leqslant\varepsilon$, 于是

$$\int_{E_f}|f|\mathrm{d}\mu=\int_X|f|\mathrm{d}\mu-\int_{F_f}|f|\mathrm{d}\mu\geqslant1-\varepsilon \qquad (\bigstar)$$

现在, 注意到如果$1<q<\infty$满足$1/p+1/q=1$, 则Hölder不等式表明

$$\int_{E_f}|f|\mathrm{d}\mu\leqslant\left(\int_{F_f}|f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_{E_f}1^q\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$=\left(\int_{E_f}|f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}[\mu^*(E_f)]^{\frac{1}{q}}\leqslant2^{\frac{1}{p}}[\mu^*(E_f)]^{\frac{1}{q}}$$

($\bigstar$) 表明$1-\varepsilon\leqslant2^{\frac{1}{p}}[\mu^*(E_f)]^{\frac{1}{q}}$, 或

$$\mu^*(E_f)\geqslant\frac{(1-\varepsilon)^q}{2^{\frac{q}{p}}}=\frac{(1-\varepsilon)^q}{2^{q-1}}=2\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)^q$$

我们想要的结论由此而来.

习题31.29 设$(X,\mathcal{S},\mu)$是测度空间. 设$1\leqslant p<\infty, 0<\eta<p$.

(a) 证明非线性函数$\psi: L_p(\mu)\to L_{\frac{p}{\eta}}(\mu), \psi(f)=|f|^\eta$ 是范数连续的.

(b) 如果$f_n\to f, g_n\to g$ 在$L_p(\mu)$ 中成立, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int |f_n|^{p-\eta}|g_n|^\eta \mathrm{d}\mu=\int |f|^{p-\eta}|g|^\eta \mathrm{d}\mu.$$

解 (a) 显然ψ 把$L_p(\mu)$ 映入$L_{\frac{p}{\eta}}(\mu)$ 且是非线性的. 设f_n 在$L_p(\mu)$ 中收敛于f (即$\|f_n-f\|_p\to 0$). 反设$\psi(f_n)$ 在$L_{\frac{p}{\eta}}(\mu)$ 不收敛于$\psi(f)$. 因此, 通到转移到子列上, 我们不妨设存在某个$\varepsilon>0$, 使得

$$\|\psi(f_n)-\psi(f)\|_{\frac{p}{\eta}}=\left(\int \left||f_n|^\eta-|f|^\eta\right|^{\frac{p}{\eta}}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{\eta}{p}}\geqslant\varepsilon \qquad (\bigstar\bigstar)$$

现在, 通过再次转移到子列, 我们不妨设存在某个函数$0\leqslant g\in L_p(\mu)$ 使得$|f_n|\leqslant g$ μ -a.e. 对所有n成立, 且$f_n\to f$ a.e.; 见引理31.6. 因此关系式

$$\left||f_n|^\eta-|f|^\eta\right|^{\frac{p}{\eta}}\leqslant(|g|^\eta+|f|^\eta)^{\frac{p}{\eta}}\in L_1(\mu) \text{ 和 } \left||f_n|^\eta-|f|^\eta\right|^{\frac{p}{\eta}}\to 0\text{a.e.}$$

结合Lebesgue控制收敛定理蕴含着$\int\left||f_n|^\eta-|f|^\eta\right|^{\frac{p}{\eta}}\mathrm{d}\mu\to 0$, 与$(\bigstar\bigstar)$ 矛盾. 因此非线性映射ψ是范数连续的.

(b) 由(a) 知, 两个线性函数$\psi_1: L_p(\mu)\to L_{\frac{p}{p-\eta}}(\mu), \psi_1(u)=|u|^{p-\eta}$和$\psi_2: L_p(\mu)\to L_{\frac{p}{\eta}}(\mu)$, $\psi_2(v)=|v|^\eta$. 都是范数连续的. 因此,

$$\left\||f_n|^{p-\eta}-|f|^{p-\eta}\right\|_{\frac{p}{p-\eta}}\to 0, \left\||g_n|^\eta-|g|^\eta\right\|_{\frac{p}{\eta}}\to 0.$$

观察到$\left(L_{\frac{p}{p-\eta}}(\mu)\right)^*=L_{\frac{p}{\eta}}(\mu)$, 因此, 由对偶性$< L_{\frac{p}{p-\eta}}(\mu), L_{\frac{p}{\eta}}(\mu)>$, 知

$$\int |f_n|^{p-\eta}|g_n|^\eta \mathrm{d}\mu=<|f_n|^{p-\eta},|g_n|^\eta>\to<|f|^{p-\eta},|g|^\eta>=\int |f|^{p-\eta}|g|^\eta \mathrm{d}\mu.$$

得证.

习题31.30 设$T: L_p(\mu)\to L_p(\mu)$ 是连续算子, 其中$1<p<\infty$. 令$0\leqslant\eta\leqslant p$. 证明:

(a) 如果$f\in L_p(\mu)$, 则$|f|^{p-\eta}|Tf|^\eta\in L_1(\mu)$且

$$\int |f|^{p-\eta}|Tf|^\eta \mathrm{d}\mu\leqslant\|T\|^\eta(\|f\|_p)^p.$$

(b) 如果对某个$f\in L_p(\mu), \|f\|_p\leqslant 1$, 我们有$\int |f|^{p-\eta}|Tf|^\eta\mathrm{d}\mu=\|T\|^\eta$,则$|Tf|=\|T\|\cdot|f|$.

解 设T,η 和f 满足习题中给出的条件.

(a) 如果$\eta=0$或$\eta=p$, 则所要证明的不等式显然. 因此, 假设$0<\eta<p$, 考虑共轭指数$r=\frac{p}{p-\eta}$和$s=(1-\frac{1}{r})^{-1}=\frac{p}{\eta}$.

由于$|f|^{p-\eta} \in L_r(\mu), |Tf|^\eta \in L_s(\mu)$, 所以$|f|^{p-\eta}|Tf|^\eta \in L_1(\mu)$. 对r和s应用Hölder不等式, 得到

$$\begin{aligned}\int |f|^{p-\eta}|Tf|^\eta \mathrm{d}\mu &\leqslant \left[\int (|f|^{p-\eta})^{\frac{p}{p-\eta}} \mathrm{d}\mu\right]^{\frac{p-\eta}{p}} \cdot \left[\int (|Tf|^\eta)^{\frac{p}{\eta}} \mathrm{d}\mu\right]^{\frac{\eta}{p}} \\ &= \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{p-\eta}{p}} \cdot \left(\int |Tf|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{\eta}{p}} \\ &= (||f||_p)^{p-\eta}(||Tf||_p)^\eta \leqslant (||f||_p)^{p-\eta}||T||^\eta(||f||_p)^\eta \\ &= ||T||^\eta(||f||_p)^p.\end{aligned}$$

(b) 假设$f \in L_p(\mu)$, $||f||_p \leqslant 1$ 且$\int |f|^{p-\eta}|Tf|^\eta \mathrm{d}\mu = ||T||^\eta$. 由Hölder不等式, 得:

$$\begin{aligned}||T||^\eta = \int |f|^{p-\eta}|Tf|^\eta \mathrm{d}\mu &\leqslant |||f|^{p-\eta}||_r \cdot |||Tf|^\eta||_s \\ &= (||f||_p)^{p-\eta}(||Tf||_p)^\eta \leqslant ||T||^\eta.\end{aligned}$$

因此, $\int |f|^{p-\eta}|Tf|^\eta \mathrm{d}\mu = |||f|^{p-\eta}||_r \cdot |||Tf|^\eta||_s$; 由习题31.4, 存在一个常数$c \geqslant 0$, 使得$(|Tf|^\eta)^s = c \cdot (|f|^{p-\eta})^r$ 或$|Tf|^p = c|f|^p$.
因此, $|Tf| = \lambda|f|$对某个$\lambda \geqslant 0$ 成立. 这意味着$\lambda||f||_p = ||Tf||_p \leqslant ||T|| \cdot ||f||_p$, 因此$\lambda \leqslant ||T||$.
而且由

$$||T||^\eta = \int |f|^{p-\eta}|Tf|^\eta \mathrm{d}\mu = \int |f|^{p-\eta}\lambda^\eta|f|^\eta \mathrm{d}\mu \leqslant \lambda^\eta,$$

我们得到$||T|| \leqslant \lambda$. 因此$\lambda = ||T||$, 从而$|Tf| = ||T|| \cdot |f|$.

习题31.31 设$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间, $f \in L_p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, 证明由

$$g(t) = pt^{p-1}\mu^*(\{x \in X : |f(x)| \geqslant t\})$$

定义的函数$g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ 是$[0, \infty)$ 上Lebesgue可积的, 而且

$$\int |f|^p \mathrm{d}\mu = \int_{[0,\infty)} g(t)\mathrm{d}\lambda(t) = p\int_0^\infty t^{p-1}\mu^*(\{x \in X : |f(x)| \geqslant t\})\mathrm{d}t.$$

解 设$f \in L_p(\mu)$. 我们将假设$f(x) \in \mathbb{R}$. 令$T = [0, \infty)$, 考虑乘积测度空间$T \times X$. 令

$$A = \{(t, x) \in T \times X : 0 \leqslant t \leqslant |f(x)|\},$$

则(由习题26.8) 集合A 是$\mu \times \lambda$ 可测的. 现在, 考虑由

$$h(t, x) = \begin{cases} pt^{p-1}, & 0 \leqslant t \leqslant |f(x)| \\ 0, & t > |f(x)| \end{cases} = pt^{p-1}\chi_A(t, x)$$

定义的函数$h : T \times X \to [0, \infty)$, 此外, 我们有

$$\int_X \left[\int_T h(t, x)\mathrm{d}\lambda(t)\right] \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \left[\int_T pt^{p-1}\chi_A(t, x)\mathrm{d}\lambda(t)\right] \mathrm{d}\mu(x)$$

$$= \int_X \left[\int_0^{|f(x)|} pt^{p-1} \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\mu(x)$$
$$= \int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) < \infty.$$

由Tonneli定理(定理26.7)，函数h在$T \times X$ 上可积, 且

$$\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) = \int_T \left[\int_X h(t,x) \mathrm{d}\mu(x) \right] \mathrm{d}\lambda(t) \tag{★}$$

令$E_t = \{x \in X : |f(x)| \geqslant t\}$ 且注意到

$$\int_X h(t,x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{E_t} pt^{p-1} \mathrm{d}\mu(x) = pt^{p-1}\mu^*(E_t).$$

由Fubini定理(定理26.6)，我们知函数

$$t \mapsto pt^{p-1}\mu^*(E_t)$$

在$[0,\infty)$ 上可积且由(★) 我们得到

$$\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) = p \int_T t^{p-1}\mu^*(E_t) \mathrm{d}\lambda(t) = p \int_0^\infty t^{p-1}\mu^*(E_t) \mathrm{d}t.$$

由函数$t \to \mu^*(E_t)$ 是递减的, 我们得出Lebesgue积分$\int_T t^{p-1}\mu^*(E_t)\mathrm{d}\lambda(t)$ 也是非正常Riemann积分, 因此除开至多可数个t以外是连续的.

习题31.32 设$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间, $f : X \to \mathbb{R}$ 是可测函数. 如果$t \geqslant 0$ 时, $\mu^*(\{x \in X : |f(x)| \geqslant t\}) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$，则对每个$1 \leqslant p < \infty, f \in L_p(\mu)$.

解 令$g(t) = \mu^*(\{x \in X : |f(x)| \geqslant t\}), t \geqslant 0$．考虑到习题31.31, 我们必须证明$\int_0^\infty t^{p-1}g(t)\mathrm{d}\lambda(t) < \infty$．由于对所有的$t \geqslant 0, 0 \leqslant g(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$，所以只需证明$\int_0^\infty t^{p-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t < \infty$.

为证明这一点, 首先从L'Hôpital法则得:

$$\lim_{t\to\infty} t^{p-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{p-1}}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}} = 0,$$

因此, 存在某个$M > 0$，使得$0 \leqslant t^{p-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \leqslant M, t \geqslant 0$. 所以,

$$0 \leqslant \int_0^\infty t^{p-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{p-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\infty M\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = 2M < \infty$$

得证.

习题31.33 考虑函数向量空间

$$E = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} | f\text{是具有紧支集的}C^\infty\text{函数且}\int_{\mathbb{R}^n} f\mathrm{d}\lambda = 0\}.$$

证明对$1 < p < \infty$，向量空间E 在$L_p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密. E 在$L_1(\mathbb{R}^n)$ 中稠密吗?

解 我们将在$n=1$ 这个特殊情形下证明该结果. 一般情形(具体细节参见习题25.3) 留给读者. 证明基于以下性质: 如果$1<p<\infty, \varepsilon>0, h>0$, 给定正整数$n$, 那么存在一个$C^\infty$ 函数$\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得

1. $\mathrm{Supp}\phi$ 是紧集且$\mathrm{Supp}\phi\subseteq[n,\infty)$;
2. $0\leqslant\phi(x)\leqslant h, x\in;\mathbb{R}$
3. $\int_{\mathbb{R}}\phi\mathrm{d}\lambda=1$;
4. $||\phi||_p=(\int_{\mathbb{R}}\phi^p\mathrm{d}\lambda)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$.

为证明这些, 假定$1<p<\infty, \varepsilon>0, h>0$, 给定正整数$n$, 如果$k$ 是任意正整数, 则(由习题25.3) 存在一个C^∞ 函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得

a. $\mathrm{Supp}f\subseteq[n,n+k+2]$;

b. $0\leqslant f(x)\leqslant 1, x\in\mathbb{R}$且$f(x)=1, x\in[n+1,n+k+1]$.

如果$c=\int_{\mathbb{R}}f\mathrm{d}\lambda>0$, 则$C^\infty$ 函数$\phi=\frac{1}{c}f$ 满足$\mathrm{Supp}\phi\subseteq[n,n+k+2]\subseteq[n,\infty)$, $\int_{\mathbb{R}}\phi\mathrm{d}\lambda=1$ 且(考虑到$c=\int_{\mathbb{R}}f\mathrm{d}\lambda\geqslant\int_{n+1}^{n+k+1}\mathbf{1}\mathrm{d}x=k$)$0\leqslant\phi(x)\leqslant 1/k, x\in\mathbb{R}$. 而且我们有

$$||\phi||_p=\left(\int_{\mathbb{R}}\phi^p\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left[\int_n^{n+k+2}(\frac{1}{k})^p\mathrm{d}\lambda\right]^{\frac{1}{p}}=\frac{(k+2)^{\frac{1}{p}}}{k}=\left(\frac{k+2}{k}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot k^{\frac{1}{p}-1}.$$

由于$1<p<\infty$, 我们有$\lim\limits_{k\to\infty}(\frac{k+2}{k})^{\frac{1}{p}}k^{\frac{1}{p}-1}=0$, 因此$k$ 充分大时将给出具有所要求的性质的函数ϕ.

为完成证明, 设$f\in L_p(\mathbb{R}), \varepsilon>0$. 正如习题25.5(b) 的处理方式一样(怎么做到?), 存在具有紧支集的C^∞ 函数g, 使得$||f-g||_p<\varepsilon$. 如果$m=\int_{\mathbb{R}}g\mathrm{d}\lambda=0$, 则$g\in E$, 完成证明. 因此, 假设$m\neq 0$, 选取正整数$n$, 使得$\mathrm{Supp}g\cap[0,\infty)=\phi$, 然后(由前面的讨论) 选取一个具有紧支集的$C^\infty$ 函数使得:

i. $\mathrm{Supp}\phi\subseteq[n,\infty)$.

ii. $\phi(x)\geqslant 0, x\in\mathbb{R}$

iii. $\int_{\mathbb{R}}\phi\mathrm{d}\lambda=1$

iv. $||\phi||_p=(\int_{\mathbb{R}}\phi^p\mathrm{d}\lambda)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{|m|}$.

现在, 考虑函数$\psi=g-m\phi$, 注意到$\psi\in E$ 且

$$\begin{aligned}||f-\psi||_p=&||(f-g)+m\phi||_p\leqslant||f-g||_p+|m|\cdot||\phi||_p\\&<\varepsilon+|m|\cdot||\phi||_p<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.\end{aligned}$$

因此, E 在$L_p(\mathbb{R})$ 上稠密.

向量空间E 在$L_1(\mathbb{R})$ 中不稠密. 比如考虑函数$f=\chi_{[0,1]}\in L_1(\mathbb{R})$, 如果$\phi\in L_1(\mathbb{R})$且$\int|f-\phi|\mathrm{d}\lambda<1/2$, 则由

$$1-\int_{\mathbb{R}}\phi\mathrm{d}\lambda=\int_{\mathbb{R}}(f-\phi)\mathrm{d}\lambda\leqslant\int_{\mathbb{R}}|f-\phi|\mathrm{d}\lambda<\frac{1}{2}$$

得知$\int_{\mathbb{R}}\phi\mathrm{d}\lambda>1-1/2=1/2$, 因此$\phi\notin E$. 这表明$E$ 在$L_1(\mathbb{R})$ 中不稠密.

习题31.34　设$(0,\infty)$ 配备有Lebesgue测度, $1<p<\infty$，对$f\in L_p(\lambda)$, 令

$$T(f)(x)=x^{-1}\int f\chi_{(0,x)}\mathrm{d}\lambda, x>0$$

证明T 定义了$L_p(0,\infty)$ 到自身的一一有界线性算子且$||T||=p/(p-1)$.

解　为简单起见, 我们记$T(f)$ 为Tf，考虑任意函数$0\leqslant f\in C_c((0,\infty))$. 选择某个$M>0$ 使得$0\leqslant f(x)\leqslant M, x>0$.

如果$I=\int_o^\infty f(t)\mathrm{d}t$，则函数

$$g(x)=\begin{cases} M, & 0<x\leqslant 1,\\ \dfrac{I}{x}, & x>1,\end{cases}$$

属于$L_p(0,\infty)$. 由于$0\leqslant Tf\leqslant g$，所以$Tf\in L_p(0,\infty)$. 而且考虑到不等式

$$0\leqslant x\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^p=x[Tf(x)]^p\leqslant x[g(x)]^p,$$

可以得出$x(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t)^p|_0^\infty=0$.

利用分部积分和Hölder不等式, 我们得到

$$\begin{aligned}(||Tf||_p)^p&=\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^p dx=\frac{1}{1-p}\int_0^\infty\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^p\mathrm{d}(x^{1-p})\\&=\frac{1}{1-p}\left[x\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^p|_0^\infty-p\int_0^\infty f(x)\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^{p-1}\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{p}{p-1}\int_0^\infty f(x)[Tf(x)]^{p-1}\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{p}{p-1}||f||_p\left(\int_0^\infty[Tf(x)]^{q(p-1)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\frac{p}{p-1}||f||_p\cdot(||Tf||_p)^{\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

这表明$||Tf||_p\leqslant\frac{p}{p-1}||f||_p, f\in C_c(0,\infty)$, 换句话说,

$$T:C_c((0,\infty))\to L_p((0,\infty))$$

定义了一个连续算子使得$||T||\leqslant p/(p-1)$,

由于$C_c((0,\infty))$ 在$L_p((0,\infty))$ 上范数稠密(定理31.11), 所以T 能够唯一开拓成为$L_p((0,\infty))$ 上的连续(线性) 算子T^*，使得$||T^*||\leqslant p/(p-1)$. 我们的下一个目标是要证明对所有$f\in L_p((0,\infty))$ 和$x>0$，$T^*f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}\lambda(t)=Tf(x)$.

为实现这个目标, 设$0\leqslant\phi$ 为阶梯函数. 选取某个$C>0$ 使得$0\leqslant\phi(x)\leqslant C, x>0$. 由定理31.11, 存在$C_c((0,\infty))$ 中的一个序列$\{f_n\}$ 使得$\lim\int|f_n-\phi|^p\mathrm{d}\lambda=0$. 我们不妨假设$\lim f_n(x)=\phi(x)$ 对几乎所有的x 成立(见引理31.6) . 考虑到

$$|f_n\wedge C-\phi|=|f_n\wedge C-\phi\wedge C|\leqslant|f_n-C|,$$

用$\{f_n \wedge C\}$ 代替$\{f_n\}$ ，我们不妨设$0 \leqslant f_n(x) \leqslant C$ 对几乎所有的$x > 0$ 和n 成立. 由于$\lim ||Tf_n - T^*\phi||_p = 0$, 我们不妨设$Tf_n(x) \to T^*\phi(x)$ a.e., 然后, 由于对每一个固定的$x > 0, \phi \in L_1((0,x))$, 因此, 由Lebesgue控制收敛定理, 我们得到

$$T^*\phi(x) = \lim_{n\to\infty} Tf_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}\lambda(t) = \frac{1}{x}\int_0^x \phi(t)\mathrm{d}\lambda(t)$$

对几乎所有的x 成立. 现在, 令$0 \leqslant f \in L_p((0,\infty))$. 选择阶梯函数列$\{\phi_n\}$ ，使得$0 \leqslant \phi_n \uparrow f$. 由于$\lim ||T^*\phi_n - T^*f||_p = 0$ ，不妨设$T^*\phi_n(x) \to T^*f(x)$ 对几乎所有的x 成立. 考虑到对每个固定的$x > 0$ ，$f \in L_p((0,x)) \subseteq L_1((0,x))$, Lebesgue控制收敛定理表明

$$T^*f(x) = \lim_{n\to\infty} T^*\phi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \phi_n(t)\mathrm{d}\lambda(t) = \frac{1}{x}\int_o^x f(t)\mathrm{d}\lambda(t).$$

对几乎所有的x 成立, 因此$T^* = T$.

接下来, 我们将要证明$||T|| = p/(p-1)$. 我们早已经得出$||T|| \leqslant p/(p-1)$. 于是, 必须证明$T \geqslant p/(p-1)$. 令

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{(n^{-1}-1)p^{-1}}, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

则$(||f_n||_p)^p = \int_0^1 x^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}x = n$, 而且

$$Tf_n(x) = \frac{np}{1+n(p-1)}\begin{cases} x^{(n^{-1}-1)p^{-1}} & 0 < x < 1, \\ x^{-1} & x \geqslant 1. \end{cases}$$

因而, 我们有

$$\begin{aligned}(||Tf_n||_p)^p &= \int_o^\infty |Tf_n(x)|^p\mathrm{d}\lambda(x) = \left[\frac{np}{1+n(p-1)}\right]^p \cdot \left[\int_0^1 x^{n^{-1}-1}\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^{-p}\mathrm{d}x\right] \\ &= \left[\frac{np}{1+n(p-1)}\right]^p \cdot \left(n + \frac{1}{p-1}\right),\end{aligned}$$

于是$\frac{np}{1+n(p-1)}[n + \frac{1}{p-1}]^{\frac{1}{p}} = ||Tf_n||_p \leqslant ||T|| \cdot ||f_n||_p = ||T|| \cdot n^{\frac{1}{p}}$, 这表明$||T|| \geqslant \frac{p}{p-1+\frac{1}{n}}[1 + \frac{1}{n(p-1)}]^{\frac{1}{p}} \to \frac{p}{p-1}$, 由此得出$||T|| \geqslant \frac{p}{p-1}$.

最后, 我们证明T 是一一的, 假设$Tf = 0, f \in L_p((0,\infty))$, 则$\int_0^x f(t)\mathrm{d}\lambda(t) = 0$ 对几乎所有$x > 0$ 成立. 由习题22.19, 我们推出$f = 0$ a.e., 因此算子T 是一一的.

第6章　Hilbert空间

32. 内积空间

习题32.1　设$c_1, c_2, \cdots c_n$ 是n个(严格)大于零的实数. 证明双变量函数$(\cdot,\cdot)$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i y_i$是$\mathbb{R}^n$ 上的内积.

解　考虑$\mathbb{R}^n$中所有向量$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \cdots y_n), \boldsymbol{z} = (z_1, \cdots z_n)$, 我们有

$$(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^n c_i(\alpha x_i + \beta y_i) z_i = \alpha\sum_{i=1}^n c_i x_i z_i + \beta\sum_{i=1}^n c_i y_i z_i = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \beta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i y_i = \sum_{i=1}^n c_i y_i x_i = (y, x)$$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 \geqslant 0.$$

而且,$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 = 0$ 隐含着$c_i x_i^2 = 0, i = 1, 2, \cdots n$. 因此(由于每个$c_i > 0$)$x_i = 0, i = 1, 2, \cdots n$, 即$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 以上证明了函数$(\cdot,\cdot)$ 是$\mathbb{R}^n$ 上的内积.

习题32.2　设$(X, (\cdot,\cdot))$ 是实内积空间, $X_{\mathbb{C}}$ 是它的复化空间. 证明由公式

$$< x + \mathrm{i}y, x_1 + \mathrm{i}y_1 >= (x, x_1) + (y, y_1) + \mathrm{i}[(y, x_1) - (x, y_1)]$$

定义的函数$<\cdot,\cdot>$: $X_{\mathbb{C}} \times X_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ 是$X_{\mathbb{C}}$ 上的内积. 而且由$X_{\mathbb{C}}$ 上的内积诱导的范数为$||x + \mathrm{i}y|| = \sqrt{(x, x) + (y, y)} = (||x||^2 + ||y||^2)^{\frac{1}{2}}$.

解　设$x_1 + \mathrm{i}y_1, x_2 + \mathrm{i}y_2, x_3 + \mathrm{i}y_3 \in X_{\mathbb{C}}$. 我们验证内积的性质.

1. (可加性)

$$\begin{aligned}
&\langle (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2), x_3 + \mathrm{i}y_3 \rangle \\
=&(x_1 + x_2 + \mathrm{i}(y_1 + y_2), x_3 + \mathrm{i}y_3) \\
=&(x_1 + x_2, x_3) + (y_1 + y_2, y_3) + \mathrm{i}[(y_1 + y_2, x_3) - (x_1 + x_2, y_3)] \\
=&(x_1, x_3) + (y_1, y_3) + \mathrm{i}[(y_1, x_3) - (x_1, y_3)] + ((x_2, x_3) + (y_2, y_3) + \mathrm{i}[(y_2, x_3) - (x_2, y_3)]) \\
=&\langle x_1 + \mathrm{i}y_1, x_3 + \mathrm{i}y_3 \rangle + \langle x_2 + \mathrm{i}y_2, x_3 + \mathrm{i}y_3 \rangle.
\end{aligned}$$

2. (齐性)

$$\langle (\alpha + \mathrm{i}\beta)(x_1 + \mathrm{i}y_1), x_2 + \mathrm{i}y_2 \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle \alpha x_1 - \beta y_1 + \mathrm{i}(\beta x_1 + \alpha y_1), x_2 + \mathrm{i}y_2 \rangle \\
&=(\alpha x_1 - \beta y_1, x_2) + (\beta x_1 + \alpha y_1, y_2) + \mathrm{i}[(\beta x_1 + \alpha y_1, x_2) - (\alpha x_1 - \beta y_1, y_2)] \\
&=(\alpha + \mathrm{i}\beta)[(x_1, x_2) + (y_1, y_2) + \mathrm{i}[(y_1, x_2) - (x_1, y_2)]] \\
&=(\alpha + \mathrm{i}\beta) \langle x_1 + \mathrm{i}y_1, x_2 + \mathrm{i}y_2 \rangle .
\end{aligned}
$$

3. (共轭线性性)

$$
\begin{aligned}
\overline{\langle x_1 + \mathrm{i}y_1, x_2 + \mathrm{i}y_2 \rangle} &= \overline{(x_1, x_2) + (y_1, y_2) + \mathrm{i}[(y_1, x_2) - (x_1, y_2)]} \\
&= (x_1, x_2) + (y_1, y_2) + \mathrm{i}[(x_1, y_2) - (y_1, x_2)] \\
&= (x_2, x_1) + (y_2, y_1) + \mathrm{i}[(y_2, x_1) - (x_2, y_1)] \\
&= \langle x_2 + \mathrm{i}y_2, x_1 + \mathrm{i}y_1 \rangle .
\end{aligned}
$$

4. (正定性)

$$\langle x_1 + \mathrm{i}y_1, x_1 + \mathrm{i}y_1 \rangle = (x_1, x_1) + (y_1, y_1) \geqslant 0.$$

而且, $\langle x_1 + \mathrm{i}y_1, x_1 + \mathrm{i}y_1 \rangle = (x_1, x_1) + (y_1, y_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 + \mathrm{i}y_1 = 0.$

习题32.3 设Ω 是紧致的Hausdorff拓扑空间, μ 是Ω 上的正则Borel测度且Supp $\mu = \Omega$. 证明函数$(\cdot,\cdot) : C(\Omega) \times C(\Omega) \to \mathbb{R}, (f, g) = \int_\Omega fg\mathrm{d}\mu$ 是内积, 并描述$C(\Omega)$ 的复化空间及内积到$C(\Omega)$ 的复化空间上的开拓.

解 如果$f, g, h \in C(\Omega), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则

$$
\begin{aligned}
&(\alpha f + \beta g, h) = \textstyle\int_\Omega (\alpha f + \beta g)h\mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega fh\mathrm{d}\mu + \beta \int_\Omega gh\mathrm{d}\mu = \alpha(f, h) + \beta(g, h); \\
&(f, g) = \textstyle\int_\Omega fg\mathrm{d}\mu = \int_\Omega gf\mathrm{d}\mu =(g, f); \\
&(f, f) = \textstyle\int_\Omega f^2\mathrm{d}\mu \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

而且, 函数$f \in C(\Omega)$ 满足

$$(f, f) = \int_\Omega f^2\mathrm{d}\mu \Leftrightarrow f = 0.$$

$C(\Omega)$ 的复化空间$C_c(\Omega)$ 由所有复值函数$f + \mathrm{i}g, f, g \in C(\Omega)$ 组成. 复内积为

$$< f, g >= \int_\Omega f\overline{g}\mathrm{d}\mu, \quad f, g \in C_c(\Omega).$$

习题32.4 证明Cauchy-Schwarz不等式中的等号(即, $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| = ||\boldsymbol{x}||\ ||\boldsymbol{y}||$) 成立当且仅当$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$是线性相关的向量.

解 假设$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| = ||\boldsymbol{x}||\ ||\boldsymbol{y}||$. 如果$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 则结论显然. 于是, 设$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. 令$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 用$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\boldsymbol{x}$ 替代$\boldsymbol{x}$, 不失一般性, 我们不妨设$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = r \geqslant 0$, 因此$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| = ||\boldsymbol{x}||\ ||\boldsymbol{y}||$. 注意到对每个λ , 我们有

$$0 \leqslant (\lambda \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \lambda \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda^2||\boldsymbol{x}||^2 + \lambda[(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}] + ||\boldsymbol{y}||^2$$

$$= \lambda^2||x||^2 + 2\lambda(x,y) + ||y||^2$$
$$= \lambda^2||x||^2 + 2\lambda||x||\ ||y|| + ||y||^2$$
$$= (\lambda||x|| + ||y||)^2.$$

因此, 如果$\lambda = -||y||/||x||$, 则$(\lambda x + y, \lambda \mathrm{x} + y) = 0$ 或$\lambda x + y = 0$, 这表明$||y||x - ||x||y = 0$, 从而证明了向量x和y是线性无关的.

如果x和y线性无关, 则方程$|(x,y)| = ||x||\ ||y||$ 是显然的.

习题32.5　如果x 是内积空间中的一个向量, 证明$||x|| = \sup\limits_{||y||=1} |(x,y)|$.

解　如果$x = \mathbf{0}$, 结论显然成立. 因此, 我们考虑$x \neq \mathbf{0}$ 的情形. 如果$||y|| = 1$, 则Cauchy-Schwarz不等式表明$|(x,y)| \leqslant ||x|| \cdot ||y|| \leqslant ||x||$. 因此, 我们有

$$\sup_{||y||=1} |(x,y)| \leqslant ||x||.$$

至于相反的不等式, 令$z = x/\|x\|$,则$\|z\| = 1$, 因此

$$\sup_{||y||=1} |(x,y)| \geqslant |(x,z)| = |(x, x/\|x\|)| = (x,x)/\|x\| = ||x||.$$

因此, $||x|| = \sup_{||y||=1} |(x,y)|$, 且上确界实际上是最大值.

习题32.6　证明在实内积空间中, $x \perp y$ 当且仅当$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$. 在复内积空间中, $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ 是否蕴含着$x \perp y$?

解　设x 和y 是实内积空间中的两个向量, 如果$x \perp y$, 则Pythagorean定理给出了$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$. 反过来, 如果$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$, 则由

$$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y)$$
$$= ||x||^2 + (x,y) + (y,x) + ||y||^2$$
$$= ||x||^2 + 2(x,y) + ||y||^2$$

得出$2(x,y) = 0$, 因此$x \perp y$.

在复内积空间, Pythagorean等式$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ 并不蕴含$x \perp y$. 为说明这一点, 考虑一非零向量x 且令$y = \mathrm{i}x$. 显然, $||y||^2 = (\mathrm{i}x, \mathrm{i}x) = ||x||^2$. 现注意到

$$||x+y||^2 = ||x + \mathrm{i}x||^2 = ||(1+\mathrm{i})x||^2 = |1+\mathrm{i}|^2||x||^2 = 2||x||^2 = ||x||^2 + ||y||^2,$$

而$(x,y) = (x, \mathrm{i}x) = -\mathrm{i}||x||^2 \neq 0$.

习题32.7　假设内积空间中的序列$\{x_n\}$ 满足$(x_n, x) \to ||x||^2$ 和$||x_n|| \to ||x||$. 证明$x_n \to x$.

解　注意到$(x_n, x) \to ||x||^2$ 蕴含着$(x, x_n) = \overline{(x_n, x)} \to \overline{||x||^2} = ||x||^2$, 因此由

$$||x_n - x||^2 = (x_n - x, x_n - x)$$
$$= ||x_n||^2 - (x, x_n) - (x_n, x) + ||x||^2$$

$$\to ||\boldsymbol{x}||^2 - ||\boldsymbol{x}||^2 - ||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{x}||^2 = 0$$

得出$||\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}|| \to 0$, 即$\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}$.

习题32.8 设S是内积空间的正交子集. 证明存在完全正交子集C使得$S \subseteq C$.

解 设S是内积空间X的正交子集. 令$\mathcal{C}$表示包含S的所有正交子集的全体, 即X的正交子集A属于$\mathcal{C}$当且仅当$S \subseteq A$. 如果我们考虑$\mathcal{C}$是由包含关系$\subseteq$ 确定的偏序集, 则容易看出$\mathcal{C}$满足Zorn引理的假设. 因此, $\mathcal{C}$的任何极大元C是满足$S \subseteq C$ 的完备正交集.

习题32.9 证明以下的Barach空间的范数不能由内积诱导出来.

(a) $\mathbb{R}^n$上的范数$||\boldsymbol{x}|| = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}$;

(b) $C[a,b]$ 上的上确界范数;

(c) $L_p(\mu)$ 空间上的L_p 范数, 其中$1 \leqslant p < \infty$ 且$p \neq 2$.

解 (a) 考虑向量$\boldsymbol{x} = (1, 0, \cdots, 0)$和$\boldsymbol{y} = (0, 1, 0, \cdots, 0)$. 显然,

$$||\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{y}|| = ||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| = 1,$$

因此,

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 + ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||^2 = 2, 2||\boldsymbol{x}||^2 + 2||\boldsymbol{y}||^2 = 4.$$

因此$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 + ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||^2 \neq 2||\boldsymbol{x}||^2 + 2||\boldsymbol{y}||^2$, 从而范数$||\cdot||$ 不满足平行四边形法则, 这就证明了范数$||\cdot||$ 不能由内积诱导得来.

(b) 我们将证明上确界范数$||\cdot||$ 不满足平行四边形法则——这说明上确界范数不能由内积诱导出来. 为证明这一点, 考虑函数$\mathbf{1}$ (常数函数$\mathbf{1}$)和$f : [a, b] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-a}{b-a}$. 现在注意到

$$||\mathbf{1}||_\infty = ||f||_\infty = 1, ||\mathbf{1} + f||_\infty = 2, ||\mathbf{1} - f||_\infty = 1.$$

因此,

$$(||\mathbf{1} + f||_\infty)^2 + (||\mathbf{1} - f||_\infty)^2 = 5 \neq 4 = 2(||\mathbf{1}||_\infty)^2 + 2(||f||_\infty)^2,$$

因此范数$||\cdot||_\infty$ 不满足平行四边形法则.

(c) 假设有两个不相交的可测集E, F, 它们满足$0 < \mu^*(E) < \infty, 0 < \mu^*(F) < \infty$. 首先, 我们考虑$p = \infty$ 的情形. 然后注意到

$$||\chi_E||_\infty = ||\chi_F||_\infty = 1, ||\chi_E + \chi_F||_\infty = ||\chi_E - \chi_F||_\infty = 1,$$

因此,

$$(||\chi_E + \chi_F||_\infty)^2 + (||\chi_E - \chi_F||_\infty)^2 = 2 \neq 4 = 2(||\chi_E||_\infty)^2 + 2(||\chi_F||_\infty)^2,$$

这表明范数$||\cdot||_\infty$ 不满足平行四边形法则, 从而不能由一个内积诱导得来.

现在, 考虑$1 \leqslant p < \infty$ 且$p \neq 2$ 的情形. 函数$f = [\mu^*(E)]^{-\frac{1}{p}}\chi_E$ 和$g = [\mu^*(F)]^{-\frac{1}{p}}\chi_F$ 满足$||f||_p = ||g||_p = 1$, 因此,

$$2(||f||_p)^2 + 2(||g||_p)^2 = 4 = 2^2.$$

由$|f+g|^p=|f-g|^p=|f|^p+|g|^p$，我们得出

$$(||f+g||_p)^2+(||f-g||_p)^2=(2^{\frac{1}{p}})^2+(2^{\frac{1}{p}})^2=2(2^{\frac{1}{p}})^2=2^{1+\frac{2}{p}}$$

由于$p\neq 2$，我们有$2^{1+\frac{2}{p}}\neq 2^2$, 因此

$$(||f+g||_p)^2+(||f-g||_p)^2\neq 2(||f||_p)^2+2(||g||_p)^2.$$

这表明范数$||\cdot||_p$不满足平行四边形法则, 因此不能由某个内积诱导出来.

习题32.10　证明复向量空间的范数$||\cdot||$由一个内积诱导得来当且仅当它满足平行四边形法则, 即当且仅当

$$||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2+||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2=2(||\boldsymbol{x}||^2+||\boldsymbol{y}||^2)$$

对所有的$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$成立. 更进一步, 证明如果$||\cdot||$满足平行四边形法则, 则诱导$||\cdot||$的内积$(\cdot,\cdot)$由下面的式子给出:

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{4}(||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2-||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2+\mathrm{i}||\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y}||^2-\mathrm{i}||\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\boldsymbol{y}||^2).$$

解　如果$||\cdot||$由内积$(\cdot,\cdot)$诱导, 则对所有的$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$, 我们有

$$\begin{aligned}||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2+||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2&=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\&=[(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})]\\&\quad+[(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})]\\&=2||\boldsymbol{x}||^2+2||\boldsymbol{y}||^2.\end{aligned}$$

另一方面, 假设范数$||\cdot||$满足平行四边形法则. 考虑由

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{4}(||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2-||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2+\mathrm{i}||\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y}||^2-\mathrm{i}||\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\boldsymbol{y}||^2)$$

定义的复值函数$(\cdot,\cdot)$. 显然, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=||\boldsymbol{x}||^2$. 为完成解答, 我们将证明$(\cdot,\cdot)$是复内积. 首先注意到

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})&=\frac{1}{4}(||\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}||^2-||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}||^2+\mathrm{i}||y+\mathrm{i}\boldsymbol{x}||^2-\mathrm{i}||\boldsymbol{y}-\mathrm{i}\boldsymbol{x}||^2)\\&=\frac{1}{4}(||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2-||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2-\mathrm{i}||(-\mathrm{i})(\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y}||^2+\mathrm{i}||\mathrm{i}(\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\boldsymbol{y}||^2)\\&=\frac{1}{4}(||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2-||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2-\mathrm{i}||\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y}||^2+\mathrm{i}||\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\boldsymbol{y}||^2)\\&=(\overline{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}).\end{aligned}$$

然后, 注意到对所有的向量$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$，我们有

$$\begin{aligned}&4(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{\omega})+4(\boldsymbol{u}-v,\boldsymbol{\omega})\\=&[||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}||^2-||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\omega}||^2+\mathrm{i}||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\mathrm{i}\boldsymbol{\omega}||^2-\mathrm{i}||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\mathrm{i}\boldsymbol{\omega}||^2]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+[||u-v+w||^2-||u-v-w||^2+\mathrm{i}||u-v+\mathrm{i}w||^2-\mathrm{i}||u-v-\mathrm{i}w||^2] \\
=&[||u+w+v||^2+||u+w-v||^2]-[||u-w+v||^2+||u-w-v||^2] \\
&+\mathrm{i}[||u+\mathrm{i}w+v||^2+||u+\mathrm{i}w-v||^2]-\mathrm{i}[||u-\mathrm{i}w+v||^2+||u-\mathrm{i}w-v||^2] \\
=&2||u+w||^2+2||v||^2-2||u-w||^2-2||v||^2 \\
&+\mathrm{i}[2||u+\mathrm{i}w||^2+2||v||^2-2||u-\mathrm{i}w||^2-2||v||^2] \\
=&2[||u+w||^2-||u-w||^2+\mathrm{i}||u+\mathrm{i}w||^2-\mathrm{i}||u-\mathrm{i}w||^2] \\
=&8(u,w).
\end{aligned}
$$

因此, 对所有的向量u,v,w，我们有

$$(u+v,w)+(u-v,w)=2(u,w) \qquad (\star)$$

当$u=v$时, 由($\star$)得出$(2u,w)=2(u,w)$．现在, 在($\star$)中令$u=\frac{1}{2}(x+y), v=\frac{1}{2}(x-y), w=z$，我们得到

$$(x,z)+(y,z)=(u+v,z)+(u-v,z)=2(u,z)=(2u,z)=(x+y,z),$$

这就是第一个变量的可加性.

至于齐性, 首先注意到

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{i}x,y)&=\frac{1}{4}(||\mathrm{i}x+y||^2-||\mathrm{i}x-y||^2+\mathrm{i}||\mathrm{i}x+\mathrm{i}y||^2-\mathrm{i}||\mathrm{i}x-\mathrm{i}y||^2) \\
&=\frac{1}{4}(||\mathrm{i}x+y||^2-||\mathrm{i}x-y||^2+\mathrm{i}||x+y||^2-\mathrm{i}||x-y||^2) \\
&=\mathrm{i}\left[\frac{1}{4}(||x+y||^2-||x-y||^2-\mathrm{i}||\mathrm{i}x+y||^2+\mathrm{i}||\mathrm{i}x-y||^2)\right] \\
&=\mathrm{i}\left[\frac{1}{4}(||x+y||^2-||x-y||^2-\mathrm{i}||\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)||^2+\mathrm{i}||\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)||^2)\right] \\
&=\mathrm{i}\left[\frac{1}{4}(||x+y||^2-||x-y||^2+\mathrm{i}||x+\mathrm{i}y||^2-\mathrm{i}||(x-\mathrm{i}y)||^2)\right] \\
&=\mathrm{i}(x,y).
\end{aligned}
$$

和引理18.7的证明一样, 我们能够证明对每一个“实”有理数r和所有的$x,y\in X,(rx,y)=r(x,y)$．由于如上定义的$(\cdot,\cdot)$是(相对于范数$||\cdot||$)联合连续函数, 容易得出$(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$对所有的$\alpha\in\mathbb{R}$和$x,y\in X$成立. 最后, 对于任意复数$\alpha+\mathrm{i}\beta$和任意向量x,y，有

$$
\begin{aligned}
((\alpha+\mathrm{i}\beta)x,y)&=(\alpha x+\mathrm{i}\beta x,y)=(\alpha x,y)+(\beta(\mathrm{i}x),y) \\
&=\alpha(x,y)+\beta(\mathrm{i}x,y)=\alpha(x,y)+\beta\mathrm{i}(x,y) \\
&=(\alpha+\mathrm{i}\beta)(x,y).
\end{aligned}
$$

这证明了$(\cdot,\cdot)$是由范数$||\cdot||$诱导的内积.

习题32.11 设X 是复内积空间, $T : X \to X$ 是线性算子. 证明$T = 0$ 当且仅当对每一个$\boldsymbol{x} \in X, (T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$. 这个结论对实内积空间是否正确?

解 假设$(T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, 由等式

$$(T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + (T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (T\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + (T\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$$

和我们的假设得

$$(T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (T\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0 \qquad (\bigstar\bigstar)$$

对所有的$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ 成立. 在$(\bigstar\bigstar)$中用iy代替y, 得到$(T\boldsymbol{x}, \mathrm{i}y) + (T(\mathrm{i}y), \boldsymbol{x}) = \mathrm{i}[-(T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + T(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})] = 0$. 因此

$$-(T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (T\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0 \qquad (\bigstar\bigstar\bigstar)$$

对所有$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ 成立. 把$(\bigstar\bigstar)$和$(\bigstar\bigstar\bigstar)$相加, 我们得到$2(T\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0$ 或$(T\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0$. 令$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$, 我们得到$(T\boldsymbol{y}, T\boldsymbol{y}) = 0$, 从而对所有的$\boldsymbol{y} \in X, T\boldsymbol{y} = 0$,即$T = 0$.

对于实内积空间, 前面的结论是错误的. 举一个反例. 考虑配备了标准的内积的Euclid空间$\mathbb{R}^2$, 定义线性算子$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x) = (-x_2, x_1), x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. 显然, $T \neq 0$, 但

$$(T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (-x_2, x_1) \cdot (x_1, x_2) = -x_2x_1 + x_1x_2 = 0$$

对所有的$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ 成立.

习题32.12 如果$\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是内积空间中的正交列, 证明, 对任何向量$\boldsymbol{y}, \lim(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}) = 0$.

解 设$\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是内积空间中的正交列, $\boldsymbol{y}$ 是任意向量, 由Bessel不等式, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y})|^2 \leqslant ||\boldsymbol{y}||^2 < \infty$$

这隐含着$|\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}|^2 \to 0$, 从而$(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}) \to 0$.

习题32.13 内积空间X的非空子集A的**正交补**定义为:

$$A^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in X : \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}, \text{对所有的}\boldsymbol{y} \in A\}.$$

我们将用$A^{\perp\perp}$ 表示$(A^{\perp})^{\perp}$. 证明以下和正交补有关的性质:

(a) $A^{\perp}$ 是X的闭子集, $A \subseteq A^{\perp\perp}$ 且$A \cap A^{\perp} = \{0\}$;

(b) 如果$A \subseteq B$, 则$B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$;

(c) $A^{\perp} = \overline{A}^{\perp} = [\mathcal{L}(A)]^{\perp} = [\overline{\mathcal{L}(A)}]^{\perp}$, 其中$\mathcal{L}(A)$ 表示由A生成的向量子空间;

(d) 如果M和N是X的两个向量子空间, 则$M^{\perp\perp} + N^{\perp\perp} \subseteq (M+N)^{\perp\perp}$;

(e) 如果M是有限维子空间, 则$X = M \oplus M^{\perp}$.

解 (a) 如果$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A^{\perp}, \alpha, \beta$ 是任意两个数, 则对每个$\boldsymbol{z} \in A$, 我们有

$$(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \beta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \alpha 0 + \beta 0 = 0,$$

从而$\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}\in A^{\perp}$，因此$A^{\perp}$是$X$的向量子空间，由于$x\in A$蕴含着对所有的$\boldsymbol{y}\in A^{\perp}$，$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$，所以得出$\boldsymbol{x}\in A^{\perp\perp}$，即$A\subseteq A^{\perp\perp}$．如果$\boldsymbol{x}\in A\cap A^{\perp}$，则$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$或$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，因此$A\cap A^{\perp}=\{0\}$.

(b) 假设$A\subseteq B$，$\boldsymbol{x}\in B^{\perp}$．如果$\boldsymbol{y}\in A$，则$\boldsymbol{y}\in B$，因此$\boldsymbol{y}\perp\boldsymbol{x}$，这表明$\boldsymbol{x}\in A^{\perp}$，从而$B^{\perp}\subseteq A^{\perp}$．

(c) 由$A\subseteq\overline{A}$和(b)，得出$\overline{A}^{\perp}\subseteq A^{\perp}$．现设$\boldsymbol{x}\in A^{\perp}$，$\boldsymbol{y}\in\overline{A}$．选择序列$\{\boldsymbol{y}_n\}\subseteq A,\boldsymbol{y}_n\to\boldsymbol{y}$，注意到

$$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{y}_n,\boldsymbol{x})=0$$

因此，$\boldsymbol{x}\in\overline{A}^{\perp}$．所以，$A^{\perp}\subseteq\overline{A}^{\perp}$，从而得到$A^{\perp}=\overline{A}^{\perp}$．

至于其他的等式，首先注意到$A\leqslant\mathcal{L}(A)$蕴含$[\mathcal{L}(A)]^{\perp}\subseteq A^{\perp}$. 选定$\boldsymbol{x}\in A^{\perp}$，令$\boldsymbol{y}\in\mathcal{L}(A)$．取定$y_1,y_2,\cdots,y_k\in A$和$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$使得$\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{y}_i$. 则

$$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{x}\right)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{x})=0$$

这表明$\boldsymbol{x}\in[\mathcal{L}(A)]^{\perp}$，因此$A^{\perp}\subseteq[\mathcal{L}(A)]^{\perp}$，最后得出$A^{\perp}=[\mathcal{L}(A)]^{\perp}$．

(d) 由$M\subseteq M+N$得出$M^{\perp\perp}\subseteq(M+N)^{\perp\perp}$．同样$N\subseteq M+N$隐含$N^{\perp\perp}\subseteq(M+N)^{\perp\perp}$，因此，$M^{\perp\perp}+N^{\perp\perp}\subseteq(M+N)^{\perp\perp}$．

(e) 设M是n维的子空间. 为证明$X=M\oplus M^{\perp}$，我们必须证明每一个向量能够写成$\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$的形式，其中$\boldsymbol{y}\in M,\boldsymbol{z}\in M^{\perp}$[1].(分解的唯一性显然).

取定M的Hamel基$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$．(如果有必要)用能够由对$\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n\}$应用Gram-Schmidt正交化过程(定理32.11)得来的向量的正规化集代替$\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n\}$，我们不妨设$\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n\}$也是正交集.

现在，取定$\boldsymbol{x}\in X$，考虑向量

$$\boldsymbol{z}=\sum_{k=1}^{n}(x,x_k)x_k\text{和}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\sum_{k=1}^{n}(x,x_k)x_k.$$

显然$\boldsymbol{z}\in M$，且由于$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_k)=0,k=1,2,\cdots n$，容易得出$\boldsymbol{y}\in M^{\perp}$．现在，得到了$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\in M\oplus M^{\perp}$．

习题32.14 设V是实内积空间X的向量子空间. 线性算子$L:V\to X$称作**对称的**，如果对所有的$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V,(L\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},L\boldsymbol{y})$．

(a) 考虑实内积空间$C[a,b]$，令$V=\{f\in C^2[a,b]:f(a)=f(b)=0\}$．设$p\in C^1[a,b],q\in C[a,b]$是两个确定的函数. 证明由

$$L(f)=(pf')'+qf$$

定义的线性算子$L:V\to C[a,b]$是对称算子；

---

1. 原书有误，应为$\boldsymbol{z}\in M,\boldsymbol{y}\in M^{\perp}$. ——译者注

(b) 考虑配备有标准内积的$\mathbb{R}^n$．设$A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是线性算子．像通常一样，我们把算子等同于表示它的矩阵$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，其中矩阵$\boldsymbol{A}$的第j列是列向量Ae_j．证明$\boldsymbol{A}$是对称算子当且仅当$\boldsymbol{A}$是对称矩阵．($n\times n$ 矩阵$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$称作对称的．如果对所有的i和j，$b_{ij}=b_{ji}$.);

(c) 设$L:V\to X$是对称算子，则L自然地开拓为线性算子$L:V_{\mathbb{C}}=\{\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y}:\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V\}\to X_{\mathbb{C}}, L(\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y})=L\boldsymbol{x}+\mathrm{i}L\boldsymbol{y}$. 证明$L$也满足$(L\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},L\boldsymbol{v}),\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V_{\mathbb{C}}$并且$L$的特征值都是实数;

(d) 证明对应于不同的特征值的特征向量是正交的.

解　(a) 如果$f,g\in V$，则

$$\begin{aligned}(Lf,g)&=\int_a^b([p(x)f'(x)]'+q(x)f(x))g(x)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b[p(x)f'(x)]'g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b q(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\\&=p(x)f'(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b p(x)f'(x)g'(x)\mathrm{d}x+\int_a^b q(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b q(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b p(x)f'(x)g'(x)\mathrm{d}x\\&=(f,Lg).\end{aligned}$$

(b) 矩阵$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$的转置是$\boldsymbol{B}^t=[b_{ji}]$．在转置的形式下，矩阵$\boldsymbol{A}$是对称的当且仅当$\boldsymbol{A}^t=\boldsymbol{A}$. 现在，我们的结论立即由以下两个等式得到:

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n\text{和}a_{ij}=(e_i,Ae_j).$$

(c) 如果$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y}$和$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{x}_1+\mathrm{i}\boldsymbol{y}_1$是$V_{\mathbb{C}}$中的向量，则有

$$\begin{aligned}(L\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})&=(L(\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}_1+\mathrm{i}\boldsymbol{y}_1)=(L\boldsymbol{x}+\mathrm{i}L\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_1+\mathrm{i}\boldsymbol{y}_1)\\&=(L\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1)+(L\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}_1)+\mathrm{i}[(L\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_1)-(L\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)]\\&=(\boldsymbol{x},L\boldsymbol{x}_1)+(\boldsymbol{y},L\boldsymbol{y}_1)+\mathrm{i}[(\boldsymbol{y},L\boldsymbol{x}_1)-(\boldsymbol{x},L\boldsymbol{y}_1)]\\&=(\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y},L\boldsymbol{x}_1+\mathrm{i}L\boldsymbol{y}_1)=(\boldsymbol{u},L\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

现设$\lambda\in\mathbb{C}$是$L:V_{\mathbb{C}}\to X_{\mathbb{C}}$的特征值. 取定一个单位向量$\boldsymbol{u}\in X_{\mathbb{C}}$使其满足$L\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$，且注意到

$$\lambda=\lambda(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=(\lambda\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=(L\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u},L\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u},\lambda\boldsymbol{u})=\overline{\lambda}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=\overline{\lambda},$$

这证明λ是一个实数.

(d) 假设$L:V\to X$是对称算子，设$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V_{\mathbb{C}}$是两个非零向量并满足$L\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$，$L\boldsymbol{v}=\mu\boldsymbol{v},\lambda\neq\mu$．由(c)，我们知道，$\lambda,\mu$是实数. 因此,

$$(\lambda-\mu)(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\lambda(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-\mu(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\lambda\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{u},\mu\boldsymbol{v})=(L\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{u},L\boldsymbol{v})=0$$

因此$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$.

习题32.15　设$(\cdot,\cdot)$表示$\mathbb{R}^n$上的标准内积，即，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^n x_iy_i$.$n\times n$ 矩阵$\boldsymbol{A}$叫作**正定的**，如果对所有的非零向量$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，都有$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})>0$.

证明二元函数$<\cdot,\cdot>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是$\mathbb{R}^n$上的内积当且仅当存在唯一的实对称正定矩阵$\boldsymbol{A}$使得对所有的$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$，都有$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})$.(众所周知，对称矩阵是正定的当且仅当它的特征值都是正的).

解 设$<\cdot,\cdot>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是二元函数. 首先设存在实对称正定矩阵A使得$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})$，则对所有的$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 和所有的$\alpha,\beta \in \mathbb{R}$，我们有

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=<\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}>,$$

$$<\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}>=(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y},\boldsymbol{A}\boldsymbol{z})=\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{z})+\beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{A}\boldsymbol{z})=\alpha<\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}>+\beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z});$$

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\geqslant 0,\quad x\in\mathbb{R}^n \quad 且 \quad <\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

这表明$<\cdot,\cdot>$是内积.

反过来，假设二元函数$<\cdot,\cdot>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是实内积. 设$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是标准的单位向量，从而每个向量$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 可以写成$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{e}_i$. 由此得出，

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>=\left\langle \sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j\boldsymbol{e}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i\boldsymbol{y}_j <\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j>=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}),$$

其中$\boldsymbol{A}$ 是$n\times n$ 矩阵$\boldsymbol{A}=[<\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j>]$. 显然，$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，且考虑到$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>$，我们得出$\boldsymbol{A}$ 也是正定矩阵. $\boldsymbol{A}$ 的唯一性是显然的.

33. Hilbert空间

习题33.1 设$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间，$\rho: X\to[0,\infty)$ 是可测函数——称之为**权函数**. 证明可测函数集

$$L_2(\rho)=\left\{f\in\mathcal{M}: \int\rho|f|^2\mathrm{d}\mu<\infty\right\}$$

在内积$(\cdot,\cdot): L_2(\rho)\times L_2(\rho)\to\mathbb{R}, (f,g)=\int\rho fg\mathrm{d}\mu$ 下是实Hilbert空间.

解 显然$L_2(\rho)$ 是向量空间. 而且，由于$f\in L_2(\rho)$ 等价于$\sqrt{\rho}f\in L_2(\mu)$，由Hö lder不等式得出

$$\left|\int\rho fg\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\left(\int\rho|f|^2\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\rho|g|^2\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}}<\infty,$$

因此$(\cdot,\cdot)$定义明确. 我们把证明$(\cdot,\cdot)$实际上是内积作为练习留给读者. 我们将证明$L_2(\rho)$是Hilbert空间.

因此，设$\{f_n\}\subseteq L_2(\rho)$ 是Cauchy序列，即对任意给定的$\varepsilon>0$, 存在某个n_0，使得对所有的$n,m\geqslant n_0$,

$$||f_n-f_m||^2=\int\rho|f_n-f_m|^2\mathrm{d}\mu=\int\left|\sqrt{\rho}f_n-\sqrt{\rho}f_m\right|^2\mathrm{d}\mu<\varepsilon^2.$$

这表明函数列$\{\sqrt{\rho}f_n\}\subseteq L_2(\mu)$ 是Hilbert空间$L_2(\mu)$ 的Cauchy序列. 由于$L_2(\mu)$ 是Banach空间(定理31.5), 所以存在某个函数$g\in L_2(\mu)$，使得

$$\int\left|\sqrt{\rho}f_n-g\right|^2\mathrm{d}\mu\to 0.$$

现注意到如果$f=g/\sqrt{\rho}$, 则$f\in L_\rho(\mu)$ 且

$$||f_n-f||^2=\int\rho|f_n-f|^2\mathrm{d}\mu=\int|\sqrt{\rho}f_n-g|^2\mathrm{d}\mu\to 0.$$

这表明$L_2(\rho)$ 是依范数完备的, 因此它是Hilbert空间.

读者也须注意到$L_2(\rho)$ 恰好是Hilbert空间$L_2(\nu)$ ，其中测度$\nu:\wedge_\mu\to[0,\infty)$ 由$\nu(A)=\int_A\rho(x)\mathrm{d}\mu(x), A\in\wedge_\mu$ 定义.

习题33.2　证明Hilbert空间$L_2[0,\infty)$ 是可分的.

解　考虑可数函数集$\{f_{k,n}:k,n=1,2,\cdots\}$，其中

$$f_{k,n}(x)=\begin{cases}x^n, & 0\leqslant x\leqslant k;\\ 0, & k<x.\end{cases}$$

我们知道具有紧支集的连续函数在$L^2[0,\infty)$ 中稠密(定理31.11), 从而我们只需要证明$\{f_{k,n}\}$的线性扩张在具有紧支集的连续函数组成的向量空间中稠密. 注意到如果这个结论得到证明, 则$\{f_{k,n}\}$ 的有理函数的线性扩张将是可数稠密集.

设$f\in L_2[0,\infty)$ 是具有紧支集的连续函数, $\varepsilon>0$. 选取整数k, 使得$x\geqslant k$ 时, $f(x)=0$. 由Stone-Weierstrass逼近定理, 存在多项式$P(x)=\sum_{n=0}^m c_nx^n$, 使得$|f(x)-P(x)|<\varepsilon/\sqrt{k}$, $x\in[0,k]$. 现注意到如果我们考虑由$g(x)=\sum_{n=0}^m c_nf_{k,n}(x)$ 定义的函数$g\in L_2[0,\infty)$，则

$$\begin{aligned}||f-g||_2&=\left(\int_0^\infty|f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^k|f(x)-P(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\&<\left(\int_0^k\frac{\varepsilon^2}{k}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这表明可数集$\{f_{k,n}:k,n=1,2,\cdots\}$ 的线性扩张在$L_2[0,\infty)$ 中稠密, 因此$L_2[0,\infty)$ 是可分的.

习题33.3　设$\{\psi_n\}$ 是Hilbert空间$L_2[a,b]$ 中正交的一致有界的函数列. 如果数列$\{\alpha_n\}$ 满足$\alpha_n\psi_n\to 0$　a.e., 证明$\lim\alpha_n=0$.

解　取定某个常数C，使得对所有n和所有的$x\in[a,b]$, $|\psi_n(x)|\leqslant C$. 令$\{\alpha_n\}$ 是一个数列, 且对几乎所有的x, $\alpha_n\psi_n(x)\to 0$.

然后取定$\varepsilon>0$ 使得$\varepsilon C^2<1/2$. 由Egorov定理16.7, 存在可测集$E\subseteq[a,b]$，其中$\lambda(E^{\mathrm{C}})<\varepsilon$ 且函数列$\{\alpha_n\psi_n\}$ 在E上一致收敛于0. 于是, 存在整数m, 使得对所有的$n\geqslant m$ 和所有的$x\in E$, $|\alpha_n\psi_n(x)|\leqslant\varepsilon$. 我们有

$$\begin{aligned}|\alpha_n|^2&=\int_a^b|\alpha_n\psi_n(t)|^2\mathrm{d}t=\int_E|\alpha_n\psi_n(t)|^2\mathrm{d}t+\int_{E^c}|\alpha_n\psi_n(t)|^2\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_E\varepsilon^2\mathrm{d}t+|\alpha_n|^2\int_{E^c}|\psi_n(t)|^2\mathrm{d}t\\&\leqslant\varepsilon^2(b-a)+|\alpha_n|^2\int_{E^c}C^2\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\leqslant \varepsilon^2(b-a)+\in|\alpha_n|^2C^2.$$

这表明$|\alpha_n|^2/2<(1-\varepsilon C^2)|\alpha_n|^2\leqslant\varepsilon^2(b-a),n\geqslant m$ 或$|\alpha_n|\leqslant\varepsilon\sqrt{2(b-a)},n\geqslant m$. 由于$0<\varepsilon<\frac{1}{2C^2}$ 是任意的, 我们已经证明$\alpha_n\to 0$.

习题33.4 设$\{\phi_n\}$是Hilbert空间$L_2[-1,1]$的正交函数列. 证明函数列$\{\psi_n\}$是Hilbert空间L_2 $[a,b]$ 中的正交列, 其中

$$\psi_n(x)=\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\frac{1}{2}}\phi_n\left(\frac{2}{b-a}\left(x-\frac{b+a}{2}\right)\right).$$

解 注意到内积满足

$$\begin{aligned}(\psi_n,\psi_m)&=\int_a^b\psi_n(x)\overline{\psi_m}(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{b-a}\int_a^b\phi_n\left(\frac{2}{b-a}\left(x-\frac{b+a}{2}\right)\right)\overline{\phi_m}\left(\frac{2}{b-a}\left(x-\frac{b+a}{2}\right)\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令$t=\frac{2}{b-a}(x-\frac{b+a}{2})$, 我们有$\mathrm{d}t=\frac{2}{b-a}\mathrm{d}x$, 于是

$$(\psi_n,\psi_m)=\int_{-1}^1\phi_n(t)\overline{\phi_m}(t)\mathrm{d}t=\delta_{mn},$$

即, $\{\psi_n\}$ 是Hilbert空间$L_2[a,b]$ 中的正交列.

习题33.5 证明内积空间X的完备化$\widehat{X}$ 是Hilbert空间. 而且, 如果$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\widehat{X}$, X中的两个序列$\{\boldsymbol{x}_n\}$和$\{\boldsymbol{y}_n\}$ 满足在$\widehat{X}$ 中分别收敛于x和y, 则证明$\widehat{X}$ 的内积由$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>=\lim\limits_{n\to\infty}(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)$ 给出.

解 设$\widehat{X}$ 是内积空间X的完备化, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\widehat{X}$. 取定X中的两个序列$\{\boldsymbol{x}_n\}$和$\{\boldsymbol{y}_n\}$ 使得$||\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}||\to 0,||\boldsymbol{y}_n-\boldsymbol{y}||\to 0$, 其中$||\cdot||$是$\widehat{X}$ 的范数(它是X的范数到$\widehat{X}$ 上的唯一的连续开拓). 选取某个常数$M>0$, 使得对每个n , $||\boldsymbol{x}_n||\leqslant M$, $||\boldsymbol{y}_n||\leqslant M$. 然后, 利用Cauchy-Schwarz不等式, 我们有

$$\begin{aligned}|(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)-(\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_m)|&=|(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)-(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_m)+(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_m)-(\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_m)|\\&=|(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n-\boldsymbol{y}_m)+(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_m)|\\&\leqslant|(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n-\boldsymbol{y}_m)|+|(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_m)|\\&\leqslant||\boldsymbol{x}_n||\,||\boldsymbol{y}_n-\boldsymbol{y}_m||+||\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_m||\,||\boldsymbol{y}_m||\\&\leqslant M(||\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_m||+||y_n-y_m||).\end{aligned}$$

这表明数列$\{(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)\}$ 是Cauchy序列, 因此是收敛的.

然后, 假设X的另两个序列$\{\boldsymbol{x}'_n\}$和$\{\boldsymbol{y}'_n\}$, 它们满足$||\boldsymbol{x}'_n-x||\to 0,||\boldsymbol{y}'_n-\boldsymbol{y}||\to 0$. 不失一般性, 我们不妨设对每个n, $||\boldsymbol{x}'_n||\leqslant M,||\boldsymbol{y}'_n||\leqslant M$. 由前面的讨论, $\lim(\boldsymbol{x}'_n,\boldsymbol{y}'_n)$ 存在, 而且由于

$$|(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)-(\boldsymbol{x}'_n,\boldsymbol{y}'_n)|=|(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)-(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}'_n)+(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}'_n)-(\boldsymbol{x}'_n,\boldsymbol{y}'_n)|$$

$$= |(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y'}_n) + (\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x'}_n, \boldsymbol{y'}_n)|$$
$$\leqslant |(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y'}_n)| + |(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x'}_n, \boldsymbol{y'}_n)|$$
$$\leqslant ||\boldsymbol{x}_n|| \, ||\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y'}_n|| + ||\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x'}_n|| \, ||\boldsymbol{y'}_n||$$
$$\leqslant M(||\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x'}_n|| + ||y_n - \boldsymbol{y'}_n||) \to 0.$$

所以得出$\lim(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n) = \lim(\boldsymbol{x}'_n, \boldsymbol{y}'_n)$. 换句话说, 公式

$$< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= \lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n) \qquad (\bigstar)$$

给出了$\widehat{X} \times \widehat{X}$ 上定义有意义的数值函数.

现在很显然, 内积的性质通过($\bigstar$)式从X的内积转移到函数$< \cdot, \cdot >: \widehat{X} \times \widehat{X} \to \mathcal{C}$ 上. 换句话说, ($\bigstar$)式是$\widehat{X}$ 上的内积. 而且, 由

$$||\boldsymbol{x}||^2 = \lim_{n\to\infty} ||\boldsymbol{x}_n||^2 = \lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_n) =< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >,$$

我们得出由($\bigstar$)式给出的内积诱导$\widehat{X}$ 的范数.

习题33.6 证明$\mathcal{L}_2$ 的闭单位球在范数意义下不是紧集.

解 设$\mathcal{U} = \{\boldsymbol{x} \in l_2 : ||x|| \leqslant 1\}$ 是$\mathcal{L}_2$ 的闭单位球. 令$\boldsymbol{e}_n = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$, $n = 1, 2, \cdots$ 表示第n个坐标为1, 其他坐标是0的序列. 注意到$||\boldsymbol{e}_n|| = 1, n = 1, 2, \cdots$, 因此$\{\boldsymbol{e}_n\}$ 是$\mathcal{L}_2$ 的单位球中的序列. (事实上, $\{\boldsymbol{e}_n\}$ 是$\mathcal{L}_2$ 的正交列.)现注意到如果$n \neq m$, 则$||\boldsymbol{e}_n - \boldsymbol{e}_m|| = \sqrt{2}$, 这表明$\{\boldsymbol{e}_n\}$ 不含有Cauchy子列, 因此, 也不含有任何的收敛子列. 所以, 定理7.3保证了$\mathcal{U}$ 在范数意义下不是$\mathcal{L}_2$ 的紧子集.

习题33.7 证明Hilbert立方体(所有满足$|x_n| \leqslant 1/n, n = 1, 2, \cdots$, 的$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathcal{L}_2$ 的集合)是$\mathcal{L}_2$ 的紧子集.

解 令$C = \{(x_1, x_2, \cdots) \in \mathcal{L}_2 : |x_n| \leqslant 1/n, n = 1, 2, \cdots\}$. 显然, C是$\mathcal{L}_2$的闭子集. 因此, 为证明C的紧性, (由定理7.8) 只需证明C是完全有界的.

出于这个目的, 令$\varepsilon < 0$. 选取某个固定的n, 使得$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$. 由于集合$A = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leqslant 1/i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 是闭的和有界的, 它必然是$\mathbb{R}^n$ 的紧子集. 选取$x^1, \cdots, x^m \in A$ (其中$\boldsymbol{x}^i = (x_1^i, x_2^i, \cdots, x_n^i)$ 使得$A \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(\boldsymbol{x}^i, \varepsilon)$. (当然, 我们考虑的是配有Euclid距离的$\mathbb{R}^n$.)现令$\boldsymbol{y}_i = (x_1^i, \cdots, x_n^i, 0, 0, \cdots), 1 \leqslant i \leqslant m$. 容易得出$C \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(\boldsymbol{y}_i, 2\varepsilon)$ 在$\mathcal{L}_2$ 中成立, 这表明C 是完全有界的, 得证.

习题33.8 证明Hilbert空间的任何子空间M满足$\overline{M} = M^{\perp\perp}$.

解 显然, $(\overline{M})^{\perp} = M^{\perp}$; 见习题32.13. 因此, 由定理33.7, $H = \overline{M} \oplus M^{\perp}$. 而且, 有$M \subseteq \overline{M} \subseteq M^{\perp\perp}$.

现设$\boldsymbol{x} \in M^{\perp\perp}$. 由$H = \overline{M} \oplus M^{\perp}$, 我们能得到$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in \overline{M}, \boldsymbol{v} \in M^{\perp}$. 这表明$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \in M^{\perp}$, 而且由于$\overline{M} \subseteq M^{\perp\perp}$, 我们有$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u} \in M^{\perp\perp}$. 因此$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u} \in M^{\perp} \cap M^{\perp\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$, 或$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \in \overline{M}$, 从而$M^{\perp\perp} \subseteq \overline{M}$ 也正确, 于是$M^{\perp\perp} = \overline{M}$, 得证.

习题33.9 对于Hilbert空间的两个任意的子向量空间M和N, 证明以下的命题:

(a) $(M+N)^{\perp}=M^{\perp}\cap N^{\perp}$;

(b) 如果M和N都是闭的, 则$(M\cap N)^{\perp}=\overline{M^{\perp}+N^{\perp}}$.

解 (a) 设$x\perp M+N$, 则对所有$y\in M$,成立$x\perp y$; 同时对所有$z\in N$, 成立$x\perp z$, 即$x\in M^{\perp}, x\in N^{\perp}$. 因此$(M+N)^{\perp}\subseteq M^{\perp}\cap N^{\perp}$.

对于相反的包含关系, 设$x\in M^{\perp}\cap N^{\perp}, y\in M+N$. 记$y=u+v, u\in M$和$v\in N$. 注意到$(x,y)=(x,u)+(x,v)=0$ 成立, 因此$x\in(M+N)^{\perp}$, 从而$M^{\perp}\cap N^{\perp}\subseteq(M+N)^{\perp}$. 所以$(M+N)^{\perp}=M^{\perp}\cap N^{\perp}$.

(b) 现设M和N都是闭子空间, 由前面的习题, 我们得出$M=M^{\perp\perp}$和$N=N^{\perp\perp}$. 利用(a)部分, 得到

$$(M^{\perp}+N^{\perp})^{\perp}=M\cap N.$$

因此,

$$(M\cap N)^{\perp}=[(M^{\perp}+N^{\perp})^{\perp}]^{\perp}=\overline{M^{\perp}+N^{\perp}}.$$

习题33.10 设X是使得对于每一个闭子集M, $M=M^{\perp\perp}$都成立的内积空间. 证明X是Hilbert空间.

解 我们需要证明X在诱导范数下是完备的. 对于这一点, 只需证明$X=\widehat{X}$就足够了, 其中$\widehat{X}$表示X的完备化. (我们已经知道$\widehat{X}$是Hilbert空间; 见习题33.5)由此设$\widehat{\boldsymbol{u}}\in\widehat{X}$是非零向量.

由$f(x)=(x,\widehat{u})$定义的线性泛函$f:\widehat{X}\to\boldsymbol{C}$是不等于零且连续的. 于是, f限制在X上也是连续的, 而且由于X在$\widehat{X}$中依范数的意义稠密, 得出$f:X\to\boldsymbol{C}$是非零的连续线性泛函. 特别地, 它的核$M=\{x\in X:f(x)=0\}$是X的真闭子空间. 我们断言$M^{\perp}\neq 0$. 事实上, 如果$M^{\perp}=\{0\}$, 则$M=M^{\perp\perp}=\{0\}^{\perp}=X$, 与我们的假设矛盾.

然后, 固定向量$\boldsymbol{u}\in M^{\perp}$且$||\boldsymbol{u}||=1$, 设$\boldsymbol{v}=\overline{f(\boldsymbol{u})}\boldsymbol{u}\in X$. 由于对一切$\boldsymbol{x}\in X$, $f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}-f(\boldsymbol{u})\boldsymbol{x}\in M$成立, 因此得出

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=f(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}), x\in X$$

即$(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{u}})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$. 由于$X$在$\widehat{X}$中稠密, 我们得到对所有$\boldsymbol{x}\in\widehat{X}$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{u}})$成立, 也即$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}-\widehat{\boldsymbol{u}})=0, \boldsymbol{x}\in\widehat{X}$, 由此我们得出$\widehat{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{v}\in X$. 于是$X=\widehat{X}$, 因此$X$是Hilbert空间.

习题33.11 考虑线性算子$V:L_2[a,b]\to L_2[a,b], Vf(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. 证明该算子的范数满足$||V||\leqslant b-a$.

解 由Hölder不等式, 我们得到

$$\begin{aligned}|Vf(x)|&\leqslant\int_a^x|f(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t\\&\leqslant\left[\int_a^b|f(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_a^b 1^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant(b-a)^{\frac{1}{2}}||f||.\end{aligned}$$

因此V的范数满足

$$\|Vf\|^2 = \int_a^b |Vf(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant (b-a)\int_a^b \|f\|^2 \mathrm{d}t \leqslant (b-a)^2\|f\|^2.$$

这表明$\|V\| \leqslant b-a$.

习题33.12 设$\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是Hilbert空间$\mathcal{L}_2$ 中范数有界的向量列, 其中$\boldsymbol{x}_n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n, \cdots)$. 如果对每一个固定的下标$k$, 我们有$\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_k^n = \boldsymbol{0}$, 证明对于所有向量$\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}_2$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}) = 0$.

解 选取某个$\lambda > 0$ 使得$\|\boldsymbol{x}_n\| \leqslant \lambda, n = 1, 2, \cdots$. 固定向量$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots) \in \mathcal{L}_2$, 设$\varepsilon > 0$. 选取某个m, 使得$(\sum_{k=m}^{\infty} |y_k|^2)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$.

由于对每个固定的k, 我们有$\lim\limits_{n\to\infty} x_k^n = 0$, 存在整数n_0, 使得当$n \geqslant n_0$ 时, $\left|\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{x}_k^n \overline{\boldsymbol{y}_k}\right| < \varepsilon$. 利用Cauchy-Schwarz不等式, 对每个$n \geqslant n_0$, 我们有

$$\begin{aligned} |(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y})| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_k^n \overline{\boldsymbol{y}_k}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{x}_k^n \overline{\boldsymbol{y}_k}\right| + \sum_{k=m+1}^{\infty} |\boldsymbol{x}_k^n \overline{\boldsymbol{y}_k}| \\ &< \varepsilon + \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |\boldsymbol{x}_k^n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |\boldsymbol{y}_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \varepsilon + \lambda\varepsilon = (1+\lambda)\varepsilon. \end{aligned}$$

由于$\varepsilon > 0$ 是任意的, 我们已经证明了$\lim\limits_{n\to\infty}(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}) = 0$.

习题33.13 设H是Hilbert空间, $\{x_n\}$ 是序列, 并满足对于每个$y \in H$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, 证明存在$\{x_n\}$ 的子列$\{\boldsymbol{x}_{k_n}\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{\boldsymbol{x}_{k_1} + \boldsymbol{x}_{k_2} + x_{k_3} + \cdots + \boldsymbol{x}_{k_n}}{n} - \boldsymbol{x} \right\| = 0$$

解 不失一般性, 我们不妨设$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 因此, 设对每个$\boldsymbol{y} \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}) = 0$. 我们论断$\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是范数有界的. 为说明这一点, 对每个n, 考虑连续线性算子$f_n : H \to \mathbb{C}$, $f_n(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_n), \boldsymbol{y} \in H$. 由条件, 有界线性泛函序列$\{f_n\}$ 是逐点有界的. 于是, 由一致有界原理(定理28.8), 存在某个$C > 0$, 使得对每个$n, \|f_n\| \leqslant C$. (由定理33.9)得到$\|\boldsymbol{x}_n\| = \|f_n\|, n = 1, 2, \cdots$.

现设$k_1 = 1$, 选取某个$k_2 > k_1$, 并且$|(\boldsymbol{x}_{k_1}, \boldsymbol{x}_{k_2})| < 1$. 归纳的论证表明存在整数$k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ 使得

$$|(\boldsymbol{x}_{k_i}, \boldsymbol{x}_{k_{n+1}})| < 2^{-n}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

为完成解答, 我们将证明

$$\left\| \frac{\boldsymbol{x}_{k_1} + \boldsymbol{x}_{k_2} + \boldsymbol{x}_{k_3} + \cdots + \boldsymbol{x}_{k_n}}{n} \right\|^2 \leqslant \frac{2 + C^2}{n}.$$

对每个n成立. 为说明这一点, 取内积得到

$$\left\| \frac{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_{k_i}}{n} \right\|^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x}_{k_1}, \boldsymbol{x}_{k_i}) + \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x}_{k_2}, \boldsymbol{x}_{k_i}) + \cdots + \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x}_{k_n}, \boldsymbol{x}_{k_i})}{n^2}$$

$$\leqslant \frac{n[C^2+(1+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+\cdots+2^{-n})]}{n^2} \leqslant \frac{2+C^2}{n}.$$

这表明

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{\boldsymbol{x}_{k_1}+\boldsymbol{x}_{k_2}+\boldsymbol{x}_{k_3}+\cdots+\boldsymbol{x}_{k_n}}{n}\right\|=0.$$

得证.

习题33.14 设$\rho:[a,b]\to(0,\infty)$ 是本性有界的可测函数, 令P_n 是n次非零的多项式, $n=0,1,2,\cdots$. 假设

$$\int_a^b \rho(x)P_n(x)\overline{P_m(x)}\mathrm{d}x=0,\quad n\neq m.$$

证明P_n 有n个不同的实根都落在开区间(a,b) 内.

解 由定理33.12, 我们知道正交多项式列$P_0,P_1,P_2,\cdots$ 完备, 且等于不考虑(常数因子)通过对线性无关的函数列$\{1,x,x^2,x^3,\cdots\}$ 施行Gram-Schmidt正交化过程获得的$L_2(\rho)$ 的正交函数列. 特别地, 对所有$m=0,1,\cdots,n-1$, 我们有$\int_a^b \rho(x)x^mP_n(x)\mathrm{d}x=0$. 而且, 通过把每个P_n 乘以一个适当的常数, 我们可以假设P_n 具有实系数且首项系数为1.

现取定这些多项式P_n 中的一个, 其中$n\geqslant 1$. 首先, 我们将证明P_n 没有复数根. 如果P_n 有一个复数根, 则P_n 具有形如$P_n(x)=[(x+\alpha)^2+\beta^2]Q(x)$ 的分解, 其中α,β 为实数, $Q(x)$ 为$n-2$次多项式. 因此$Q(x)P_n(x)=[(x+\alpha)^2+\beta^2]Q^2(x)\geqslant 0$, 由$\int_a^b \rho(x)x^mP_n(x)\mathrm{d}x=0, m=0,1,\cdots,n-1$, 得出

$$0<\int_a^b \rho(x)Q(x)P_n(x)\mathrm{d}x=0,$$

这是不可能的. 因此, 每个P_n 只有实根. 这表明P_n 具有形如

$$P_n(x)=(x-r_1)^{m_1}(x-r_2)^{m_2}\cdots(x-r_k)^{m_k}$$

的分解, 其中$r_1,r_2,\cdots r_k$ 是实数, $m_1,m_2,\cdots m_k$ 是自然数且$m_1+m_2+\cdots+m_k=n$.

然后, 我们证明P_n 在开区间(a,b) 外没有根. 为说明这点, 假设有一个根落在开区间(a,b) 外, 比如$r_1\leqslant a$, 则多项式$Q(x)=(x-r_2)^{m_2}\cdots(x-r_k)^{m_k}$ 的次数小于n且对于$a\leqslant x\leqslant b$, $Q(x)P_n(x)\geqslant 0$. 但是, 我们有

$$0<\int_a^b \rho(x)Q(x)P_n(x)\mathrm{d}x=0,$$

矛盾.

最后, 为证明每个根出现的重数为1, 假设一个根的重数大于1, 比如$m_1>1$. 再次, 令

$$Q(x)=\begin{cases}(x-r_2)^{m_2}\cdots(x-r_k)^{m_k}, & m_1\text{是偶数}\\ (x-r_1)(x-r_2)^{m_2}\cdots(x-r_k)^{m_k}, & m_1\text{是奇数},\end{cases}$$

则Q是一个次数严格小于n的多项式且$Q(x)P_n(x)\geqslant 0, a\leqslant x\leqslant b$. 但是, 和前面一样,

$$0=\int_a^b \rho(x)Q(x)P_n(x)\mathrm{d}x>0,$$

这是荒谬的, 因此, 每个P_n 有n个不同的实根落在开区间(a,b) 内.

习题33.15 在例33.13中, 我们定义了Legendre多项式列$P_0, P_1, P_2, \cdots$,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n.$$

我们也证明了这些多项式是(不考虑常数因子)通过对Hilbert空间$L_2([-1,1])$ 中的线性无关的函数$\{\mathbf{1}, x, x^2, \cdots\}$ 施行Gram-Schmidt正交化过程获得的多项式. 证明对每个n, 我们有

$$P_n(1) = 1, \quad ||P_n|| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

解 用归纳法证明$P_n(1) = 1$. 注意到对$n = 0$和$n = 1$, 公式显然. 于是, 为了归纳论证, 假设$P_n(1) = 1$ 对某个n成立. 为完成证明, 我们必须证明$P_{n+1}(1) = 1$. 为说明这一点, 注意到

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(x^2-1)^{n+1} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[((x^2-1)^{n+1})'] \\
&= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[2(n+1)x(x^2-1)^n] \\
&= \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x-1)(x^2-1)^n] + \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \\
&= (x-1)Q(x) + P_n(x),
\end{aligned}$$

其中$(x-1)Q(x)$ 具有表示式为

$$\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x-1)(x^2-1)^n = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x-1)^{n+1}(x+1)^n,$$

于是$P_{n+1}(1) = P_n(1) = 1$.

接下来, 我们将计算P_n 的范数, 显然

$$||P_n||^2 = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{(2^n n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\mathrm{d}x.$$

观察到函数$(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$以及它的$n-1$阶或低于$n-1$阶导数在$\pm1$ 处为零. 于是, 进行n次分部积分及利用前面的观察, 我们得到

$$\begin{aligned}
||P_n||^2 &= \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}(x^2-1)^n\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n(2n)!\mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^n(2n)!}{(2^n n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

利用分部积分估计最后的积分得到

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^n\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(1-x)^n(1+x)^{n+1}}{n+1}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} n(1-x)^{n-1}\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1}\mathrm{d}x = \cdots \\
&= \frac{n!}{(n+1)\cdots(2n)}\int_{-1}^{1}(1+x)^{2n}\mathrm{d}x \\
&= \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)}.
\end{aligned}
$$

所以, P_n 的范数为

$$||P_n||^2 = \left[\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\right]\left[\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)}\right] = \frac{2}{2n+1},$$

得证.

习题33.16 设$\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$是从一个复Hilbert空间$X$到另一个复Hilbert空间$Y$的连续线性算子族. 假设对所有的$\boldsymbol{x}\in X$ 和所有的$\boldsymbol{y}\in Y$，复数集$\{(T_\alpha(x),\boldsymbol{y}):\alpha\in A\}$ 有界. 证明算子族$\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是范数一致有界的, 即, 证明存在某个常数$M>0$，使得对所有的$\alpha\in A, ||T_\alpha||\leqslant M$.

解 注意到如果Z 是复数域上的Banach空间, 则我们也能把Z看成是实数域上的Banach空间. 因此, 一致有界原理(定理28.8)能应用到复数域上的任何Banach空间.

固定一个向量$\boldsymbol{x}\in X$. 对于每个$\alpha\in A$，定义复值连续线性算子$B_\alpha: Y\to\mathbb{C}, B_\alpha(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y},T_\alpha(\boldsymbol{x}))$. 因此$\{B_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一族从Banach空间Y到复数组成的Banach空间$\mathbb{C}$上的有界线性算子. 由定理33.9, 我们得到

$$||B_\alpha|| = ||T_\alpha(x)||.$$

然后, 对每一个固定的$\boldsymbol{y}\in Y$，由

$$|B_\alpha(\boldsymbol{y})| = |(\boldsymbol{y},T_\alpha(\boldsymbol{x}))| = |T_\alpha(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y}|$$

和我们的假设得到, 连续线性算子簇$\{B_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是逐点有界的. 因此, 由一致有界原理(定理28.8), $\{B_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的范数有界, 即, 存在一个常数$M_{\boldsymbol{x}}>0$ (它依赖于x), 使得$||B_\alpha||\leqslant M_{\boldsymbol{x}}, \alpha\leqslant A$. 因此, 我们有$||T_\alpha(\boldsymbol{x})||\leqslant M_{\boldsymbol{x}}, \alpha\in A$.

所以, 连续线性算子簇$\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}, T_\alpha: X\to Y$ 是逐点有界的, 再次利用一致有界原理, 我们推出存在一个常数$M>0$，使得对所有的$\alpha\in A$，$||T_\alpha||\leqslant M$.

习题33.17 设$\{\phi_n\}$ 是Hilbert空间H的正交列, 考虑算子$T: H\to H$,

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x,\phi_n)\phi_n,$$

其中, $\{\alpha_n\}$ 是一个数列, $\lim\ \alpha_n = 0$. 证明T是紧算子.

解 设B是H的开单位球. 我们必须证明$\overline{T(B)}$ 是紧集. 关于这一点, 只须证明$T(B)$完备有界就够了. 固定$\varepsilon>0$，注意到存在一个整数m,使得对所有的$n>m$,有$|\alpha_n|<\varepsilon$.

然后定义算子$T_m : H \to H$

$$T_m(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(\boldsymbol{x}, \phi_i)\phi_i.$$

显然, T_m 的像是H的有限维子空间, 从而T_m 是紧算子. 因此, $T_m(B)$ 是完全有界集. 因此, 存在一有限集$\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n\}$ 使得对每一个$\boldsymbol{x} \in B$, 存在某个$1 \leqslant k \leqslant n$, 使得$||T_m(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}_k|| < \varepsilon$. Parseval不等式$\sum_{i=1}^{\infty} |(\boldsymbol{x}, \phi_i)|^2 \leqslant ||\boldsymbol{x}||^2 < 1$ 蕴含

$$\begin{aligned} ||T(\boldsymbol{x}) - T_m(\boldsymbol{x})||^2 &= \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \alpha_i(\boldsymbol{x}, \phi_i)\phi_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} |\alpha_i|^2 |(x, \phi_i)|^2 \\ &\leqslant \varepsilon^2 \sum_{i=m+1}^{\infty} |(\boldsymbol{x}, \phi_i)|^2 \leqslant \varepsilon^2 ||\boldsymbol{x}||^2 < \varepsilon^2 \end{aligned}$$

所以, 对每个$\boldsymbol{x} \in B$, 存在某个$1 \leqslant k \leqslant n$, 使得

$$||T(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}_k|| \leqslant ||T(\boldsymbol{x}) - T_m(\boldsymbol{x})|| + ||T_m(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}_k|| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

这表明$T(B)$ 是完全有界的, 从而T是紧算子.

习题33.18　设$T, T^* : H \to H$ 是Hilbert空间上的两个算子, 并且满足$(T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, T^*(\boldsymbol{y})), \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$. 证明T和T^* 都是有界线性算子, 并且

$$||T|| = ||T^*||, \quad ||TT^*|| = ||T||^2.$$

解　由条件的对称性, 只须证明T是有界线性算子就够了. 我们将首先证明T是线性算子. 固定$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$ 和两个数α, β , 则对每个$\boldsymbol{z} \in H$, 我们有

$$\begin{aligned} (T(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}) &= (\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, T^*(\boldsymbol{z})) = \alpha(\boldsymbol{x}, T^*(\boldsymbol{z})) + \beta(\boldsymbol{y}, T^*(\boldsymbol{z})) \\ &= \alpha(T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{z}) + \beta(T(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}) = (\alpha T(\boldsymbol{x}) + \beta T(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}), \end{aligned}$$

或$(T(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) - \alpha T(\boldsymbol{x}) - \beta T(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}) = 0$, 对所有$\boldsymbol{z} \in H$ 成立. 这表明(通过令$\boldsymbol{z} = T(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) - \alpha T(\boldsymbol{x}) - \beta T(\boldsymbol{y})$)

$$T(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha T(\boldsymbol{x}) + \beta T(\boldsymbol{y})$$

即, T是线性算子.

然后, 对每个$\boldsymbol{y} \in H, ||\boldsymbol{y}|| \leqslant 1$, 考虑线性泛函$f_y : H \to H, f_y(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, T^*(\boldsymbol{y}))$, 利用Cauchy-Schwarz不等式, 我们得

$$|f_y(\boldsymbol{x})| = |(\boldsymbol{x}, T^*(\boldsymbol{y}))| = |(T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})| \leqslant ||T(\boldsymbol{x})||\ ||\boldsymbol{y}|| \leqslant ||T(\boldsymbol{x})||.$$

这表明线性泛函集$\{f_y : ||\boldsymbol{y}|| \leqslant 1\}$ 是逐点有界的, 从而由一致有界原理, 线性泛函集$\{f_y : ||\boldsymbol{y}|| \leqslant 1\}$ 的范数有界. 因此, 存在某个常数$C > 0$, 使得对所有$\boldsymbol{y} \in H, ||\boldsymbol{y}|| \leqslant 1$, 有$||f_y|| \leqslant C$.

现设$\boldsymbol{y} \in H, ||\boldsymbol{y}|| \leqslant 1$，且$T^*(\boldsymbol{y}) \neq 0$．令$\boldsymbol{x} = T^*(\boldsymbol{y})/||T^*(\boldsymbol{y})||$，我们得到

$$||T^*(\boldsymbol{y})|| = \frac{1}{||T^*(\boldsymbol{y})||}|(T^*(\boldsymbol{y}), T^*(\boldsymbol{y}))| = |(\boldsymbol{x}, T^*(\boldsymbol{y}))| = |f_y(\boldsymbol{x})| \leqslant C.$$

这表明$||T^*|| = \sup\{||T^*(\boldsymbol{y})|| : ||\boldsymbol{y}|| \leqslant 1\} \leqslant C$，因此, T^* 是有界线性算子. 由条件的对称性, T同样是有界线性算子.

注意到对$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H, ||\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{y}|| = 1$，我们有

$$|(T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})| = |(\boldsymbol{x}, T^*(\boldsymbol{y}))| \leqslant ||\boldsymbol{x}||\ ||T^*(\boldsymbol{y})|| \leqslant ||\boldsymbol{x}||\ ||T^*||\ ||\boldsymbol{y}|| = ||T^*||,$$

从而$||T(\boldsymbol{x})|| = \sup\{|(T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})| : ||\boldsymbol{y}|| \leqslant 1\} \leqslant ||T^*||$ 对所有的单位向量$\boldsymbol{x} \in H$ 成立. 这表明

$$||T|| = \sup_{||\boldsymbol{x}||=1} ||T(\boldsymbol{x})|| \leqslant ||T^*||.$$

再次利用对称性, 我们得到$||T^*|| \leqslant ||T||$, 于是$||T|| = ||T^*||$．

最后, 对每个$\boldsymbol{x} \in H, ||\boldsymbol{x}|| = 1$，我们有

$$||TT^*(\boldsymbol{x})|| \leqslant ||T||\ ||T^*||\ ||\boldsymbol{x}|| = ||T||^2,$$
$$||T^*(\boldsymbol{x})||^2 = (T^*(\boldsymbol{x}), T^*(\boldsymbol{x})) = (TT^*(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) \leqslant ||TT^*||\ ||\boldsymbol{x}||\ ||\boldsymbol{x}|| = ||TT^*||,$$

于是通过取上确界, 我们得到$||TT^*|| = ||T||^2$.

习题33.19 证明如果$T : H \to H$ 是Hilbert空间上的有界线性算子, 则存在唯一的有界算子$T^* : H \to H$ (称作T的**伴随算子**), 使得对所有的$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$，

$$(T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, T^*(\boldsymbol{y})).$$

并且证明$||T|| = ||T^*||$．

解 假设$T : H \to H$ 是Hilbert空间上的有界线性算子. 对每个固定的$\boldsymbol{y} \in H, f_y(\boldsymbol{x}) = (T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$ 定义了H上的有界线性泛函. 由定理33.9, 存在唯一的向量$T^*(\boldsymbol{y}) \in H$, 使得

$$f_y(\boldsymbol{x}) = (T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, T^*(\boldsymbol{y})).$$

由前面的习题得出如上定义的唯一的函数$T^* : H \to H$ 事实上是满足$||T^*|| = ||T||$ 的有界线性算子.

34. 正交基

习题34.1 设$\{e_i\}_{i\in I}$ 和$\{\boldsymbol{f}_j\}_{j\in J}$ 是Hilbert空间的两组正交基. 证明I和J具有相同的基数.

解 假设$\{e_i\}_{i\in I}$ 和$\{\boldsymbol{f}_j\}_{j\in J}$ 是Hilbert空间的两组正交基. 首先, 假设I是有限集, 则由定理34.2得出$\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in I}$ 也是Hamel基, 于是H是有限维的. 由于$\boldsymbol{f}_j$(作为两两正交的向量)也是线性无关的, 我们得J必然也是有限集. 这表明$\{\boldsymbol{f}_j\}_{j\in J}$ 本身也是H的Hamel基, 于是I和J的元素个数必然相同.

现设I和J均为无限集. 对每个$i \in I$, 我们定义指标集$J_i = \{j \in J : (e_i, f_j) \neq 0\}$. 由定理34.2, 我们知道$J_i$是非空集, 且至多可数. 然后, 我们论证

$$J = \bigcup_{i \in I} J_i. \qquad (\bigstar)$$

为说明这一点, 设$j \in J$. 由于$\{e_i\}_{i \in I}$ 是正交基, 由Parseval等式得到$\sum_{i \in I} |(f_j, e_i)|^2 = ||f_j||^2 = 1$, 于是$(e_i, f_j) \neq 0$ 对某个$i \in I$ 成立. 因此, 至少存在一个$i \in I$, 使得$j \in J_i$, 所以$J = \bigcup_{i \in I} J_i$.

最后, 为说明I和J有相同的势, 可利用(★)式和标准的"势"算术; 比如, 参阅P. R. Halmos, *Naive Set Theory*,Springer-Verlag, 1974, PP. 94-98.

习题34.2　设$\{e_i\}_{i \in I}$ 是Hilbert空间H的正交基. 如果D是H的稠密子集, 证明D的基数至少与I的基数一样大. 利用这个结论证明对于无限维Hilbert空间H, 以下的命题等价:

(1) H有可数正交基;

(2) H是可分的;

(3) H与$\mathcal{L}_2$线性等距.

给出定理34.4的另一种证明.

解　设$\{e_i\}_{i \in I}$ 是Hilbert空间H的正交基, D是H的稠密子集. 考虑开球族$\{B(e_i, 1/2)\}_{i \in I}$, 其中$B(e_i, 1/2) = \{x \in H : ||e_i - x|| < 1/2\}$. 由于$||e_i - e_j|| = \sqrt{2}, i \neq j$, 所以$\{B(e_i, 1/2)\}$ 是两两互不相交的开集族. 由于D在H中稠密, 对每个$i \in I$, 存在某个$d_i \in D \cap B(e_i, 1/2)$. 显然, 从I到D的映射$i \to d_i$ 是一一的, 这表明D的基数大于或等于I的基数.

然后, 我们将证明如上所述的命题等价. 出于这个目的, 假设H是无限维Hilbert空间.

(1) $\Leftrightarrow$ (2)设$\{e_1, e_2, \cdots\}$ 是H的可数正交基, 则e_n的"有理"系数的有限线性组合是可数稠密集.

现设H是可分的, D是H的可数稠密子集. 如果$\{e_i\}_{i \in I}$ 是正交基, 由第一部分得到, I的基数最多等于D的基数, 因此I是至多可数的. 由于H是无限维的, I必定是可数的, 因此H有可数正交集.

(2) $\Rightarrow$ (3)如果H有可数正交基, 则(由定理34.9)H与$\mathcal{L}_2(\mathbb{N}) = \mathcal{L}_2$ 线性等距.

(3) $\Rightarrow$ (1)显然.

习题34.3　设I是任意非空集, 对每个$i \in I$,令$e_i = \chi_{\{i\}}$. 证明函数族$\{e_i\}_{i \in I}$ 是Hilbert空间$\mathcal{L}_2(I)$ 的正交基.

解　对于每个i, 令$e_i = \chi_{\{i\}}$. 注意到函数族$\{e_i\}_{i \in I}$ 是正交族. 注意到如果$x = \{x_i\}_{i \in I} \in \mathcal{L}_2(I)$, 则

$$||x||^2 = \sum_{i \in I} |x_i|^2 = \sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2.$$

这证明$\{e_i\}_{i \in I}$ 是Hilbert空间$l_2(I)$ 的正交基.

习题34.4 设$\{e_i\}_{i\in I}$是Hilbert空间的正交基. 设$\boldsymbol{x}$是单位向量, 即$||\boldsymbol{x}||=1$. 证明, 对每个$k\in\mathbb{N}$, 集合$\{i\in I:|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i)|\geqslant 1/k\}$最多有$k^2$个元素.

解 由Parseval等式, 我们得到

$$1=||\boldsymbol{x}||^2=\sum_{i\in I}|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i)|^2.$$

令$A=\{i\in I:|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i)|\geqslant 1/k\}$. 如果$A$有多于$k^2$个元素, 则从$A$中选取$k^2+1$个指标, 我们得到

$$1=||\boldsymbol{x}||^2=\sum_{i\in I}|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i)|^2\geqslant(k^2+1)\frac{1}{k^2}>1,$$

这是不可能的. 因此, A至多具有k^2个元素.

习题34.5 设M是Hilbert空间的闭向量子空间, 令$\{e_i\}_{i\in I}$是M的正交基, 其中M本身被看成是诱导的运算下的Hilbert空间. 如果$\boldsymbol{x}\in H$, 证明离$\boldsymbol{x}$最近的M中的唯一向量(由定理33.6保证)为向量$\boldsymbol{y}=\sum_{i\in I}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i$.

解 设$\{e_i\}_{i\in I}$是Hilbert空间H的闭子集M的正交基, $\boldsymbol{x}\in H$是一固定向量. 首先注意到Parseval等式保证$\sum_{i\in I}|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i)|^2\leqslant||\boldsymbol{x}||^2$, 于是$\boldsymbol{y}=\sum_{i\in I}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i$是$M$中定义有意义的向量.

我们论证$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\perp M$. 为证明这一点, 设$\boldsymbol{z}$是$M$中的任意向量, 且作为$M$中的向量, $\boldsymbol{z}=\sum_{j\in I}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j$是它的Fourier级数展开, 则我们有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})&=\left(\sum_{j\in I}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j,x-\sum_{i\in I}(x,e_i)e_i\right)\\&=\sum_{j\in I}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{x})-\sum_{j\in I}\sum_{i\in I}((\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i)\\&=\sum_{j\in I}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_j,x)-\sum_{j\in I}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_j,x)=0.\end{aligned}$$

现设$\boldsymbol{z}$是M中的任意向量, 则$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\in M$, 于是$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\perp\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}$. 因此, 由Pythagorean定理,

$$||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}||^2=||(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})||^2=||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2+||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}||^2\geqslant||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2.$$

这表明$\boldsymbol{y}$是M中与$\boldsymbol{x}$距离最近的向量.

习题34.6 设$\{e_n\}$是可分Hilbert空间的正交基. 对每个n, 令$\boldsymbol{f}_n=\boldsymbol{e}_{n+1}-\boldsymbol{e}_n$. 证明由序列$\{\boldsymbol{f}_n\}$生成的向量子空间稠密.

解 我们需要证明如果对所有n, 有$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{f}_n$, 则$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 因此令$\boldsymbol{x}$是满足对每个$n$, $\boldsymbol{x}\perp(\boldsymbol{e}_{n+1}-\boldsymbol{e}_n)$的向量. 即,

$$0=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_{n+1}-\boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_{n+1})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_n).$$

这表明对每个n, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_{n+1})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_n)$. 如果我们令$\delta=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_1)$, 则对于所有的$n$, 有$\delta=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_n)$. 由Parseval等式

$$||\boldsymbol{x}||^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_n)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\delta^2.$$

因此, $\delta=0$, 所以有$||\boldsymbol{x}||=0$或$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

习题34.7 证明两个Hilbert空间之间的线性算子$L:H_1\to H_2$是保范的, 当且仅当它是保内积的.

解 设$L:H_1\to H_2$是两个Hilbert空间之间的线性算子. 如果L是保内积的, 则

$$||L\boldsymbol{x}||^2=(L\boldsymbol{x},L\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=||\boldsymbol{x}||^2,$$

或$||L\boldsymbol{x}||=||\boldsymbol{x}||,\boldsymbol{x}\in H_1$, 即$L$是保范的. 至于反方向, 假设$L$是保范的. 由定理32.6得

$$\begin{aligned}(Lx,Ly)&=\frac{1}{4}(||Lx+Ly||^2-||Lx-Ly||^2+\mathrm{i}||Lx+\mathrm{i}Ly||^2-\mathrm{i}||Lx-\mathrm{i}Ly||^2)\\&=\frac{1}{4}(||L(x+y)||^2-||L(x-y)||^2+\mathrm{i}||L(x+\mathrm{i}y)||^2-\mathrm{i}||L(x-\mathrm{i}y)||^2)\\&=\frac{1}{4}(||x+y||^2-||x-y||^2+\mathrm{i}||x+\mathrm{i}y||^2-\mathrm{i}||x-\mathrm{i}y||^2)\\&=(x,y).\end{aligned}$$

即, L是保内积的.

习题34.8 证明定义在非空集合Q上的所有平方可积复值函数组成的向量空间$\mathcal{L}_2(Q)$在内积

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{q\in Q}\boldsymbol{x}(q)\overline{\boldsymbol{y}(q)}$$

下是Hilbert空间.

解 函数$(\cdot,\cdot)$满足内积的性质的证明是直接的. 我们将证明$\mathcal{L}_2(Q)$是Hilbert空间, 即, 在它的诱导范数下是完备的.

为说明这一点, 假设Q是无限集, $\{\boldsymbol{x}_n\}\subseteq\mathcal{L}_2(Q)$是Cauchy序列. 由于对每个$n$, 我们有对于至多可数个$q\in Q$, 使得$\boldsymbol{x}_n(q)\neq 0$, 所以存在$Q$的至多可数子集$C$, 使得对所有$q\in Q\backslash C$和所有$n,x_n(q)=0$. 我们只考虑$C$是可数集的情况, 比如$C=\{q_1,q_2,\cdots\}$. 对每个$n$, 令

$$y_n=(x_n(q_1),\quad x_n(q_2),\cdots),$$

则容易得出我们能把$\{y_n\}$看成是$\mathcal{L}_2$中的Cauchy序列. $\mathcal{L}_2$的完备性隐含着$\{y_n\}$收敛于$\mathcal{L}_2$中的某个序列$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots)$. 如果$\boldsymbol{x}:Q\to\mathbb{C}$这样定义: $x(q_i)=y_i,x(q)=0,q\in Q\backslash C$, 则$x\in\mathcal{L}_2(Q)$且在$\mathcal{L}_2(Q)$中, $||\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}||=||\boldsymbol{y}_n-\boldsymbol{y}||\to 0$. 这表明$\mathcal{L}_2(Q)$是Hilbert空间.

习题34.9 设$\{e_i\}_{i\in I}$是Hilbert空间H的正交基. 证明线性算子$L:H\to\mathcal{L}_2(I)$, $L(\boldsymbol{x})=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i)\}_{i\in I}$是满的线性等距.

解 显然, L是线性的, 且由Parseval等式(定理34.2(5)), 它也是等距. 接下来, 我们将证明L也是满射. 设$\{\lambda_i\}_{i\in I}\in\mathcal{L}_2(I)$. 由$\sum_{i\in I}|\lambda_i|^2<\infty,\lambda_i\neq 0$对至多可数多个$i$成立. 假设$\{i\in I:\lambda_i\neq 0\}=\{\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\cdots\}$. (我们仅考虑可数的情况; 有限的情况是平凡的.)显然, $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_{i_n}|^2<\infty$.

由Pythagore定理, 我们有

$$\left\|\sum_{k=n}^{m}\lambda_{i_k}e_{i_k}\right\|^2=\sum_{k=n}^{m}|\lambda_{i_k}|^2,$$

由此得出级数$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{i_n}e_{i_n}$在$H$ 中范数收敛. 令$x=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{i_n}e_{i_n}=\sum_{i\in I}\lambda_i e_i$, 则对每个$i$, $(x, e_i)=\lambda i$, 于是$L(x)=\{\lambda_i\}_{i\in I}$. 这表明L也是满射, 得证.

习题34.10 设$\{e_n\}$ 是Hilbert空间$L_2[0,2\pi]$ 中正交的向量列. 设对$L_2[0,2\pi]$ 中的每一个连续函数f, 我们有$f=\sum_{n=1}^{\infty}(f,e_n)e_n$. 证明$\{e_n\}$ 是正交基.

解 我们仅需证明$\{e_n\}$ 的线性扩张是稠密的. 设$\varepsilon>0, g\in L_2[0,2\pi]$. 由于连续函数在$L_2[0,2\pi]$ 中稠密(见定理31.10), 存在连续函数$f\in L_2[0,2\pi]$, 使得$\|f-g\|\leqslant\varepsilon$. 由我们的假设, $f=\sum_{n=1}^{\infty}(f,e_n)e_n$. 由Bessel不等式, 我们得到$\sum_{n=1}^{\infty}|(f,e_n)^2|<\infty$. 然后, 选取一个整数m, 使得$[\sum_{k=m}^{\infty}|f,e_k|^2]^{\frac{1}{2}}<\varepsilon$. 再令$h=\sum_{k=1}^{m}(f,e_k)e_k$, 则$h$在序列$\{e_n\}$ 的线性扩张中, 而且

$$\begin{aligned}\|g-h\|&=\left\|g-\sum_{k=1}^{m}(f,e_k)e_k\right\|\leqslant\|g-f\|+\left\|\sum_{k=m+1}^{\infty}(f,e_k)e_k\right\|\\&\leqslant\|g-f\|+\left[\sum_{k=m+1}^{\infty}|(f,e_k)|^2\right]^{\frac{1}{2}}<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.\end{aligned}$$

从而, $\{e_n\}$ 的线性扩张是稠密的, 因此, $\{e_n\}$ 是完备的正交集, 即它是正交基.

习题34.11 设$\{\phi_n\}$ 是Hilbert空间$L_2[0,2\pi]$ 中正交的向量列. 假设对每个连续函数$f\in L_2[0, 2\pi]$, 我们有$\|f\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(f,\phi_n)|^2$. 证明$\{\phi_n\}$ 是正交基.

解 只须证明$\{\phi_n\}$ 的线性扩张稠密就足够了. 设$\varepsilon>0$, $g\in L_2[0,2\pi]$. 由于连续函数在$L_2[0,2\pi]$ 中稠密, 存在连续函数$f\in L_2[0,2\pi]$, 使得$\|f-g\|<\varepsilon$.

由假设, 我们有$\|f\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(f,\phi_n)|^2$. 选取一个整数m, 使得$[\sum_{k=m}^{\infty}|(f,\phi_k)|^2]^{\frac{1}{2}}<\varepsilon$, 注意到

$$\left\|g-\sum_{k=1}^{m}(f,\phi_k)\phi_k\right\|\leqslant\|g-f\|+\left\|f-\sum_{k=1}^{m}(f,\phi_k)\phi_k\right\|.$$

再次利用假设, 我们得到

$$\begin{aligned}\left\|g-\sum_{k=1}^{m}(f,\phi_k)\phi_k\right\|&\leqslant\|g-f\|+\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(f-\sum_{i=1}^{m}(f,\phi_i)\phi_i,\phi_k\right)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\|g-f\|+\left[\sum_{k=m+1}^{\infty}|(f,\phi_k)|^2\right]^{\frac{1}{2}}<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.\end{aligned}$$

从而$\{\phi_n\}$ 的线性扩张稠密, 因此$\{\phi_n\}$ 是正交基.

习题34.12 设$\{\phi_1,\phi_2,\cdots\}$ 是Hilbert空间$L_2(\mu)$ 的正交基, 其中μ 是有限测度. 固定一个函数$f\in L_2(\mu)$, 令$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\}$ 是它关于$\{\phi_n\}$ 的Fourier系数的序列, 即$\alpha_n=\int f\overline{\phi_n}\mathrm{d}\mu$. 证

明(虽然级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\phi_n$ 并不一定几乎处处收敛于f)Fourier级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\phi_n$ 能够逐项积分, 即对于每个可测集E, 我们有

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\int_E\phi_n\mathrm{d}\mu.$$

解 令$s_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_n\phi_n$ ，注意到$\|f-s_n\|\to 0$. 利用Cauchy-Schwarz不等式, 我们得到

$$\begin{aligned}\left|\int_E f\mathrm{d}\mu-\int_E s_n\mathrm{d}\mu\right|^2=\left|\int_E(f-s_n)\mathrm{d}\mu\right|^2&\leqslant\left(\int_E|f-s_n|\mathrm{d}\mu\right)^2\\&\leqslant\int_E|f-s_n|^2\mathrm{d}\mu\cdot\int_E 1^2\mathrm{d}\mu\\&\leqslant\|f-s_n\|^2\mu^*(E)\to 0.\end{aligned}$$

因此, $\int_E f\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\int_E\phi_n\mathrm{d}\mu$.

习题34.13 证明如下正交基的“摄动”性质. 如果$\{e_i\}_{i\in I}$ 是正交基, $\{f_i\}_{i\in I}$ 是满足$\sum_{i\in I}\|e_i-\boldsymbol{f}_i\|^2<\infty$ 的另一个正交族, 证明$\{f_i\}_{i\in I}$ 也是正交基.

解 设$\{e_i\}_{i\in I}$ 是Hilbert空间H的正交基, $\{\boldsymbol{f}_i\}_{i\in I}$ 是另一个满足$\sum_{i\in I}\|e_i-\boldsymbol{f}_i\|^2<\infty$ 的正交族. 为证明正交族$\{\boldsymbol{f}_i\}_{i\in I}$ 是正交基, 只须证明如果向量$\boldsymbol{u}$ 对于每个$i\in I$, 都有$\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{f}_i$, 则$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$. 因此, 固定一个$\boldsymbol{u}\in H$ 使得对每个$i\in I$, $\boldsymbol{u}\perp f_i$.

由$\sum_{i\in I}\|e_i-\boldsymbol{f}_i\|<\infty$, 我们知道$J=\{i\in I:\boldsymbol{f}_i\neq e_i\}$ 是至多可数的. 我们分两种情况讨论.

第一种情况: J是有限的, 比如$J=\{k_1,k_2,\cdots k_l\}$.

令$M=\{\boldsymbol{y}\in H:\boldsymbol{y}\perp\boldsymbol{f}_i$, 对所有的$i\notin J\}$, 则$M$是$H$的闭向量子空间, 并且满足$\{\boldsymbol{f}_{k_1},\cdots,\boldsymbol{f}_{k_l}\}\subseteq M$且$\{\boldsymbol{e}_{k_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_l}\}\subseteq M$. 我们将论证$\{\boldsymbol{e}_{k_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_l}\}$ 必定是M的正交基. 事实上, 如果$\boldsymbol{x}\in M$, 并且对$r=1,2,\cdots l$, 有$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{e}_{k_r}$, 则(考虑到对每个$i\notin J,\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{f}_i=\boldsymbol{e}_i$), 对每个$i\in I$, 我们有$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{e}_i$. 由于$\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in I}$ 是H的正交基, 得出$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 因此, $\{\boldsymbol{e}_{k_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{k_l}\}$ (作为正交基)也是M的Hamel基, 从而M是l维的, 这表明$\{\boldsymbol{f}_{k_1},\cdots,\boldsymbol{f}_{k_l}\}$ 也是Hamel基. 后者表明每个e_{k_r} 是向量$\boldsymbol{f}_{k_1},\cdots,\boldsymbol{f}_{k_r}$ 的线性组合. 因此, 对每个$r=1,2,\cdots l$, 有$\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{e}_{k_r}$, 因此对所有$i\in I$, $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{e}_i$. 这表明$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$, 因此, 在这种情况下, $\{\boldsymbol{f}_i\}_{i\in I}$ 是正交基.

第二种情况: J是可数的, 比如$J=\{k_1,k_2,k_3,\cdots\}$.

在这种情况下, 选取一个自然数l, 使得

$$\sum_{j=l+1}^{\infty}\|\boldsymbol{e}_{k_j}-\boldsymbol{f}_{k_j}\|^2=\delta<1,$$

且令$J_1=\{k_1,k_2,\cdots,k_l\}$. 然后, 定义向量

$$\boldsymbol{g}_r=\boldsymbol{e}_{k_r}-\sum_{j=l+1}^{\infty}(\boldsymbol{e}_{k_r},\boldsymbol{f}_{k_j})\boldsymbol{f}_{k_j},r=1,2,\cdots,l.$$

我们论证以下命题:

- 如果一个向量$\boldsymbol{x}\in H$ 满足$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{g}_r,r=1,2,\cdots l$ 且$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{f}_j,j\notin J_1$, 则$\boldsymbol{x}=0$.

为说明这点, 假设向量$\boldsymbol{x} \in H$与$\boldsymbol{g}_r, r=1,2,\cdots l$和$\boldsymbol{f}_j, j \notin J_1$ 正交. 则因为$j \notin J_1$，我们有$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_j)=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_j-\boldsymbol{f}_j)$，且对每个$1 \leqslant r \leqslant l$，我们有

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_{k_r})=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g}_r)+\sum_{j=l+1}^{\infty}(\boldsymbol{e}_{k_r}, \boldsymbol{f}_{k_j})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}_{k_j})=0.$$

现由Parseval等式, 我们有

$$\begin{aligned}||x||^2 &= \sum_{i \in I}|(x, e_i)|^2=\sum_{j=l+1}^{\infty}|(x, e_{k_j}-f_{k_j})|^2 \\ &\leqslant \left[\sum_{j=l+1}^{\infty}||e_{k_j}-f_{k_j}||^2\right]||x||^2=\delta||x||^2\end{aligned}$$

这表明$0 \leqslant (1-\delta)||\boldsymbol{x}||^2 \leqslant 0$或$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得证.

现在, 我们考虑闭向量子空间

$$M=\{\boldsymbol{y} \in H: \boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{f}_i, \text{ 对所有} i \notin J_1\}.$$

显然, $\{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_l\} \subseteq M$. 而且如果某个向量$\boldsymbol{x} \in M$ 与$\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_l$ 正交, 则由性质$(\cdot)$, 我们有$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 这表明由$\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_l$ 生成的向量空间等于M. 由于正交向量$\boldsymbol{f}_{k_1}, \boldsymbol{f}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{f}_{k_l}$ 属于M, M是有限维的, 于是$\{\boldsymbol{f}_{k_1}, \boldsymbol{f}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{f}_{k_l}\}$ 是M的Hamel基. 特别地, 对于$1 \leqslant r \leqslant l$，向量$\boldsymbol{g}_r$是向量$\boldsymbol{f}_{k_1}, \boldsymbol{f}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{f}_{k_l}$ 的线性组合. 这表明$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{g}_r, 1 \leqslant r \leqslant l$, 和$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{f}_j, j \in J_1$. 再次利用(・), 我们得出$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$. 因此, 正交族$\{\boldsymbol{f}_i\}_{i \in I}$ 是正交基.

35. Fourier分析

习题35.1 证明$\sin^n x$ 是$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \cdots, \sin nx, \cos nx\}$ 的线性组合, 并证明n是奇数时, 含cos的项的系数为零, n是偶数时, 含sin的项的系数为零.

解 观察到

$$\sin x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}},$$

再利用二项式定理, 我们得到

$$\begin{aligned}\sin^n x &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^n=\frac{1}{(2\mathrm{i})^n}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{n!(-1)^k}{k!(n-k)!}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right] \\ &= \frac{1}{(2\mathrm{i})^n}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{n!(-1)^k}{k!(n-k)!}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-2k)x}\right] \\ &= \frac{1}{(2\mathrm{i})^n}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{n!(-1)^k}{k!(n-k)!}(\cos(n-2k)x+\mathrm{i}\sin(n-2k)x)\right] \\ &= \frac{1}{(2\mathrm{i})^n}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{n!(-1)^k}{k!(n-k)!}\cos(n-2k)x\right]+\frac{\mathrm{i}}{(2\mathrm{i})^n}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{n!(-1)^k}{k!(n-k)!}\sin(n-2k)x\right].\end{aligned}$$

现注意到如果n是奇数, 则$i^n = \pm i$, 如果n是偶数, 则$i^n = \pm 1$. 由于$\sin^n x$ 等于上面的表达式的实部, 我们得到如下的两种情形:

$$\sin^n x = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{n!(-1)^k}{k!(n-k)!} \cos(n-2k)x \right], n\text{是偶数时},$$

$$\sin^n x = \frac{i}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{n!(-1)^k}{k!(n-k)!} \sin(n-2k)x \right], n\text{是奇数时}.$$

习题35.2 证明Dirichlet核D_n和Fejér核k_n满足

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\mathrm{d}t = 1.$$

解 Dirichlet核为:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt$$

两边积分, 得:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt\mathrm{d}t = 1.$$

同样, Fejér核定义如下:

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t),$$

两边积分, 并利用前面关于Dirichlet核的结果,我们得到:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} 1 = 1.$$

习题35.3 设X表示定义在$[0, 2\pi]$ 上的连续周期实值函数形成的Banach空间. 固定某个$x \in (0, 2\pi]$, 定义线性泛函, $S_n : X \to \mathbb{R}$,

$$S_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t.$$

证明线性泛函S_n的范数满足

$$||S_n|| = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(x-t)|\mathrm{d}t$$

解 S_n的范数定义如下:

$$||S_n|| = \sup_{||f||_\infty \leqslant 1} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t \right|.$$

由于$||f||_\infty \leqslant 1$, 则有$|f(t)D(x-t)| \leqslant |D(x-t)|$, 于是

$$||S_n|| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(x-t)|\mathrm{d}t.$$

接下来, 我们将证明相反的不等式. 由于Dirichlet核的周期为2π , 得出连续函数

$$f(\varepsilon,t)=\frac{D_n(x-t)}{|D_n(x-t)|+\varepsilon}$$

关于t的周期也为2π . 显然对每个t和所有$\varepsilon>0$, $|f(\varepsilon,t)|\leqslant 1$. 这蕴含着

$$||S_n||\geqslant S_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|D_n(x-t)|^2}{|D_n(x-t)|+\varepsilon}\mathrm{d}t.$$

考虑到定理24.4, 令$\varepsilon\to 0^+$ 得到

$$||S_n||\geqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|D_n(x-t)|\mathrm{d}t.$$

因此, $||S_n||=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|D_n(x-t)|\mathrm{d}t$.

习题35.4 证明函数列

$$\left\{\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac12},\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac12}\cos x,\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac12}\cos 2x,\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac12}\cos 3x,\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac12}\cos 4x,\cdots\right\}$$

是$L_2[0,\pi]$ 的正交基, 并证明上面的序列是$L_2[0,2\pi]$ 的正交函数列, 但不完备.

解 容易证明函数

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac12},\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac12}\cos x,\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac12}\cos 2x,\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac12}\cos 3x,\cdots$$

两两正交, 且在$L_2[0,\pi]$中的范数为1.

为证明上面的序列是完备的(即它是正交基), 我们需要证明如果$f\in L_2[0,\pi]$ 正交于函数$1,\cos x,\cos 2x,\cos 3x,\cdots$, 则$f=0$. 因此假设函数$f\in L_2[0,\pi]$, 且对所有的$n=0,1,2,\cdots$, $\int_0^\pi f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0$. 定义函数$g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ f(2\pi-x), & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

在$L_2[0,2\pi]$ 中, 对每个n, 我们有

$$\begin{aligned}(g,\cos nx)&=\int_0^{2\pi}g(x)\cos nx\mathrm{d}x\\&=\int_0^\pi f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_\pi^{2\pi}f(2\pi-x)\cos nx\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

作变量代换$t=2\pi-x$, 得

$$(g,\cos nx)=\int_0^\pi f(t)\cos nt\mathrm{d}t+\int_0^\pi f(t)\cos nt\mathrm{d}t=0.$$

然后, 观察到

$$(g,\sin nx)=\int_0^{2\pi}g(x)\sin nx\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_0^{2\pi}f(2\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi} f(t)\sin nt\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} f(t)\sin nt\mathrm{d}t = 0.$$

上述表明g与$L_2[0,2\pi]$ 的完备正交列的每个向量垂直, 从而$g=0$, 因此$f=0$. 所以, 序列

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos x, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos 2x, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos 3x, \cdots$$

是$L_2[0,\pi]$ 的正交基.

为证明正交集

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos x, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos 2x, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos 3x, \cdots$$

在$L_2[0,2\pi]$ 中不完备, 注意到非零函数$\sin x$与$L_2[0,2\pi]$ 中的这些函数中的每一个正交.

习题35.5　证明函数列

$$\left\{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin x, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin 2x, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin 3x, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin 4x, \cdots\right\}$$

是$L_2[0,\pi]$ 的正交基, 并证明这个函数集是$L_2[0,2\pi]$ 的正交函数集, 但不完备.

解　容易证明函数集

$$\left\{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin x, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin 2x, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin 3x, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin 4x, \cdots\right\}$$

是$L_2[0,\pi]$ 的正交函数集.

因此, 为证明它是正交基, 我们需要证明如果函数$f\in L_2[0,\pi]$ 在$L_2[0,\pi]$ 中与前述集合中的每个函数正交, 则$f=0$. 因此假设$f\in L_2[0,\pi]$ 满足

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0, \quad n = 1,2,3,\cdots.$$

定义函数　$g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 0\leqslant x\leqslant \pi \\ -f(2\pi - x), & \pi < x \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

则对每个n, 我们有

$$\begin{aligned}(g,\sin nx) &= \int_0^{2\pi} g(x)\sin nx\ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} f(x)\sin nx\ \mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} f(2\pi - x)\sin nx\ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} f(t)\sin nt\ \mathrm{d}t + \int_0^{\pi} f(t)\sin nt\ \mathrm{d}t = 0+0=0.\end{aligned}$$

然后, 注意到

$$
\begin{aligned}
(g, \cos nx) &= \int_0^{2\pi} g(x) \cos nx \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} f(2\pi - x) \cos nx \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, \mathrm{d}t - \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, \mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}
$$

因此, g在$L_2[0,\pi]$中与完备正交集中的每一个向量正交, 从而$g=0$, 所以$f=0$. 因此, 正交函数集

$$\left\{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin x, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin 2x, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin 3x, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin 4x, \cdots\right\}$$

是$L_2[0,\pi]$ 的正交基.

为说明正交函数集

$$\left\{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin x, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin 2x, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin 3x, \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin 4x, \cdots\right\}$$

在$L_2[0,2\pi]$ 中不完备, 注意到$\cos x$ 与这些函数中的每一个正交.

习题35.6 *最初的Weierstrass逼近定理证明了每一个周期为2π 的连续函数能够由三角多项式一致逼近. 证明这个结果.*

解 Weierstrass最初给出一个直接的证明, 然而, 这个结果能够从Fejér定理35.8直接获得. 设f是定义在整个实直线上的周期为2π 的连续函数. 选取$\varepsilon > 0$. 设$\{S_n\}$ 是f的Fourier级数的部分和序列, $\{\sigma_n\}$ 是序列的算术均值.

由定理35.8, 我们知道序列$\{\sigma_n\}$ 在$[0,2\pi]$ 上一致收敛于f. 注意到每个σ_n 是三角多项式, 所以论述得到证明.

习题35.7 *确定函数*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant x < 2\pi. \end{cases}$$

的Fourier系数.

解 Fourier系数由以下公式给出:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}, \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi} \sin(n\frac{\pi}{2}), \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi} \left[\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 1\right].
\end{aligned}
$$

简化得到:

$$a_0 = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2, 4, 6, \cdots \\ 1/n\pi, & n = 1, 5, 9, \cdots \\ -1/n\pi, & n = 3, 7, 11, \cdots, \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 1/n\pi, & n = 1, 3, 5, \cdots \\ 2/n\pi, & n = 2, 6, 10, \cdots \\ 0, & n = 4, 8, 12, \cdots. \end{cases}$$

习题35.8 确定函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leqslant x < \pi \\ -\sin x & \pi \leqslant x < 2\pi \end{cases}$$

的Fourier级数.

解 函数f是连续的、周期的偶函数, 它的Fourier系数为:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}, \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}, \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \ \mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi(n^2-1)}, & \text{若}n\text{是偶数} \\ 0, & \text{若}n\text{是奇数}. \end{cases}$$

$$b_n = 0.$$

于是, f的Fourier级数为$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$. 由于这个级数在每个$x$收敛, 且周期函数$f$处处连续, 所以由推论35.9知, 级数对每个$x$都收敛于$f(x)$, 即我们有

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$$

习题35.9 证明对每个$0 < x < 2\pi$, 我们有

$$x = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

解 我们考虑周期函数$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 2\pi \\ 0, & x = 2\pi. \end{cases}$$

计算f的Fourier函数, 我们得到

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2\pi}\right|_0^{2\pi} = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\,\mathrm{d}(\sin nx)$$
$$= \frac{1}{n\pi}\left[x\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right] = 0,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\,\mathrm{d}(\cos nx)$$
$$= -\frac{1}{n\pi}\left[x\cos nx\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right] = -\frac{1}{n\pi}\left[2\pi - \frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi}\right] = -\frac{2}{n}.$$

于是, 函数f的Fourier级数为$\pi - 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. 考虑到函数$f$在每一个$0 < x < 2\pi$ 连续以及上述的Fourier级数在每个$0 < x < 2\pi$ 收敛(见例9.7), 由推论35.9得到

$$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

对每个$0 < x < 2\pi$ 成立.

习题35.10 证明对所有的$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$,

$$\frac{x^2}{2} = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

令$x = 0$, 我们获得公式$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

解 考虑周期函数$f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2/2 - \pi x$. 计算它的Fourier系数, 我们得到

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{x^2}{2} - \pi x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{\pi x^2}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = -\frac{2\pi^2}{3},$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{x^2}{2} - \pi x\right)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2},$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{x^2}{2} - \pi x\right)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

因此, 函数f的Fourier级数为$\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$. 由于级数对每个x都收敛, 而且f是连续函数, 所以由推论35.9得

$$\frac{x^2}{2} - \pi x = -\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},$$

得到我们所要的等式.

习题35.11 证明对每个$0 < x < 2\pi$,

$$x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{x\sin nx}{n}\right).$$

解 考虑周期函数$f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x < 2\pi \\ 0, & x = 2\pi. \end{cases}$$

计算f的Fourier系数, 我们得到

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3\pi}\bigg|_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\pi^2,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{4}{n^2},$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx \,\mathrm{d}x = -\frac{4\pi}{n}.$$

因此, 函数f的Fourier级数为$\frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi\sin nx}{n}\right)$. 由于这个级数在每个$x$处收敛(见例9.7), 且$f$在每个$0 < x < 2\pi$ 连续, 由推论35.9得到, 对每个$0 < x < 2\pi$,

$$x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi\sin nx}{n}\right).$$

习题35.12　考虑"积分"算子$T: L_2[0,\pi] \to L_2[0,\pi]$.

$$Tf(x) = \int_0^{\pi} K(x,t)f(t)\mathrm{d}t,$$

其中核$K: [0,\pi]\times[0,\pi] \to \mathbb{R}$ 由

$$K(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\sin(n+1)x]\sin nt}{n^2}$$

给出. 证明算子T的范数满足$||T|| = \pi/2$.

解　由习题35.5, 我们知道函数列$\{(\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}\sin nx, n = 1,2,\cdots\}$ 是$L_2[0,\pi]$ 的正交基. 而且, 像通常一样, 算子的范数为

$$||T|| = \sup\{||T(f)|| : f \in L_2[0,\pi], ||f|| = 1\}.$$

固定函数$f \in L_2[0,\pi], ||f|| = 1$, 并记f关于上述基的Fourier展开, 即$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}\sin nx$. 由Parseval等式, 我们有

$$||f||^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2.$$

其次, 注意到算子满足

$$\begin{aligned}Tf(x) &= \int_0^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\ \sin nt}{n^2}\right]\left[\sum_{m=1}^{\infty}c_m\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin mt\right]\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(n+1)x}{n^2}\left(\int_0^{\pi}\sin nt\sum_{m=1}^{\infty}c_m\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin mt\ \mathrm{d}t\right)\right]\\ &= \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{c_n}{n^2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin(n+1)x\right].\end{aligned}$$

现在注意到后面这个表达式是$T(f)$关于解答一开始就描述的正交基的Fourier 展开, 从而, 由Parseval 等式, 我们有

$$||T(f)||^2 = \frac{\pi^2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|c_n|^2}{n^4} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 = \frac{\pi^2}{4}||f||^2,$$

由此得到$||T|| \leqslant \pi/2$.

最后, 如果$f_0(x) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}\sin x$, 则$||f_0|| = 1$, 且由Parseval等式, 我们有$c_1 = 1, c_n = 0, n \neq 1$, 于是$||T(f_0)||^2 = \pi^2/4$. 从而$||T|| \geqslant \pi/2$, 所以$||T|| = \pi/2$.

第 7 章 积分中的专题

36. 符号测度

习题36.1 举例说明：在X 中存在符号测度[1] 和关于这个符号测度的两个Hahn分解[2](A, B) 和 (A_1, B_1)，使得$A \neq A_1$ 及$B \neq B_1$.

解 令$X = \mathbb{R}$ ，并设Σ 是所有Lebesgue可测集所构成的σ 代数. 考虑测度$\mu_1, \mu_2 \in M(\Sigma)$，它定义为对每一个集合$E \in \Sigma$ ，$\mu_1(E) = \lambda(E \cap [0,1])$ 及$\mu_2(E) = \lambda(E \cap [1,2])$ (其中λ 表示$\mathbb{R}$ 上的Lebesgue测度). 进一步考虑符号测度$\mu = \mu_1 - \mu_2$，注意到$((-\infty, 1)\,, [1, \infty)\,)$及$([0,1)\,, (-\infty, 0) \cup [1, \infty)\,)$是关于符号测度$\mu$ 的X 的两个Hahn分解，于是得到我们所需要的结果.

习题36.2 若μ 是一个符号测度，证明$\mu^+ \wedge \mu^- = 0$.

解 设(A, B) 是关于μ 的X 的Hahn分解. 若$E \in \Sigma$，则有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \mu^+ \wedge \mu^-(E) &= \mu^+ \wedge \mu^-(E \cap B) + \mu^+ \wedge \mu^-(E \cap A) \\ &\leqslant \mu^+(E \cap B) + \mu^-(E \cap A) \\ &= \mu(E \cap B \cap A) - \mu(E \cap A \cap B) = 0. \end{aligned}$$

习题36.3 若μ 是一个符号测度，证明对每一个$A \in \Sigma$ ，我们有

$$|\mu|(A) = \sup\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| : \{A_n\}\text{是}\Sigma\text{中一个互不相交的序列且} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \right\}.$$

解 固定$A \in \Sigma$ ，由定理36.9，我们有

$$|\mu|(A) = \sup\left\{ \sum_{n=1}^{k} |\mu(A_n)| : \{A_1, \cdots, A_k\} \subseteq \Sigma\text{互不相交且} \bigcup_{n=1}^{k} A_n \subseteq A \right\}.$$

另外设

$$s = \sup\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| : \{A_n\} \subseteq \Sigma\text{互不相交且} A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}.$$

---

1. 集合函数$\mu : \Sigma \to \mathbb{R}^*$称作符号测度，如果它满足如下性质：
   ① μ最多取$-\infty$和∞中的一个.
   ② $\mu(\phi) = 0$.
   ③ μ是σ可加的，即如果$\{A_n\}$是Σ中互不相交的序列，则$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.
   ——译者注

2. 设μ是Σ上的符号测度，两个不相交的集合A, B满足$A \geqslant 0, B \leqslant 0$且$A \cup B = X$，则$(A, B)$叫作$X$关于测度$\mu$的Hahn分解. 其中$A \geqslant 0$指的是，对任意$E \in \Sigma, \mu(E \cap A) \geqslant 0$. ——译者注

现在令$\{A_n\}$ 是Σ 中一个使得$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ 的互不相交的序列. 显然, $\sum_{n=1}^{k} |\mu(A_n)| \leqslant |\mu|(A)$ 对每个k 成立, 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |\mu(A_n)| \leqslant |\mu|(A).$$

因此, $s \leqslant |\mu|(A)$. 另一方面, 若$\{A_1, \cdots, A_k\}$ 是Σ 中有限个两两不交的元素构成的集合体, 满足$\bigcup_{n=1}^{k} A_n \subseteq A$, 则

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_k \cup (A \setminus \bigcup_{n=1}^{k} A_k) \cup \varnothing \cup \varnothing \cdots,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{k} |\mu(A_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{k} |\mu(A_n)| + \left|\mu(A \setminus \bigcup_{n=1}^{k} A_n)\right| + \mu(\varnothing) + \mu(\varnothing) + \cdots \leqslant s.$$

因此, $|\mu|(A) \leqslant s$. 同样成立. 从而, 如同所断言的, $|\mu|(A) = s$.

习题36.4 证明若μ 和ν 是两个有限符号测度, 则在$M(\Sigma)$ 中的最小上界$\mu \vee \nu$ 和最大下界$\mu \wedge \nu$ 由下式给出; 对每一$A \in \Sigma$,

$$\mu \vee \nu(A) = \sup\{\mu(B) + \nu(A \setminus B) : B \in \Sigma \text{且} B \subseteq A\}.$$

$$\mu \wedge \nu(A) = \inf\{\mu(B) + \nu(A \setminus B) : B \in \Sigma \text{且} B \subseteq A\}.$$

解 证明与定理36.1[1]的证明平行. 我们将证明若$\mu, \nu \in M(\Sigma)$, 则公式

$$\omega(A) = \inf\{\mu(B) + \nu(A \setminus B) : B \in \Sigma \text{且} B \subseteq A\}, A \in \Sigma,$$

定义了一个有限符号测度(即, $\omega \in M(\Sigma)$), 并且ω 是$M(\Sigma)$ 中μ 和ν 的最大下界.

因为μ 和ν 都有下界(同样也有上界), 所以对每个$A \in \Sigma, \omega(A) \in \mathbb{R}$. 显然, $\omega(\phi) = 0$ 成立. 下面我们将证明ω 是σ 可加的. 为此, 设$\{A_n\}$ 是Σ 中一个互不相交的序列且$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. 若$B \in \Sigma$ 满足$B \subseteq A$, 则

$$\begin{aligned}\mu(B) + \nu(A \setminus B) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B\right) + \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_n \cap B)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [\mu(A_n \cap B) + \nu(A_n \setminus A_n \cap B)] \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \omega(A_n),\end{aligned}$$

1. Σ上所有测度的全体形成一个格, 其中对于每一对测度μ和ν , 格运算定义为:
$\mu \vee \nu(A) = \sup\{\mu(B) + \nu(A \setminus B) : B \in \Sigma \text{且} B \subseteq A\}$
$\mu \wedge \nu(A) = \inf\{\mu(B) + \nu(A \setminus B) : B \in \Sigma \text{且} B \subseteq A\}$
其中$A \in \Sigma$, 而且, $\mu \wedge \nu + \mu \vee \nu = \mu + \nu$. ——译者注

因此$\omega(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \omega(A_n)$ 成立. 对于反向不等式, 令$\varepsilon > 0$, 则对每个n取$B_n \in \Sigma$ 满足$B_n \subseteq A_n$, 且

$$\mu(B_n) + \nu(A_n \backslash B_n) < \omega(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

显然, $\{B_n\}$ 是Σ 中一个两两不交的序列. 记$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq A$, 则$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \backslash B_n) = A \backslash B$ 成立, 而且

$$\begin{aligned}
\omega(A) \leqslant \mu(B) + \nu(A \backslash B) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) + \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \backslash B_n)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}[\mu(B_n) + \nu(A_n \backslash B_n)] \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left[\omega(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \omega(A_n) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

由于$\varepsilon > 0$ 是任意的, 我们推出$\omega(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \omega(A_n)$ 同样成立, 于是$\omega \in M(\Sigma)$. 最后, 我们证明ω 是$M(\Sigma)$ 中μ 和ν 的最大下界. 首先可以证明ω 既是μ 又是ν 的下界. 事实上, 若$A \in \Sigma$, 则(令$B = A$), 我们得到

$$\omega(A) \leqslant \mu(A) + \nu(\varnothing) = \mu(A) \quad 且 \quad \omega(A) \leqslant \mu(\varnothing) + \nu(A) = \nu(A).$$

另一方面, 若$\pi \in M(\Sigma)$ 满足$\pi \leqslant \mu$ 及$\pi \leqslant \nu$, $A \in \Sigma$, 则对每个$B \in \Sigma$ 且$B \subseteq A$, 我们有

$$\pi(A) = \pi(B) + \pi(A \backslash B) \leqslant \mu(B) + \nu(A \backslash B),$$

于是$\pi(A) \leqslant \omega(A)$, 即$\pi \leqslant \omega$. 这表明$\omega = \mu \wedge \nu$ 在$M(\Sigma)$ 中成立.

习题36.5　设λ 是$\mathbb{R}$ 的Lebesgue可测子集上的Lebesgue测度. 若μ 是Dirac测度, 定义为当$0 \notin A$ 时$\mu(A) = 0$, 当$0 \in A$ 时$\mu(A) = 1$, 叙述$\lambda \vee \mu$ 及$\lambda \wedge \mu$.

解　若$A = \mathbb{R} \backslash \{0\}, B = \{0\}$, E 是任意一个Lebesgue可测集, 则

$$0 \leqslant \lambda \wedge \mu(E) \leqslant \lambda(E \cap B) + \mu(E \cap A) = 0$$

成立, 即$\lambda \wedge \mu = 0$. 另外我们有

$$\lambda \vee \mu = \lambda \vee \mu + \lambda \wedge \mu = \lambda + \mu.$$

习题36.6　证明所有的σ 有限测度形成一个分配格, 即证明若μ, ν 和ω 是三个σ 有限测度, 则

$$(\mu \vee \nu) \wedge \omega = (\mu \wedge \omega) \vee (\nu \wedge \omega) \quad 且 \quad (\mu \wedge \nu) \vee \omega = (\mu \vee \omega) \wedge (\nu \vee \omega).$$

解　我们先证明每个向量格满足分配律. 为此, 我们应用习题9.1的等式(a).

设x, y和z是一向量格中的元素. 由于$x \vee y \geqslant x$, 则有$(x \vee y) \wedge z \geqslant x \wedge z$, 同理$(x \vee y) \wedge z \geqslant y \wedge z$. 于是,

$$(x \vee y) \wedge z \geqslant (x \wedge z) \vee (y \wedge z).$$

另一方面, 若$u=(x\wedge z)\vee(y\wedge z)$, 则$u\geqslant x\wedge z=x+z-x\vee z$成立. 因此, $x\leqslant u-z+(x\vee y)\vee z$, 同理$y\leqslant u-z+(x\vee y)\vee z$. 于是$x\vee y\leqslant u-z+(x\vee y)\vee z$, 故

$$(x\wedge z)\vee(y\wedge z)=u\geqslant x\vee y+z-(x\vee y)\vee z=(x\vee y)\wedge z.$$

从而, $(x\vee y)\wedge z=(x\wedge z)\vee(y\wedge z)$ 成立. 另一个等式用类似的方式可以证明.

现在设$\{X_n\}\subseteq\Sigma$ 满足对所有n, $\mu(X_n)<\infty,\nu(X_n)<\infty,\omega(X_n)<\infty$ 且$X_n\uparrow X$. 若$\Sigma_n=\{A\cap X_n: A\in\Sigma\}$, 则显然$\mu,\nu$ 和ω (限制于Σ_n)属于向量格$M(\Sigma_n)$. 于是若$E\in\Sigma$, 则

$$(\mu\vee\nu)\wedge\omega(E\cap X_n)=(\mu\wedge\omega)\vee(\nu\wedge\omega)(E\cap X_n)$$

和

$$(\mu\wedge\nu)\vee\omega(E\cap X_n)=(\mu\vee\omega)\wedge(\nu\vee\omega)(E\cap X_n)$$

成立. 注意到$E\cap X_n\uparrow E$, 然后应用测度的"有序连续性"(定理15.4)就可以完成我们的证明).

习题36.7 若Σ 是由集合X 的子集构成的σ 代数, $\mu:\Sigma\to\mathbb{R}^*$ 是一符号测度, 证明$\Lambda_{\mu^+}\cap\Lambda_{\mu^-}=\Lambda_{|\mu|}$.

解 假设$\mu:\Sigma\to\mathbb{R}^*$ 是任一符号测度. 令E 属于$\Lambda_{\mu^+}\cap\Lambda_{\mu^-}$ 且设$A\in\Sigma$ 是任一集合. 则有

$$\begin{aligned}|\mu|(A)&=\mu^+(A)+\mu^-(A)\\&=[\mu^+(A\cap E)+\mu^+(A\cap E^c)]+[\mu^-(A\cap E)+\mu^-(A\cap E^c)]\\&=[\mu^+(A\cap E)+\mu^-(A\cap E)]+[\mu^+(A\cap E^c)+\mu^-(A\cap E^c)]\\&=|\mu|(A\cap E)+|\mu|(A\cap E^c).\end{aligned}$$

所以$E\in\Lambda_{|\mu|}$, 即$\Lambda_{\mu^+}\cap\Lambda_{\mu^-}\subseteq\Lambda_{|\mu|}$.

对于反向包含, 令$E\in\Lambda_{|\mu|}$. 若$A\in\Sigma$ 是任一集合, 则有

$$\begin{aligned}\mu^+(A)+\mu^-(A)=|\mu|(A)&=|\mu|(A\cap E)+|\mu|(A\cap E^c)\\&=[\mu^+(A\cap E)+\mu^+(A\cap E^c)]+[\mu^-(A\cap E)+\mu^-(A\cap E^c)].\end{aligned}$$

由于$\mu^+(A)=\mu^+((A\cap E)\cup(A\cap E^c))\leqslant\mu^+(A\cap E)+\mu^+(A\cap E^c)$ 和$\mu^-(A)\leqslant\mu^-(A\cap E)+\mu^-(A\cap E^c)$ 都成立, 则由前面的等式可得

$\mu^+(A)=\mu^+(A\cap E)+\mu^+(A\cap E^c)$ 及$\mu^-(A)=\mu^-(A\cap E)+\mu^-(A\cap E^c)$. 这表明$E\in\Lambda_{\mu^+}\cap\Lambda_{\mu^-}$. 因此, $\Lambda_{|\mu|}\subseteq\Lambda_{\mu^+}\cap\Lambda_{\mu^-}$, 从而$\Lambda_{|\mu|}=\Lambda_{\mu^+}\cap\Lambda_{\mu^-}$ 成立, 正如所求.

习题36.8 设μ 和ν 是σ 代数Σ 上的两个测度, 其中至少一个有限. 又设$\mathcal{S}$ 是一个半环, 使得$\mathcal{S}\subseteq\Sigma, X\in\mathcal{S}$ 并且由$\mathcal{S}$ 生成的σ 代数等于Σ. 证明在Σ 上$\mu=\nu$ 当且仅当在$\mathcal{S}$ 上$\mu=\nu$.

解 假设μ 是有限的并且在$\mathcal{S}$ 上$\mu=\nu$. 若我们考虑测度空间$(X,\mathcal{S},\mu)$, 则很容易看出$\mathcal{S}\subseteq\Sigma\subseteq\Lambda_\mu$ 成立. 现在应用定理15.10就得出在Σ 上$\mu=\mu^*=\nu$ 成立.

习题36.9　设$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是一测度空间, $f\in L_1(\mu)$. 证明对每个$A\in\Lambda_\mu$,

$$\nu(A)=\int_A f\mathrm{d}\mu$$

定义了一个Λ_μ 上的有限符号测度. 并且证明对每个$A\in\Lambda_\mu$,

$$\nu^+(A)=\int_A f^+\mathrm{d}\mu,\nu^-(A)=\int_A f^-\mathrm{d}\mu \text{ 和} |\nu|(A)=\int_A |f|\mathrm{d}\mu$$

成立.

解　若$\{A_n\}$ 是Λ_μ 中一个两两不交的序列, 满足$A=\bigcup_{n=1}^\infty A_n$, 则$\lim\sum_{i=1}^\infty f\chi_{A_i}=f\chi_A$ 和$\left|\sum_{i=1}^n f\chi_{A_i}\right|\leqslant|f|$ 对每个n都成立. 这样由Lebesgue控制收敛定理, 得

$$\nu(A)=\int f\chi_A\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int\left(\sum_{i=1}^n f\chi_{A_i}\right)\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\nu(A_i)=\sum_{i=1}^\infty\nu(A_i).$$

因此, ν 是一个有限符号测度.

现注意到若

$$A=\{x\in X:f(x)\geqslant 0\}\quad 及\quad B=\{x\in X:f(x)<0\},$$

则很容易看出(A,B) 是关于ν 的X 的Hahn分解. 既然$f\chi_{E\cap A}=f^+\chi_E$ 成立, 我们看到对每个$E\in\Lambda_\mu$, 有

$$\nu^+(E)=\nu(E\cap A)=\int_{E\cap A}f\mathrm{d}\mu=\int_E f^+\mathrm{d}\mu.$$

对ν^- 可以类似证明. 而绝对值公式由等式$|\nu|=v^++v^-$ 得到.

习题36.10　设ν 是Σ 上的符号测度. 若函数$f:X\to\mathbb{R}$ 同时ν^+ 可积和ν^- 可积, 则称函数f是ν可积的(此时我们记$\int f\mathrm{d}\nu=\int f\mathrm{d}\nu^+-\int f\mathrm{d}v^-$). 证明函数f是ν可积的当且仅当$f\in L_1(|\nu|)$.

解　假设f同时ν^+ 及ν^- 可积. 我们可以假设$f(x)\geqslant 0$ 对所有$x\in X$ 成立. 既然具有形式$\{x\in X:a\leqslant f(x)<b\}$ 的每个集合都属于$\Lambda_{\mu^+}\cap\Lambda_{\mu^-}=\Lambda_{|\mu|}$ (参见习题36.7), 存在一列同时是ν^+ 和ν^- 的阶跃函数$\{\phi_n\}$ 使得$\phi_n(x)\uparrow f(x)$ 对所有的$x\in X$ 成立; 参见定理17.7的证明. 显然, 每个ϕ_n 是$|\mu|$ 阶跃函数并且由

$$\int\phi_n\mathrm{d}|\mu|=\int\phi_n\mathrm{d}\mu^++\int\phi_n\mathrm{d}\mu^-\uparrow\int f\mathrm{d}\mu^++\int f\mathrm{d}\mu^-<\infty,$$

有f 是$|\mu|$ 可积的, 并且$\int f\mathrm{d}|\mu|=\int f\mathrm{d}\mu^++\int f\mathrm{d}\mu^-$ 成立.

反过来, 假定f 属于$L_1(|\nu|)$. 我们可以假设$f(x)\geqslant 0$ 对每个x 成立. 首先注意到对一个$|\nu|$ 可测集A且$|\nu|^*(A)<\infty$, 若$f=\chi_A$, 则(由定理15.11), 存在某个$B\in\Sigma$ 满足$A\subseteq B$ 且$|\nu|^*(A)=|\nu|^*(B)$, 于是$|\nu|^*(B\backslash A)=0$. 鉴于$0\leqslant\nu^+\leqslant|\nu|$, 我们有$(\nu^+)^*(B\backslash A)=0$. 这样, $B\backslash A$ 是一个ν^+ 可测集. 因此, $A=B\backslash(B\backslash A)$ 也是ν^+ 可测的. 这表明χ_A是ν^+ 可积的.

现取一个$|\nu|$ 阶跃函数序列$\{\phi_n\}$, 满足$0\leqslant\phi_n(x)\uparrow f(x)$ 对每个x 成立. 由前面的讨论, $\{\phi_n\}$ 是一个ν^+ 阶跃函数序列. 而且

$$\int\phi_n\mathrm{d}\nu^+\leqslant\int\phi_n\mathrm{d}|\nu|\leqslant\int f\mathrm{d}|\nu|<\infty$$

对所有n成立. 于是f是ν^+ 可积的.

f 的ν^- 可积性可以用类似的方式证明.

习题36.11 证明在下述意义下Jordan分解是唯一的. 若ν 是一符号测度. μ_1 和μ_2 是两个使得$\nu = \mu_1 - \mu_2$ 且$\mu_1 \wedge \mu_2 = 0$ 的测度, 则$\mu_1 = \nu^+$, $\mu_2 = \nu^-$.

解 首先我们证明$\nu^+ = \mu_1$ 成立. 先由$\nu \leqslant \mu_1$ 可以推出$\nu^+ \leqslant \mu_1$.

现设$E \in \Sigma$. 若$\nu^+(E) = \infty$, 则$\nu^+(E) = \mu_1(E) = \infty$ 显然成立. 我们可以假设$\nu^+(E) < \infty$. 由于$\nu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E) \leqslant \nu^+(E) < \infty$, 则有$\mu_1(E) < \infty$. 令$\varepsilon > 0$, 则由

$$0 = \mu_1 \wedge \mu_2(E) = \inf\{\mu_1(E\backslash B) + \mu_2(B) : B \in \Sigma \text{且} B \subseteq E\}$$

知存在某个$B \in \Sigma$ 使得$B \subseteq E$ 且$\mu_1(E\backslash B) + \mu_2(B) < \varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned}\nu^+(E) &= \sup\{\nu(F) : F \in \Sigma \text{且} F \subseteq E\} \geqslant \nu(B) = \mu_1(B) - \mu_2(B) \\ &\geqslant \mu_1(B) - \varepsilon = \mu_1(E) - \mu_1(E\backslash B) - \varepsilon \geqslant \mu_1(E) - 2\varepsilon\end{aligned}$$

对所有$\varepsilon > 0$ 成立. 即对每个$E \in \Sigma$, $\nu^+(E) \geqslant \mu_1(E)$, 因此$\nu^+ = \mu_1$ 成立. 对另一等式注意到

$$\nu^- = (-\nu)^+ = (\mu_2 - \mu_1)^+ = \mu_2,$$

即得所证.

习题36.12 在向量格中$x_n \downarrow x$ 表示对每个n, $x_{n+1} \leqslant x_n$ 并且x 是序列$\{x_n\}$ 的最大下界. 对于一个赋范向量格, 若$x_n \downarrow 0$ 蕴含着$\lim \|x_n\| = 0$, 则称此赋范向量格具有σ有序连续范数.

(a) 证明每个$L_p(\mu)(1 \leqslant p < \infty)$ 具有σ 有序连续范数;

(b) 证明$L_\infty([0,1])$ 不具有σ 有序连续范数;

(c) 设Σ 是集的σ 代数, $\{\mu_n\}$ 是$M(\Sigma)$ 中一个使得$\mu_n \downarrow \mu$ 的序列, 证明$\lim \mu_n(A) = \mu(A)$ 对所有$A \in \Sigma$ 成立;

(d) 证明Banach格$M(\Sigma)$ 具有σ 有序连续范数.

解 (a) 首先注意到在$L_p(\mu)$ 中$f_n \downarrow f$ 等价于$f_n \downarrow f$ a.e.(为什么?). 若对于某一$p(1 \leqslant p < \infty)$, $L_p(\mu)$ 的一序列$\{f_n\}$ 满足$f_n \downarrow 0$ a.e., 则由Lebesgue控制收敛定理得

$$||f_n||_p = \left(\int |f_n|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \downarrow 0$$

成立.

(b) 若$f_n = \chi_{(0,\frac{1}{n})}$, 则$f_n \downarrow 0$ 在$L_\infty([0,1])$ 中成立. 但是, 对每个n, 我们却注意到$||f_n||_\infty = 1$ 成立.

(c) 设在$M(\Sigma)$ 中$\mu_n \downarrow \mu$, 则在$M(\Sigma)$ 中, $0 \leqslant \mu_1 - \mu_n \uparrow \mu_1 - \mu_0$ 又由定理36.2, $\mu_1(A) - \mu_n(A) \uparrow \mu_1(A) - \mu(A)$ 对每个$A \in \Sigma$ 成立, 于是$\mu_n(A) \downarrow \mu(A)$ 对每个$A \in \Sigma$ 成立.

(d) 若在$M(\Sigma)$ 中$\mu_n \downarrow 0$, 则由(c)可得$||\mu_n|| = \mu_n(X) \downarrow 0$.

习题36.13　证明下面Banach格$M(\Sigma)$ 的加性性质：若$\mu, \nu \in M(\Sigma)$ 不相交(即$|\mu| \wedge |\nu| = 0$)，则$||\mu + \nu|| = ||\mu|| + ||\nu||$ 成立。

解　若$|\mu| \wedge |\nu| = 0$ 在$M(\Sigma)$ 中成立，则$|\mu + \nu| = |\mu| + |\nu|$ 成立(参见习题9.2和习题9.3)，于是$||\mu + \nu|| = |\mu + \nu|(X) = |\mu|(X) + |\nu|(X) = ||\mu|| + ||\nu||$.

习题36.14　设Σ 是集合X 的子集构成的σ 代数，$\{\mu_n\}$ 是$M(\Sigma)$ 中互不相交的序列. 若符号测度序列$\{\mu_n\}$ 是有序有界的，试证明$\lim ||\mu_n|| = 0$.

解　设$\{\mu_n\}$ 是Banach格$M(\Sigma)$ 中一个互不相交的序列，使得对于某个$\mu, 0 \leqslant \mu \in M(\Sigma)$ ，我们有对每个n, $|\mu_n| \leqslant \mu$. 由$|\mu_n| \wedge |\mu_m| = 0 (n \neq m)$ ，我们看到

$$\sum_{n=1}^{k} |\mu_n| = \bigvee_{n=1}^{k} |\mu_n| \leqslant \mu$$

对每个k成立. 特别地我们有

$$\sum_{n=1}^{k} ||\mu_n|| = \sum_{n=1}^{k} |\mu_n|(X) \leqslant \left[\bigvee_{n=1}^{k} |\mu_n|\right](X) \leqslant \mu(X) < \infty$$

对每个n成立，于是$\sum_{n=1}^{\infty} ||\mu_n|| < \infty$. 后者显然蕴含着$\lim ||\mu_n|| = 0$.

37. 比较测度与Radon-Nikodym定理

习题37.1　证明符号测度的下列性质：

(a) $\mu \ll \mu$;

(b) $\nu \ll \mu$ 和$\mu \ll \omega$ 蕴含着$\nu \ll \omega$;

(c) 若$0 \leqslant \nu \leqslant \mu$, 则$\nu \ll \mu$;

(d) 若$\mu \ll 0$, 则$\mu = 0$.

解　(a) 由定理36.9, 我们有$|\mu(A)| \leqslant |\mu|(A)$ ，故若$|\mu|(A) = 0$ 成立，则$\mu(A) = 0$ 同样成立，即$\mu \ll \mu$.

(b) 假设$\nu \ll \mu$, $\mu \ll \omega$ 以及$|\omega|(A) = 0$, 应用定理37.2两次可得$|\mu|(A) = 0$, $|\nu|(A) = 0$, 因此$\nu \ll \omega$ 成立.

(c) 设$0 \leqslant \nu \leqslant \mu$. 若$|\mu|(A) = \mu(A) = 0$, 则显然$\nu(A) = 0$, 故$\nu \ll \mu$ 成立.

(d) 设$\mu \ll 0$. 由于零测度在每个$A \in \Sigma$ 都取零值，所以$\mu(A) = 0$ 对每个$A \in \Sigma$ 成立，这意味着$\mu = 0$.

习题37.2　证明下列关于集的σ 代数Σ 上的符号测度的陈述：

(1) 若$\mu \ll \omega$ 且$\nu \ll \omega$, 则$|\mu| + |\nu| \ll \omega$;

(2) 若$\mu \perp \omega$ 且$\nu \perp \omega$, 则$|\mu| + |\nu| \perp \omega$;

(3) 若$\mu \ll \omega$ 且$|\nu| \ll |\mu|$, 则$\nu \ll \omega$;

(4) 若$\mu \perp \omega$ 且$|\nu| \leqslant |\mu|$, 则$\nu \perp \omega$;

(5) 若$\nu \ll \mu$ 且$\nu \perp \mu$, 则$\nu = 0$.

解 (1) 由定理37.2立即可以得到这个结论.

(2) 由于$\mu \perp \omega$, 则由定理37.5可知存在某个$A_1 \in \Sigma$ 使得$|\omega|(A_1) = |\mu|(A_1^c) = 0$. 同理存在某个$A_2 \in \Sigma$ 使得$|\omega|(A_2) = |\nu|(A_2^c) = 0$. 记$A = A_1 \cup A_2, B = (A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c$, 则$A, B \in \Sigma, A \cup B = X, A \cap B = \varnothing$, $|\omega|(A) = 0$ 以及$(|\mu| + |\nu|)(B) = 0$. 由定理37.5我们推出$\omega \perp |\mu| + |\nu|$ 成立.

(3) 由定理37.2容易得到此结论.

(4) 由定理37.5立即可得到此结论.

(5) 由于$\nu \perp \mu$, 则存在某个$A \in \Sigma$ 使得$|\nu|(A) = |\mu|(A^c) = 0$. 由$\nu \ll \mu$ 和定理37.2可得$|\nu|(A^c) = 0$, 故$|\nu|(X) = |\nu|(A) + |\nu|(A^c) = 0$, 即$|\nu| = 0$, 于是$\nu = 0$.

习题37.3 设μ 和ν 是σ 代数Σ 上的两个测度. 若ν 是有限测度, 试证下列叙述等价.

(a) $\nu \ll \mu$ 成立;

(b) 对于Σ 中的每个序列$\{A_n\}$, 若$\lim \mu(A_n) = 0$, 我们有$\lim \nu(A_n) = 0$;

(c) 对每个$\varepsilon > 0$, 存在某个$\delta > 0$ (依赖于ε), 使得只要$A \in \Sigma$ 满足$\mu(A) < \delta$, 就有$\nu(A) < \varepsilon$ 成立.

解 (a)$\Rightarrow$ (b), 若(b)不正确, 则存在$\varepsilon > 0$ 和Σ 中的序列$\{A_n\}$ 使得对每个n, $\mu(A_n) < 2^{-n}$ 并且$\nu(A_n) > \varepsilon$, 令$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \in \Sigma$. 由于$A \subseteq \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$, 我们得到

$$\mu(A) \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_i) \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2^{1-n}$$

对每个n成立, 所以$\mu(A) = 0$. 但是由定理15.4(2), 我们有$\nu(A) \geqslant \varepsilon$, 与$\nu \ll \mu$ 矛盾, 因此, (a)蕴含着(b).

(b) $\Rightarrow$ (c), 若(c)不正确, 则存在$\varepsilon > 0$ 和Σ 中的序列$\{A_n\}$ 使得$\mu(A_n) < 1/n$ 和$\nu(A_n) \geqslant \varepsilon$ 对所有n成立, 显然这与(b)矛盾.

(c) $\Rightarrow$ (a), 设$A \in \Sigma$ 满足$\mu(A) = 0$, 给定$\varepsilon > 0$, 选取$\delta > 0$ 使得(c)满足. 由于$\mu(A) < \delta$, 则有$\nu(A) < \varepsilon$, 又$\varepsilon > 0$ 是任意的, 则$\nu(A) = 0$, 于是$\nu \ll \mu$ 成立.

习题37.4 设μ 是一有限测度, $\{\nu_n\}$ 是一有限测度序列(都定义在Σ 上), 满足对每个n, $\nu_n \ll \mu$ 成立. 此外假设对每个$A \in \Sigma$, $\lim \nu_n(A)$ 在$\mathbb{R}$ 中存在. 证明:

(a) 对每个$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$ 使得只要$A \in \Sigma$ 满足$\mu(A) < \delta$, 就有$\nu_n(A) < \varepsilon$ 对每个n成立;

(b) 集函数$\nu : \Sigma \to [0, \infty]$, 定义为对每个$A \in \Sigma$, $\nu(A) = \lim \nu_n(A)$, 是一个使得$\nu \ll \mu$ 的测度.

解 (a) 由习题31.3, 我们知道在距离$d(A, B) = \mu(A \Delta B)$ 下Σ 是一个完备度量空间. 又由$\nu_k \ll \mu$ 及不等式

$$|\nu_k(A) - \nu_k(B)| \leqslant \nu_k(A \Delta B),$$

我们很容易得到函数$\nu_k : \Sigma \to \mathbb{R}$ 定义恰当(即只要$\mu(A\Delta B) = 0$ 就有$\nu_k(A) = \nu_k(B)$ 成立)并且连续.

现设$\varepsilon > 0$，定义

$$\mathcal{C}_k = \{A \in \Sigma : |\nu_n(A) - \nu_m(A)| \leqslant \varepsilon \text{ 对所有} n, m \geqslant k \text{成立}\}.$$

注意到每个$\mathcal{C}_k$ 是闭集并且$\Sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}_k$，由Baire范畴定理(定理6.18)，我们有$\mathcal{C}_k^0 \neq \varnothing$ 对某个k成立，于是存在$A_0 \in \mathcal{C}_k$ 和$\delta_1 > 0$ 使得$A \in \Sigma$ 且$\mu(A\Delta \mathrm{A}_0) < \delta_1$，从而$A \in \mathcal{C}_k$.

另外由$\nu_i \ll \mu (1 \leqslant i \leqslant k)$ 和前一问题，存在$0 < \delta < \delta_1$ 使得$A \in \Sigma$ 且$\mu(A) < \delta$，于是$\nu_i(A) < \varepsilon$ 对所有$1 \leqslant i \leqslant k$ 成立. 现若$A \in \Sigma$ 满足$\mu(A) < \delta$，则$A \cup (A_0 \backslash A) = A \cup A$. 满足$\mu((A \cup A_0)\Delta \mathrm{A}_0) \leqslant \mu(A) < \delta_1$，于是

$$\begin{aligned}|\nu_n(A) - \nu_k(A)| &= |(\nu_n - \nu_k)(A \cup A_0) - (\nu_n - \nu_k)(A_0 \backslash A)| \\ &\leqslant |(\nu_n - \nu_k)(A \cup A_0)| + |(\nu_n - \nu_k)(A_0 \backslash A)| \leqslant 2\varepsilon\end{aligned}$$

对所有$n > k$ 成立，从而$A \in \Sigma$ 且$\mu(A) < \delta$ 蕴含着对所有$n > k$ (和所有$1 \leqslant n \leqslant k$)，

$$|\nu_n(A)| \leqslant 2\varepsilon + \nu_k(A) < 3\varepsilon.$$

(b) 设$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，其中$\{A_n\}$ 是Σ 中两两不交的序列，令$\varepsilon > 0$，并选取$\delta > 0$ 使得叙述(a)满足. 则我们可以选取m使得对所有$n \geqslant m$，$\mu(A \backslash \bigcup_{i=1}^{n} A_i) < \delta$. 从而对所有的$k$和所有的$n \geqslant m$，

$$\left|\nu_k(A) - \sum_{i=1}^{n} \nu_k(A_i)\right| = \nu_k\left(A \backslash \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) < \varepsilon.$$

于是对所有的$n \geqslant m$，$|\nu(A) - \sum_{i=1}^{n} \nu(A_i)| \leqslant \varepsilon$，因而$|\nu(A) - \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)| \leqslant \varepsilon$. 由于$\varepsilon > 0$ 是任意的，我们得到$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$. 因此，$\nu$ 是一个测度，并且由(a)及前一习题我们立即得到$\nu \ll \mu$ 成立.

习题37.5 设$\{\nu_n\}$ 是一非零有限测度序列，满足对每个$A \in \Sigma$，$\lim \nu_n(A)$ 在$\mathbb{R}$ 中存在. 证明对于$A \in \Sigma$，$\nu(A) = \lim \nu_n(A)$ 是一个有限测度.

解 考虑集函数$\mu : \Sigma \to [0, \infty)$，定义为

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n(A)}{\nu_n(X)} 2^{-n},$$

μ 事实上是一个测度. 而且，对于每个$n, \nu_n \ll \mu$ 成立. 于是由习题37.4的(b)部分我们得出集函数ν 也是一个测度.

习题37.6 由证明下面论述来证明Radon-Nikodym导数的唯一性：如果$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间且$f \in L_1(\mu)$ 满足对所有$A \in \mathcal{S}, \int_A f \mathrm{d}\mu = 0$，则$f = 0$ a.e..

解 由给出的条件我们容易看出对每个σ 集$A, \int_A f \mathrm{d}\mu = 0$ 必定成立. 现考虑可测集

$$A = \{x \in X : f(x) > 0\} \text{ 和} B = \{x \in X : f(x) < 0\}.$$

由习题22.7我们知道A, B 都是σ 有限集. 由于$\int_A f\mathrm{d}\mu = \int_B f\mathrm{d}\mu = 0$，则由习题22.13可得$\mu^*(A) = \mu^*(B) = 0$. 因此, $f = 0$ a.e.成立.

习题37.7 本习题表明Radon-Nikodym定理中关于μ的σ有限性假设不能省略. 考虑$X = [0, 1]$, 设Σ 是[0, 1]的所有Lebesgue可测子集构成的σ 代数, ν 是Σ 上的Lebesgue测度, μ 是一测度, 定义为$\mu(\varnothing) = 0$ 且$A \neq \varnothing$ 时, $\mu(A) = \infty$, (顺便提一句, μ 是Σ 上的最大测度). 证明:

(a) ν 是一有限测度, μ 不是σ 有限的, 并且$\nu \ll \mu$;

(b) 不存在函数$f \in L_1(\mu)$ 使得对所有$A \in \Sigma$, $\nu(A) = \int_A f\mathrm{d}\mu$ 成立.

解 (a) 注意到$\mu(A) = 0$ 意味着$A = \varnothing$, 故$\nu \ll \mu$ 成立.

(b) 注意到$L_1(\mu) = \{0\}$.

习题37.8 设μ 是Σ 上一个有限符号测度. 证明存在唯一一个函数$f \in L_1(|\mu|)$ 使得

$$\mu(A) = \int_A f\mathrm{d}|\mu|$$

对所有$A \in \Sigma$ 成立.

解 注意到$\mu \ll |\mu|$ 成立. 则结论由Radon-Nikodym定理可以得到.

习题37.9 假设ν 是一个有限测度, μ 是一个σ 有限测度, 满足$\nu \ll \mu$, 令$g = \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu \in L_1(\mu)$ 是ν 关于μ 的Radon-Nikodym导数. 证明:

(a) 若$\bar{Y} = \{x \in X : g(x) > 0\}$, 则对于每个ν 可测集A , $\bar{Y} \cap A$ 是μ 可测集;

(b) 若$f \in L_1(\nu)$, 则$fg \in L_1(\mu)$ 及$\int f\mathrm{d}\nu = \int fg\mathrm{d}\mu$ 成立.

解 (a) 首先由定理37.3得$\Sigma \subseteq \Lambda_\mu \subseteq \Lambda_\nu$ 成立, 并且有$\bar{Y} \in \Lambda_\mu$.

先考虑$A \in \Lambda_\nu$ 满足$A \subseteq \bar{Y}$ 且$\nu^*(A) = 0$ 的情形. 由定理15.11得存在$B \in \Sigma$ 使得$A \subseteq B$ 且$\nu^*(B) = 0$. 现若$\mu^*(B \cap \bar{Y}) > 0$, 则我们得到矛盾$0 = \nu^*(B \cap \bar{Y}) = \int_{B\cap\bar{Y}} g\mathrm{d}\mu > 0$ (参见习题22.13). 因此$\mu^*(B \cap \bar{Y}) = \mu^*(A) = 0$ 成立, 所以$A \in \Lambda_\mu$.

现设$A \in \Lambda_\nu$. 选取$B \in \Sigma$ 使得$A \subseteq B$ 且$\nu^*(A) = \nu^*(B)$, 于是$\nu^*(B \backslash A) = 0$, 所以$(B \backslash A) \cap \bar{Y} \in \Lambda_\mu$, 从而

$$A \cap \bar{Y} = B \cap \bar{Y} \backslash (B \backslash A) \cap \bar{Y} \in \Lambda_\mu.$$

(b) 此结论由习题22.15立即可以得到.

习题37.10 证明关于Radon-Nikodym导数的**链式法则**: 若ω 是一σ 有限测度, ν 和μ 是两个有限测度(都定义于Σ上), 满足$\nu \ll \mu$ 且$\mu \ll \omega$, 则$\nu \ll \omega$ 且

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \cdot \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} (\omega\text{-a.e.})$$

成立.

解 显然$\nu \ll \mu$且$\Sigma \subseteq \Lambda_\omega \subseteq \Lambda_\mu \subseteq \Lambda_\nu$，令$f = \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu \in L_1(\mu), g = \mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\omega \in L_1(\omega)$，若$A \in \Sigma$，则由上一习题的(b)部分，我们推断出

$$\nu(A) = \int_A f\mathrm{d}\mu = \int f\chi_A \mathrm{d}\mu = \int f\chi_A g\mathrm{d}\omega = \int_A fg\mathrm{d}\omega.$$

由此结合Radon-Nikodym定理表明

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = fg, \quad \omega\text{-a.e.}$$

习题37.11 这里所考虑的测度都假设定义在一个固定的σ代数Σ上.

(a) 称两个测度μ和ν等价(符号表示为$\mu \equiv \nu$)，若$\mu \ll \nu$和$\nu \ll \mu$同时成立. 证明"$\equiv$"是一个Σ上测度间的等价关系;

(b) 若μ和ν是两个等价的σ有限测度，证明$\Lambda_\mu = \Lambda_\nu$;

(c) 证明若μ和ν是两个等价的有限测度，则$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu} \cdot \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = 1$几乎处处成立;

(d) 若μ和ν是两个等价的有限测度，证明由$L_1(\mu)$到$L_1(\nu)$的映射

$$f \mapsto f \cdot \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}$$

是一个映上的格等距. 于是在这种同化意义下$L_1(\mu) = L_1(\nu)$成立;

(e) 将(d)推广到等价的σ有限测度情形. 即，若μ和ν是两个等价的σ有限测度，则证明Banach格$L_1(\mu)$和$L_1(\nu)$是格等距的;

(f) 证明若μ和ν是两个等价的σ有限测度，则对每个$p : 1 \leqslant p < \infty$，Banach格$L_p(\mu)$和$L_p(\nu)$是格等距的.

解 (a) 直接可以得到.

(b) 由定理37.3立即可以得到.

(c) 应用关系式$\nu \ll \mu \ll \nu$和前一习题.

(d) 设$f \mapsto f \cdot \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu} = T(f)$. 由于$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu} \in L_1(\nu)$，则由习题37.9(b)知$T(f) = f \cdot \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu} \in L_1(\nu)$并且$\int f\mathrm{d}\mu = \int f\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\mathrm{d}\nu$对每个$f \in L_1(\mu)$成立. 于是$T$定义了一个从$L_1(\mu)$到$L_1(\nu)$的映射，显然它是线性的. 由于$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu} \geqslant 0$成立，则

$$T(|f|) = |f| \cdot \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu} = \left|f \cdot \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right| = |T(f)|$$

以及

$$\|T(f)\|_1 = \int \left|f \cdot \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right| \mathrm{d}\nu = \int |f| \cdot \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\mathrm{d}\nu = \int |f|\mathrm{d}\mu = \|f\|_1$$

对每个$f \in L_1(\mu)$成立. 因而$T : L_1(\mu) \to L_1(\nu)$是一个格等距. 为了看出$T$也是映上的，注意到若$g \in L_1(\nu)$，则$g \cdot \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \in L_1(\mu)$，再由(c)我们看到

$$T\left(g \cdot \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\right) = g \cdot \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \cdot \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu} = g.$$

(e) 设$\{E_n\}$是Σ中两两不交的序列, 使得$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$并且对每个$n, \mu(E_n) < \infty, \nu(E_n) < \infty$. 令

$$T_n : L_1(E_n, \mu) \to L_1(E_n, \nu)$$

是前面(d)所确定的映上的格等距. 则按照常规的方式我们可以证明$T : L_1(\mu) \to L_1(\nu)$, 定义为对每一$f \in L_1(\mu)$,

$$T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(f\chi_{E_n})$$

是一映上的格等距.

(f) 首先假设μ 和ν 是有限的, 则对每个$p : 1 \leqslant p < \infty$,

$$f \mapsto f \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right)^{\frac{1}{p}}$$

是一个从$L_p(\mu)$ 到$L_p(\nu)$ 映上的格等距. 现在若μ 和ν 是σ 有限的, 则应用(e)的论证可证得$L_p(\mu)$和$L_p(\nu)$ 是格等距的.

若$p = \infty$, 则由(b)得$L_\infty(\mu) = L_\infty(\nu)$ 成立, 故在这种情况恒等算子是一个格等距.

习题37.12 设μ 是一个σ 有限测度, 并设$AC(\mu)$ 是所有关于μ 绝对连续的有限符号测度构成的集合, 即

$$AC(\mu) = \{\nu \in M(\Sigma) : \nu \ll \mu\}.$$

(a) 证明$AC(\mu)$ 是$M(\Sigma)$ 中的一个赋范闭理想, (因此, 具有范数$||\nu|| = |\nu|(X)$ 的$AC(\mu)$ 本身就是一个Banach格).

(b) 对每个$f \in L_1(\mu)$, 令μ_f 是一有限符号测度, 定义为对每个$A \in \Sigma$, $\mu_f(A) = \int_A f\mathrm{d}\mu$. 证明$f \mapsto \mu_f$ 是一个从$L_1(\mu)$ 到$AC(\mu)$ 映上的格等距.

解 (a) 显然, $AC(\mu)$ 是$M(\Sigma)$ 中的一个理想. 若$\{\nu_n\}$ 是$AC(\mu)$ 中的一个序列, 满足在$M(\Sigma)$中$\nu_n \to \nu$, 则对每个$A \in \Sigma$, $\nu_n(A) \to \nu(A)$ 成立. 于是由习题37.4, $\nu \in AC(\mu)$. 因此$AC(\mu)$是$M(\Sigma)$ 中一个闭的向量子格, 从而它本身就是一个Banach格.

(b) 显然, $f \mapsto \mu_f$ 是一个线性算子. 由习题37.6这个算子是一对一的. 再由习题36.9得$f \mapsto \mu_f$ 是一个格等距, 并且由Radon-Nikodym定理知它也是映上的.

习题37.13 设Σ 是集合X 的子集构成的一个σ代数, μ 是Σ 上的一个测度. 又设Σ^* 是集合$\bar{Y}$的子集构成的一个σ 代数, 且$T : X \to \bar{Y}$ 具有性质: 对每个$A \in \Sigma^*$, $T^{-1}(A) \in \Sigma$.

(a) 证明对每个$A \in \Sigma^*$, $\nu(A) = \mu(T^{-1}(A))$ 是Σ^* 上的一个测度;

(b) 若$f \in L_1(\nu)$, 证明$f \circ T \in L_1(\mu)$ 且

$$\int_{\bar{Y}} f\mathrm{d}\nu = \int_X f \circ T\mathrm{d}\mu;$$

(c) 若μ 是有限的且ω 是Σ^* 上的σ 有限测度, 满足$\nu \ll \omega$, 证明存在一个函数$g \in L_1(\omega)$ 使得

$$\int_X f \circ T\mathrm{d}\mu = \int_{\bar{Y}} fg\mathrm{d}\omega$$

对每个$f \in L_1(\nu)$ 成立.

解 (a) 直接可以得到.

(b) 首先注意到若A是一个ν 零测集, 则$T^{-1}(A)$ 是一个μ 零测集. 事实上, 若$\nu^*(A) = 0$ 成立, 则(由定理15.11)存在$B \in \Sigma^*$ 使得$A \subseteq B$ 且$\nu(B) = 0$. 因此,

$$0 \leqslant \mu^*(T^{-1}(A)) \leqslant \mu^*(T^{-1}(B)) = \mu(T^{-1}(B)) = \nu(B) = 0.$$

现设A是一个ν可测集且$\nu^*(A) < \infty$. 选取$B \in \Sigma^*$ 使得$A \subseteq B$ 且$\nu^*(B) = \nu^*(A)$. 由于$\nu^*(B \backslash A) = 0$, 则由前面的讨论知$\mu^*(T^{-1}(B \backslash A)) = 0$. 于是$T^{-1}(A) = T^{-1}(B) \backslash T^{-1}(B \backslash A)$ 是μ 可测的, 并且

$$\int_{\bar{Y}} \chi_A \mathrm{d}\nu = \nu^*(A) = \mu^*(T^{-1}(A)) = \int_X \chi_{T^{-1}(A)} \mathrm{d}\mu = \int_X \chi_A \circ T \mathrm{d}\mu.$$

从而对每个ν 阶跃函数ϕ , 我们有$\phi \circ T \in L_1(\mu)$ 且$\int_{\bar{Y}} \phi \mathrm{d}\nu = \int_X \phi \circ T \mathrm{d}\mu$. 简单的连续性论证就可以完成(b)的证明.

(c) 由(b)和习题37.9立即可以得到此结论.

习题37.14 设$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个σ 有限测度空间, g是一个可测函数. 证明若对某一$p: 1 \leqslant p < \infty$, 我们有$fg \in L_1(\mu)$ 对所有的$f \in L_p(\mu)$ 成立, 则$g \in L_q(\mu)$, 这里$1/p + 1/q = 1$.

此外, 举一个反例说明对$1 < p < \infty$, μ的σ有限性不能省略.

解 我们可以假定$g \geqslant 0$ 成立(为什么?). 则式子$F(f) = \int fg \mathrm{d}\mu (f \in L_p(\mu))$ 定义了一个$L_p(\mu)$ 上的正线性泛函. 由定理40.10, F是连续的. 再由定理37.9和定理37.10, 存在$h \in L_q(\mu)$ 使得对每个$f \in L_p(\mu)$, $\int fg \mathrm{d}\mu = \int fh \mathrm{d}\mu$. 这蕴含着(怎样蕴含?)对每个可测子集A, $\int_A (g - h) \mathrm{d}\mu = 0$. 到此, 由习题22.13就能保证$g = h$ 几乎处处成立.

μ的σ有限性不能省略. 考虑$X = (0, \infty)$ 及σ代数$\mathcal{P}(X)$ 上的测度μ, 定义为若$A \neq \varnothing, \mu(A) = \infty$ 以及$\mu(\varnothing) = 0$. 则对于$1 < p < \infty$, 我们有$L_1(\mu) = L_p(\mu) = L_q(\mu) = \{0\}$, 并且$L_\infty(\mu) = B(X)$ 是X 上的有界实值函数. 另一方面, 若$g(x) = x$, 则$fg = 0 \in L_1(\mu)$ 对所有的$f \in L_p(\mu)(1 \leqslant p < \infty)$ 成立, 而$g \notin L_q(\mu)$.

习题37.15 设$(X, \mathcal{S}, \mu)$是一个σ有限测度空间, g是一个可测函数, $1 \leqslant p < \infty$. 假若存在某一实数$M > 0$ 使得$\phi g \in L_1(\mu)$ 及$\int \phi g \mathrm{d}\mu \leqslant M \|\phi\|_p$ 对每一个阶跃函数ϕ 成立, 则证明

(a) $g \in L_q(\mu)$, 这里$1/p + 1/q = 1$;

(b) $\int fg \mathrm{d}\mu \leqslant M \|f\|_q$ 对所有的$f \in L_p(\mu)$ 成立.

解 设L表示所有阶跃函数构成的向量空间. 由给定条件可知函数$F: L \to \mathbb{R}$, 定义为$F(\phi) = \int \phi g \mathrm{d}\mu$ 是一个连续线性泛函. 由于L在$L_p(\mu)$ 中稠密(定理31.10), 所以F有一个扩张到所有$L_p(\mu)$ 上的连续开拓(我们仍用F表示). 由定理37.9和定理37.10, 存在$h \in L_q(\mu)$ 使得对所有$f \in L_p(\mu)$, $F(f) = \int fh \mathrm{d}\mu$ 成立. 显然,

$$|F(f)| = \left| \int fh \mathrm{d}\mu \right| \leqslant M \|f\|_p$$

对所有$f \in L_p(\mu)$ 成立.

为了完成证明, 我们只需证明$g = h$ 几乎处处成立. 为此, 设$E \in \Lambda_\mu$ 满足$\mu^*(E) < \infty$. 则考虑阶跃函数$\phi = \chi_E \mathrm{Sgn}(g-h) \in L$, 注意到$\int \phi(g-h)\mathrm{d}\mu = 0$ 蕴含着$\int_E |g-h|\mathrm{d}\mu = 0$, 即有$g = h$ 在E上几乎处处成立; 参见习题22.13. 由于μ 是σ有限的, 我们推出$g = h$ 在X上几乎处处成立.

习题37.16 设μ 是$\mathbb{R}^k$ 上的Borel测度, 又假设存在一个常数$c > 0$ 使得任何一个Borel集E只要$\lambda(E) = c$, 就有$\mu(E) = c$. 证明μ 与λ 重合, 即证$\mu = \lambda$.

解 假设Borel测度μ 和常数$c > 0$ 满足问题所述的性质. 显然μ 是一个σ 有限Borel测度. 由定理37.7, 我们可以写出

$$\mu = \mu_1 + \mu_2, \text{ 其中} \mu_1 \ll \lambda, \mu_2 \perp \lambda.$$

首先我们证明$\mu_2 = 0$. 由$\mu_2 \perp \lambda$ 知存在两个互不相交的Borel集A和B使得$A \cup B = \mathbb{R}^k$ 及$\mu_2(A) = \lambda(B) = 0$. 由于$\lambda(A) = \infty$, (由习题18.19)存在A 的一个Borel子集C使得$\lambda(C) = c$. 由$\lambda(C \cup B) = \lambda(C) + \lambda(B) = \lambda(C) = c$ 和我们的假设, 我们看到$\mu(C \cup B) = c$. 又注意到

$$c \leqslant c + \mu_2(B) \leqslant c + \mu(B) = \mu(C) + \mu(B) = \mu(C \cup B) = c,$$

故$\mu_2(B) = 0$. 这表明$\mu_2 = 0$, 因此$\mu = \mu_1$ 关于λ 绝对连续.

接下来我们固定一个紧集K使得$\lambda(K) \geqslant c$, 考虑限制在k上的μ 和λ . 由Radon-Nikodym定理, 存在一个非负函数$f \in L_1(K, \mathcal{B}, \lambda)$ 使得

$$\mu(E) = \int_E f \mathrm{d}\lambda.$$

对k的每个Borel子集E成立(参见习题12.13). 我们断言$f = 1$ a.e.. 为了证明这一点, 假设Lebesgue 可测集$D = \{x \in K : f(x) < 1\}$ 满足$\lambda(D) > 0$, 我们可以假定(为什么?)D是一个Borel集. 若$\lambda(D) \geqslant c$ 成立, 则选取D的一个Borel子集D_1 使得$\lambda(D_1) = c$; 若$\lambda(D) < c$, 则选取一个Borel集D_1 使得$D \subseteq D_1 \subseteq K$ 且$\lambda(D_1) = c$; (参见习题18.19). 现注意到在任一种情况我们都有$\mu(D_1) < c$, 这与我们的假设矛盾, 因此$\lambda(D) = 0$. 同样, $\lambda(\{x \in K : f(x) > 1\}) = 0$, 所以$f = 1$ a.e.. 于是$\mu(E) = \lambda(E)$ 对K的每个Borel子集E都成立. 进一步选取$\mathbb{R}^k$ 的紧子集序列$\{k_n\}$ 使得$\lambda(K_n) \geqslant c$ 及$K_n \uparrow \mathbb{R}^k$. 若E是$\mathbb{R}^k$ 的任意一个Borel子集, 则可得

$$\mu(E) = \lim_{n \to \infty} \mu(E \cap K_n) = \lim_{n \to \infty} \lambda(E \cap K_n) = \lambda(E).$$

习题37.17 设μ 和ν 是两个σ 有限测度, 定义在集合X的子集构成的σ 代数Σ 上, 且$\nu \ll \mu$ 及$\nu \neq 0$. 证明存在一个集合$E \in \Sigma$ 及一个整数n使得

(a) $\nu(E) > 0$;

(b) $A \in \Sigma$ 且$A \subseteq E$ 蕴含着$\mu(A)/n \leqslant \nu(A) \leqslant n\mu(A)$.

解 选取Σ 中的一个序列$\{X_n\}$ 使得$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ 且对每个n, $\nu(X_n) < \infty$ 及$\mu(X_n) < \infty$. 由于$\nu \neq 0$, 存在某个n使得$\nu(X_n) > 0$. 由$\nu \ll \mu$ 知$\mu(X_n) > 0$ 同样成立. 于是, 用X_n 代替X, 我们可以从一开始就假设ν 和μ 都是有限测度.

现在由Radon-Nikodym定理可得存在函数$0 \leqslant f \in L_1(\mu)$ 使得

$$\nu(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu$$

对每个$A \in \Sigma$ 成立. 由$\nu \neq 0$ 我们看到$f \neq 0$，故μ 可测集$F = \{x \in X : f(x) > 0\}$ 满足$\mu^*(F) > 0$. 接下来我们令

$$E_n = \left\{x \in X : \frac{1}{n} \leqslant f(x) \leqslant n\right\},$$

注意到$E_n \uparrow E$ a.e., 则对某个n, 我们有$\mu^*(E_n) > 0$. 又由定理15.11得, 存在某个$E \in \Sigma$ 使得$E_n \subseteq E$ 且$\mu(E) = \mu^*(E_n)$，我们断言集合E满足所要求的性质.

为了证明这一点, 首先注意到

$$\nu(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu = \int_{E_n} f \mathrm{d}\mu \geqslant \frac{1}{n}\mu^*(E_n) > 0.$$

现在若$A \in \Sigma$ 满足$A \subseteq E$，则有$\frac{1}{n}\chi_A \leqslant f \leqslant n\chi_A$，$\mu$ -a.e., 因此

$$\frac{1}{n}\mu(A) = \frac{1}{n}\int_A \chi_A \mathrm{d}\mu \leqslant \int_A f \mathrm{d}\mu = \nu(A) \leqslant \int_A n\chi_A \mathrm{d}\mu = n\mu(A).$$

习题37.18 设μ 是$[1, \infty)$ 上的一个有限Borel测度, 使得

(a) $\mu \ll \lambda$;

(b) $\mu(B) = a\mu(aB)$ 对每个$a \geqslant 1$ 及$[1, \infty)$ 的每个Borel子集B成立, 这里$aB = \{ab : b \in B\}$.

若Radon-Nikodym导数$\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\lambda$ 是一个连续函数, 则证明存在一个常数$c \geqslant 0$ 使得对每个$x \geqslant 1$, $[\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\lambda](x) = \frac{c}{x^2}$.

解 为了简单起见, 我们记$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} = f$. 则给出的等式$\mu(B) = a\mu(aB)$ 可以写成如下形式:

$$\int_B f \mathrm{d}\lambda = a\int_{aB} f \mathrm{d}\lambda.$$

对于$B = [1, x]$，我们得到对每个$a \geqslant 1$ 及每个$x \geqslant 1$，

$$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = a\int_a^{ax} f(t)\mathrm{d}t.$$

两边对x 求微分(并考虑到微积分基本定理), 我们有

$$f(x) = a^2 f(ax)$$

对每个$x \geqslant 1$ 及每个$a \geqslant 1$ 成立. 令$x = 1$，我们得到对所有$a \geqslant 1$，

$$f(a) = \frac{f(1)}{a^2},$$

于是得到我们所证的结论.

习题37.19 设μ 是$(0,\infty)$ 上的一个有限Borel测度, 使得

(a) $\mu \ll \lambda$;

(b) $\mu(aB)=\mu(B)$ 对每个$a>0$ 及$(0,\infty)$ 的每个Borel子集B成立. 若Rodon-Nikodym导数是一个连续函数, 证明存在一个常数$c \geqslant 0$ 使得对每个$x>0$, $[\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\lambda](x)=\frac{c}{x}$.

解 令$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}=f$. 则(由Radon-Nikodym定理), 给出的等式$\mu(B)=\mu(aB)$ 可以写成如下形式:

$$\int_B f\mathrm{d}\lambda=\int_{aB} f\mathrm{d}\lambda.$$

对于$B=[1,x]$ (若$0<x<1$, 取$B=[x,1]$), 我们得到对每个$a>0$ 及每个$x>0$,

$$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=\int_a^{ax} f(t)\mathrm{d}t.$$

两边对x求微分(并考虑到微积分基本定理), 我们看到

$$f(x)=af(ax)$$

对每个$x>0$ 及每个$a>0$ 成立. 令$x=1$, 我们得到对所有的$a>0$,

$$f(a)=\frac{f(1)}{a},$$

即得所证.

38. Riesz表示定理

习题38.1 若X是一个紧拓扑空间, 证明$C(X)$ 上的连续线性泛函F是正的当且仅当$F(\mathbf{1})=\|F\|$ 成立.

解 设F是$C(X)$ 上的一个连续线性泛函, 其中X是紧的. 首先注意到

$$\{f\in C(X):\|f\|_\infty \leqslant 1\}=\{f\in C(X):|f|\leqslant \mathbf{1}\}.$$

于是若F还是正的, 则

$$\begin{aligned}\|F\|&=\sup\{F(f):f\in C(X)\text{且}\|f\|_\infty\leqslant \mathbf{1}\}\\&=\sup\{F(f):f\in C(X)\text{且}|f|\leqslant \mathbf{1}\}=f(\mathbf{1}).\end{aligned}$$

另一方面, 假若$F(\mathbf{1})=\|F\|$. 设$0\leqslant f\in C(X)$ 非零且令$g=f/\|f\|_\infty$. 显然$\|\mathbf{1}-g\|_\infty\leqslant 1$, 于是

$$F(\mathbf{1})-F(g)=F(\mathbf{1}-g)\leqslant \|F\|=F(\mathbf{1})$$

成立, 这蕴含着$F(g)\geqslant 0$. 因此$F(f)=\|f\|_\infty F(g)\geqslant 0$ 成立, 所以F是一个正的线性泛函.

习题38.2 设X是一个紧的拓扑空间, 且设F 和G是$C(X)$ 上的两个正线性泛函. 若$F(\mathbf{1})+G(\mathbf{1})\leqslant \|F-G\|$, 则证明$F\wedge G=0$.

解　由于$F, G \geqslant 0$，则有$F - G \leqslant F \vee G$ 和$G - F \leqslant F \vee G$，故$|F - G| \leqslant F \vee G$，因而由前一习题，

$$||F - G|| \leqslant ||F \vee G|| = F \vee G(\mathbf{1}) \leqslant ||F + G|| \leqslant ||F|| + ||G||$$
$$= F(\mathbf{1}) + G(\mathbf{1}) \leqslant ||F - G||,$$

所以$F \vee G(\mathbf{1}) = F(\mathbf{1}) + G(\mathbf{1})$ 成立. 又由$F + G = F \vee G + F \wedge G$ 得

$$||F \wedge G|| = F \wedge G(\mathbf{1}) = F(\mathbf{1}) + G(\mathbf{1}) - F \vee G(\mathbf{1}) = 0,$$

所以$F \vee G = 0$.

习题38.3　*设X是一个局部紧的Hausdorff 拓扑空间,*

$$c_0(X) = \{f \in C(X) : \forall \varepsilon > 0, \exists 紧集K, 使得\forall x \notin K, |f(x)| < \varepsilon\}.$$

证明:

(a) *具有上确界范数的$C_0(X)$ 是一个Banach格;*

(b) *$C_c(X)$ 的范数完备化格是Banach格$c_0(X)$.*

解　(a) 显然, 具有上确界范数的$c_0(X)$ 是一个赋范向量格. 对于完备性, 设$\{f_n\}$ 是$c_0(X)$ 中的一个Cauchy序列, 则$\{f_n\}$ 在X上一致收敛于某个函数f. 由定理9.2, 我们推出$f \in C(X)$. 现若给定一个$\varepsilon > 0$，选取某个n使得$||f_n - f||_\infty < \varepsilon$，并且选取某个紧集$K$ 使得对于$x \notin K$，$|f_n(x)| < \varepsilon$，于是

$$|f(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

对所有$x \notin K$ 成立, 故$f \in c_0(X)$.

(b) 显然, $C_c(X)$ 是$c_0(X)$ 的一个向量子格. 我们证明$C_c(X)$ 在$c_0(X)$ 中稠密.

为此, 设$f \in c_0(X), \varepsilon > 0$，选取某个紧集$K$使得对于$x \notin K$，$|f(x)| < \varepsilon$，再选取某个具有紧闭包的开集$V$使得$K \subseteq V$. 由定理10.8得存在一个函数$g : X \to \mathbb{R}$，使得$K \prec g \prec V$. 则$fg \in C_c(X)$ 和$||f - fg||_\infty \leqslant 2\varepsilon$ 成立, 这就证明了$C_c(X)$ 在Banach格$c_0(X)$ 中稠密.

习题38.4　*设F是$C_c(X)$ 上的正线性泛函, 其中X是局部紧的Hausdorff 空间, 又设μ 是X上由F导出的外测度. 证明若μ^* 是由测度空间$(X, \mathcal{B}, \mu)$ 生成的外测度, 则$\mu^*(A) = \mu(A)$ 对X的每个子集A成立.*

解　设$A \subseteq X$. 我们知道

$$\mu(A) = \inf\{\mu(V) : V 是开集并且A \subseteq V\}.$$

所以, 若$A \subseteq V$ 且V是开集, 则$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(V) = \mu(V)$ 同样成立, 于是$\mu^*(A) \leqslant \mu(A)$. 另一方面, 由定理15.11得存在某个$B \in \mathcal{B}$ 使得$A \subseteq B$ 且$\mu^*(A) = \mu(B)$. 因而$\mu(A) \leqslant \mu(B) = \mu^*(A)$, 于是$\mu^*(A) = \mu(A)$ 得证.

习题38.5 设μ 和ν 是局部紧的Hausdorff 拓扑空间X上的两个正则Borel测度. 证明$\mu \geqslant \nu$ 成立当且仅当$\int f\mathrm{d}\mu \geqslant \int f\mathrm{d}\nu$ 对每个$f \in C_c(X)^+$ 成立.

解 设μ 和ν 是局部紧的Hausdorff拓扑空间X上的两个正则Borel测度.

先假设$\mu \geqslant \nu$ 成立(即假设$\mu(A) \geqslant \nu(A)$ 对每一个$A \in B$ 成立). 显然, 若ϕ 是一个μ 阶跃函数且具有形式$\phi = \sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}$, 其中$a_i \geqslant 0$, $A_i \in B$, 则ϕ 是一个ν 阶跃函数且$\int \phi\mathrm{d}\mu \geqslant \int \phi\mathrm{d}\nu$ 成立. 现设$0 \leqslant f \in C_c(X)$, 由于

$$f^{-1}([a,b)) = [f^{-1}\Big((-\infty,a)\Big)]^c \bigcap f^{-1}\Big((-\infty,b)\Big) \in \mathcal{B},$$

则由定理17.7得存在上述类型的μ 阶跃函数序列$\{\phi_n\}$, 满足对每个$x \in X$, $\phi_n(x) \uparrow f(x)$, 这蕴含着

$$\int f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n\mathrm{d}\mu \geqslant \lim_{n\to\infty} \int \phi_n\mathrm{d}\nu = \int f\mathrm{d}\nu.$$

反过来, 假设$\int f\mathrm{d}\mu \geqslant \int f\mathrm{d}\nu$ 对每个$0 \leqslant f \in C_c(X)$ 成立. 考虑到测度的正则性, 为了证明$\mu \geqslant \nu$ 成立, 我们仅需证明$\mu(K) \geqslant \nu(K)$ 对每个紧集K成立. 为此, 设K是一紧集. 给定$\varepsilon > 0$, 选取开集V使得$K \subseteq V$ 且$\mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$. 由定理10.8知存在函数$f \in C_c(X)$ 使得$K \prec f \prec V$. 于是由$\chi_K \leqslant f \leqslant \chi_V$ 得对所有$\varepsilon > 0$.

$$\nu(K) = \int \chi_K\mathrm{d}\nu \leqslant \int f\mathrm{d}\nu \leqslant \int f\mathrm{d}\mu \leqslant \int \chi_V\mathrm{d}\mu = \mu(V) < \mu(K) + \varepsilon.$$

即$\nu(K) \leqslant \mu(K)$ 成立, 得证.

习题38.6 在局部紧的Hausdorff 拓扑空间X中取定一个点x , 对每个$f \in C_c(X)$ 定义$F(f) = f(x)$. 证明F 是$C_c(X)$ 上的正线性泛函, 描述出满足唯一正则Borel测度μ , 满足对每个$f \in C_c(X)$, $F(f) = \int f\mathrm{d}\mu$, μ 的支集是什么?

解 显然, F是一个正线性泛函. 表示F的正则Borel测度是"基点"在x处的Dirac测度. 它的支集当然是集合$\{x\}$.

习题38.7 设X是紧Hausdorff拓扑空间. 若μ 和ν 都是正则Borel测度, 则证明正则Borel测度 $\mu \vee \nu$ 和$\mu \wedge \nu$ 满足

(a) $\mathrm{Supp}(\mu \vee \nu) = \mathrm{Supp}\mu \cup \mathrm{Supp}\nu$;

(b) $\mathrm{Supp}(\mu \wedge \nu) \subseteq \mathrm{Supp}\mu \cap \mathrm{Supp}\nu$.

应用(b)证明若$\mathrm{Supp}\mu \cap \mathrm{Supp}\nu = \varnothing$, 则$\mu \perp \nu$ 成立. 并举例说明$\mathrm{Supp}(\mu \wedge \nu) \neq \mathrm{Supp}\mu \cap \mathrm{Supp}\nu$.

解 (a) 设$\mathrm{A} = \mathrm{Supp}(\mu\vee\nu), B = \mathrm{Supp}\mu, C = \mathrm{Supp}\nu$, 由$\mu \leqslant \mu\vee\nu$, $\nu \leqslant \mu\vee\nu$ 以及$\mu\vee\nu(A^c) = 0$ 得$\mu(A^c) = \nu(A^c) = 0$, 故$B \subseteq A$ 且$C \subseteq A$. 即$B \cup C \subseteq A$. 另一方面, 不等式$\mu \vee \nu \leqslant \mu + \nu$ 蕴含着

$$\mu \vee \nu(B^c \cap C^c) \leqslant (\mu + \nu)(B^c \cap C^c) \leqslant \mu(B^c) + \nu(C^c) = 0,$$

所以$A \subseteq (B^c \cap C^c)^c = B \cup C$.

(b) 此结论由不等式$\mu \wedge \nu \leqslant \mu$ 及$\mu \wedge \nu \leqslant \nu$ 容易得到.

若$\text{Supp}\mu\cap\text{Supp}\nu=\varnothing$，则由(b)知$\text{Supp}(\mu\wedge\nu)=\varnothing$ 成立，故$\mu\wedge\nu=0$．对于(b)中相等不必成立的例子，设$X=\mathbb{R}$，μ 是Lebesgue测度，ν 是“基点”在0处的Dirac测度. 则由习题36.5，我们有$\mu\wedge\nu=0$．因此$\text{Supp}(\mu\wedge\nu)=\varnothing$ 成立，但$\text{Supp}\mu\cap\text{Supp}\nu=\mathbb{R}\cap\{0\}=\{0\}$．

习题38.8 设X是一个局部紧的Hausdorff 拓扑空间. $C_c(X)$ 上的正线性泛函F同时是格同态，这里格同态即指对每一对$f,g\in C_c(X)$, $F(f\vee g)=\max\{F(f),F(g)\}$ 成立.

解 设F是$C_c(X)$ 上的正线性泛函. 我们将证明F是一个格同态当且仅当存在$c\geqslant 0$ 和$a\in X$ 使得$F(f)=cf(a)$ 对所有的$f\in C_c(X)$ 成立.

显然，若对某个$c\geqslant 0$ 和某个$a\in X$，我们有$F(f)=cf(a)$ 对每个$f\in C_c(X)$ 成立，则F是一个格同态. 反过来，假设F是一个非零格同态，令μ 是表示F的正则Borel测度. 若$x,y\in\text{Supp}\mu$ 满足$x\neq y$，则不难看到在$C_c(X)$ 中存在f,g 使得$f\wedge g=0$ 且$f(x)=g(y)=1$．因此，

$$F(f\vee g)=F(f+g)=F(f)+F(g)>\max\{F(f),F(g)\}$$

必定成立，而这是一个矛盾. 所以$\text{Supp}\mu$ 恰由一点构成；设$\text{Supp}\mu=\{a\}$. 令$c=\mu(\{a\})>0$，于是对每一个$f\in C_c(X)$，我们有

$$F(f)=\int f\mathrm{d}\mu=f(a)\cdot\mu(\{a\})=cf(a).$$

习题38.9 设X是一个局部紧的Hausdorff 拓扑空间且X是不可数集. 证明:

(a) $C_c^*(X)$ 是不可分的;

(b) $C[0,1]$ (具有上确界范数)不是一个自反Banach空间.

解 (a) 对每一个$x\in X$，定义正线性泛函$F_x:C_c(X)\to\mathbb{R}$ 为$F_x(f)=f(x)$，则有$\|F_x-F_y\|=2$ 对$x\neq y$ 成立. 显然，集合$\{F_x:x\in X\}$ 是$C_c^*(X)$ 的不可数子集，因此，$\{B(F_x,1):x\in X\}$ 是互不相交的开球构成的不可数集合. 由此容易得到没有$C_c^*(X)$ 的可数子集在$C_c^*(X)$ 中稠密.

(b) 由问题11.12我们知道$C[0,1]$ 是可分的. 若$C[0,1]$ 是自反的，则它的二次对偶同样可分，从而(由习题29.8)它的一次对偶必定可分，但这与(a)相矛盾. 因此，$C[0,1]$ 不是一个自反Banach空间.

习题38.10 设X是一个局部紧的Hausdorff 拓扑空间. 证明对一个$\mathcal{B}$上的有限符号测度μ，下列叙述等价:

(a) μ 属于$M_b(X)$；

(b) μ^+ 和μ^- 都是有限正则Borel测度;

(c) 对每个$A\in\mathcal{B}$ 及$\varepsilon>0$，存在一个紧集K和一个开集V, $K\subseteq A\subseteq V$，使得$|\mu(B)|<\varepsilon$ 对所有的$B\in\mathcal{B},B\subseteq V/K$ 成立.

解 (a)⇒ (b)选取两个有限正则Borel测度μ_1 和μ_2 使得$\mu=\mu_1-\mu_2$，则$\mu^+=(\mu_1-\mu_2)^+=\mu_1\vee\mu_2-\mu_2$ 成立. 又由定理38.5, $\mu_1\vee\mu_2$ 是一有限正则Borel测度，于是μ^+ 是一有限正则Borel测度. 同样，μ^- 是一有限正则Borel测度.

(b)⇒ (c)首先注意到$|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ 是一有限正则Borel测度. 现设$A \in \mathcal{B}$ 并给定$\varepsilon > 0$, 则存在一个紧集K和一个开集V使得$K \subseteq A \subseteq V$ 且$|\mu|(V \backslash K) < \varepsilon$. 因此, 若$B \in \mathcal{B}$ 满足$B \subseteq V \backslash K$, 则$|\mu(B)| \leqslant |\mu|(B) \leqslant |\mu|(V \backslash K) < \varepsilon$ 成立.

(c)⇒ (a)设$A \in \mathcal{B}, \varepsilon > 0$, 选取紧集K和开集V使得(c)满足, 则由定理36.9, 我们有

$$0 \leqslant \mu^+(A) - \mu^+(K) = \mu^+(A \backslash K) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{B}\text{且}B \subseteq A \backslash K\}$$

以及

$$0 \leqslant \mu^+(V) - \mu^+(A) = \mu^+(V \backslash A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{B}\text{且}B \subseteq V \backslash A\}.$$

于是, $\mu^+(A) - \mu^+(K) \leqslant \varepsilon$ 及$\mu^+(V) - \mu^+(A) \leqslant \varepsilon$ 都成立. 因此, μ^+ 是一个有限正则Borel测度. 同样, μ^- 是一个有限正则Borel测度, 所以$\mu = \mu^+ - \mu^- \in M_{\text{b}}(X)$.

习题38.11 赋范空间中一个序列$\{x_n\}$ 称为**弱收敛**于某一向量x , 若$\lim f(x_n) = f(x)$ 对每个连续线性泛函成立.

(a) 证明赋范空间中的序列至多有一个弱极限;

(b) 设X是一个Hausdorff紧拓扑空间. 证明$C(X)$ 中的序列$\{f_n\}$ 弱收敛于某一函数f当且仅当$\{f_n\}$ 是范数有界的并且$\lim f_n(x) = f(x)$ 对每个$x \in X$ 成立.

解 (a) 假设赋范向量空间$\overline{Y}$ 中的序列$\{x_n\}$ 满足对每个$f \in \overline{Y}^*$, $\lim f(x_n) = f(x)$ 且$\lim f(x_n) = f(y)$, 则$f(x - y) = 0$ 对所有$f \in \overline{Y}^*$ 成立. 而由定理29.4, 我们看到$x - y = 0$, 故$\{x_n\}$ 至多有一个弱极限.

(b) 首先假设$C(X)$ 中的序列$\{f_n\}$ 弱收敛于某个函数$f \in C(X)$, 则由定理29.8, $\{f_n\}$ 是范数有界的. 若$x \in X$, 令μ_x 表示具有支集$\{x\}$ 的Dirac测度, 则有

$$f_n(x) = \int f_n \mathrm{d}\mu_x \to \int f \mathrm{d}\mu_x = f(x).$$

反过来, 若$\{f_n\}$ 是范数有界的且$\lim f_n(x) = f(x)$ 对每个$x \in X$ 成立(这里, 当然$f \in C(X)$), 则Lebesgue控制收敛定理蕴含$\lim \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu$ 对每个Borel测度μ 成立. 再由Riesz表示定理, 这表明$\{f_n\}$ 弱收敛于f.

习题38.12 设μ 是局部紧的Hausdorff 拓扑空间X上的一个正则Borel测度, $f \in L_1(\mu)$, 证明有限符号测度ν , 定义为对每个Borel集E,

$$\nu(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu$$

是一个(有限)正则Borel符号测度. 换句话说, 即证$\nu \in M_b(X)$.

解 我们可以假设$f(x) \geqslant 0$ 对所有的x成立. 由习题22.7, 集合$A = \{x \in X : f(x) > 0\}$ 是一个关于μ 的σ 有限集, 则可以选取一个μ 可测集序列$\{X_n\}$ 满足对每个n, $\mu(X_n) < \infty$ 且$X_n \uparrow A$.

现设E是一个Borel集且$\varepsilon > 0$, 显然$\nu(E) = \nu(E \cap A)$, 则选取某个n使得$\nu(E) - \nu(X_n \cap E) < \varepsilon$. 同样, 由$\mu$ 的正则性和习题22.6, 我们看到存在一个紧集$K \subseteq X_n \cap E$ 满足

$$\nu(X_n \cap E) - \nu(K) = \int_{X_n \cap E} f \mathrm{d}\mu - \int_K f \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

于是紧集$K \subseteq E$ 满足

$$0 \leqslant \nu(E) - \nu(K) = [\nu(E) - \nu(X_n \cap E)] + [\nu(X_n \cap E) - \nu(K)] < 2\varepsilon.$$

进一步, 应用习题22.6及μ 的正则性, 我们看到对每个n存在一个开集V_n 满足$X_n \cap E \subseteq V_n$ 以及$\nu(V_n) - \nu(X_n \cap E) < \varepsilon/2^n$. 于是开集$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ 满足$E \subseteq V$, 又由于$V \backslash E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(V_n \backslash X_n \cap E)$, 我们看到

$$0 \leqslant \nu(V) - \nu(E) = \nu(V \backslash E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu(V_n \backslash X_n \cap E) < \varepsilon.$$

总之, 上面的结果表明ν 是一个正则Borel测度.

习题38.13 *推广定理38.5的部分(3)如下: 若μ 和ν 是局部紧的Hausdorff 拓扑空间上的两个正则Borel测度, 其中一个σ 有限, 则证明$\mu \wedge \nu$ 也是一个正则Borel测度.*

解 设μ 和ν 是局部紧的Hausdorff 拓扑空间X上的两个正则Borel测度, 并假设μ 是σ 有限的. 同样, 设$\omega = \mu \wedge \nu$, 则(由于$\omega \leqslant \mu$)可得ω 是一个关于μ 绝对连续的σ 有限Borel 测度.

现设E是X的一个Borel子集, 满足$\mu(E) < \infty$, 且设$\varepsilon > 0$. 考虑限制在E的Borel集集合$\mathcal{B}_E$ (由习题12.13, 我们知道$\mathcal{B}_E = \{B \cap E : B \in \mathcal{B}\}$)上的ω 和μ , 由Radon-Nikodym定理得存在(唯一)一个非负函数$f \in L_1(E, \mathcal{B}_E, \mu)$ 满足对每个$B \in \mathcal{B}$,

$$\omega(B \cap E) = \int_{B \cap E} f \mathrm{d}\mu.$$

由于μ 是一个正则Borel测度, 则由习题22.6得存在E的一个紧子集K使得

$$0 \leqslant \omega(E) - \omega(K) = \int_E f \mathrm{d}\mu - \int_K f \mathrm{d}\mu = \int_{E \backslash K} f \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

因此, 我们推出

$$\omega(E) = \sup\{\omega(K) : K \text{ 是紧集且} K \subseteq E\}. \qquad (\bigstar)$$

再应用ω 的σ 有限性就证得($\bigstar$)对E的每个Borel子集仍然正确.

剩下仅需证明每个Borel集的测度可以由开集的测度从上面近似. 为此, 设E是任意一个Borel集. 又

$$\omega(E) = \mu \wedge \nu(E) = \inf\{\mu(B) + \nu(E \backslash B) : B \in \mathcal{B} \text{且} B \subseteq E\}.$$

令$c = \inf\{\omega(O) : O \text{ 是开集且} E \subseteq O\}$, 又设$\varepsilon > 0$, 给定$B \in \mathcal{B}$ 且$B \subseteq E$, 选取开集V 和W 使得$B \subseteq V, E \backslash B \subseteq W, \mu(V) \leqslant \mu(B) + \varepsilon$, 以及$\nu(W) \leqslant \nu(E \backslash B) + \varepsilon$, 则我们有

$$\begin{aligned} \omega(E) \leqslant c \leqslant \omega(V \cup W) &\leqslant \omega(V) + \omega(W) \leqslant \mu(V) + \nu(W) \\ &\leqslant \mu(B) + \varepsilon + \nu(E \backslash B) + \varepsilon = \mu(B) + \nu(E \backslash B) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

于是$\omega(E) \leqslant c \leqslant \omega(E) + 2\varepsilon$ 对每个$\varepsilon > 0$ 成立, 所以$\omega(E) = c$, 证毕.

习题38.14 证明完备可分度量空间上的每一个有限Borel测度都是正则Borel测度. 并应用该结论给出Lebesgue测度是正则Borel测度的另一证明.

解 设X 是完备可分的度量空间, $\mathcal{B}$ 是X 的所有Borel集构成的σ 代数, 并设$\{x_1, x_2, \cdots\}$ 是X 中的一个稠密可数子集, $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty)$ 是一个测度.

考虑X 的子集构成的集合体$\mathcal{A}$, 定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B} : \mu(A) &= \inf\{\mu(O) : A \subseteq O\text{且}O\text{是开集}\} \\ &= \sup\{\mu(K) : K \subseteq A\text{且}K\text{是紧集}\}.\end{aligned}$$

集合体$\mathcal{A}$ 具有下列性质:

(1) $\mathcal{A}$ 既含有开集又含有闭集.

为了证明这一点, 先假设V是一个开集, 并设$\varepsilon > 0$, 对每个n, 令$\mathcal{F}_n$ 是所有具有形式$B(x_i, r)$ 的开球构成的集合体, 其中r是一个小于或等于$1/n$ 的有理数且$\overline{B(x_i, r)} \subseteq V$. 显然, 每个$\mathcal{F}_n$ 至多可数且$V = \bigcup_{B \in \mathcal{F}_n} B$ 成立. 对每个n选取$B_1^n, \cdots, B_{k_n}^n \in \mathcal{F}_n$ 使得

$$\mu\left(V \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} B_i^n\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

进一步, 令$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n} B_i^n$, 则C 是一个全有界集. 因此, 它的闭包$\bar{C}$ 也是一个全有界集(为什么?). 因为(由定理6.13)$\bar{C}$ 本身是一个完备的度量空间, 则由定理7.8知$\bar{C}$ 是一个紧集. 现注意到$\bar{C} \subseteq V$ 成立, 且

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \mu(V) - \mu(\bar{C}) \leqslant \mu(V) - \mu(C) = \mu(V \setminus C) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(V \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} B_i^n\right)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(V \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} B_i^n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\mu(V) &= \inf\{\mu(O) : V \subseteq O\text{且}O\text{ 是开集}\} \\ &= \sup\{\mu(K) : K \subseteq V\text{ 且}K\text{是紧集}\}\end{aligned}$$

成立, 所以$V \in \mathcal{A}$.

现再设C 是一个闭集, 且设$\varepsilon > 0$. 由前面的结论, 存在紧集K 使得$\mu(X) - \mu(K) < \varepsilon$, 则$C$ 的紧子集$C \cap K$ 满足

$$\begin{aligned}\mu(C) - \mu(C \cap K) &= \mu(C \setminus C \cap K) \\ &= \mu(C \setminus K) \leqslant \mu(X \setminus K) = \mu(X) - \mu(K) < \varepsilon.\end{aligned}$$

同样由前一部分的结论, 存在紧集K_1 使得$K_1 \subseteq X \setminus C$ 且$\mu(X \setminus C) - \mu(K_1) < \varepsilon$. 现在, 开集 $O = X \setminus K_1$ 满足$C \subseteq O$ 且

$$\mu(O) - \mu(C) = \mu(X \setminus K_1) - \mu(C) = \mu(X) - \mu(K_1) - \mu(C)$$

$$= \mu(X\backslash C) - \mu(K_1) < \varepsilon.$$

则

$$\mu(C) = \inf\{\mu(O) : C \subseteq O且O \text{ 是开集}\}$$
$$= \sup\{\mu(K) : K \subseteq C且K是紧集\}$$

同样成立, 故$C \in \mathcal{A}$.

(2) 若$A \in \mathcal{A}$, 则$A^c \in \mathcal{A}$.

由$\mu(A) = \sup\{\mu(K\} : K \subseteq A$ 且K 为紧集$\}$得

$$\begin{aligned}\mu(A^c) &= \mu(X) - \mu(A)\\ &= \inf\{\mu(X) - \mu(K) : K \subseteq A且K为紧集\}\\ &= \inf\{\mu(K^c) : K \subseteq A且K为紧集\}\\ &= \inf\{\mu(O) : A^c \subseteq O且O \text{ 为开集}\}\end{aligned}$$

同样, $\mu(A) = \inf\{\mu(O) : A \subseteq O$ 且O 为开集$\}$蕴含着

$$\mu(A^c) = \sup\{\mu(C) : C \subseteq A^c且C为闭集\}.$$

因为由部分(1), $\mu(C) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq C$ 且K 为紧集$\}$对每个闭集C 成立, 所以我们看到

$$\mu(A^c) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A^c \text{ 且}K为紧集\}.$$

(3) 若$\{A_n\}$ 是$\mathcal{A}$ 中的一个序列, 则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

设$\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 又设$\varepsilon > 0$. 对每个$n$取一个开集$O_n$ 使得$A_n \subseteq O_n$ 且$\mu(O_n\backslash A_n) < \varepsilon 2^{-n}$. 则开集$O = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ 满足$A \subseteq O$, 并由$O\backslash A = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(O_n\backslash A_n)$, 我们得到

$$\mu(O) - \mu(A) = \mu(O\backslash A) \leqslant \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(O_n\backslash A_n)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mu(O_n\backslash A_n) < \varepsilon.$$

另一方面, 固定某个k使得$\mu(A\backslash \bigcup_{i=1}^{k} A_i) < \varepsilon$. 然后对每个$1 \leqslant i \leqslant k$ 选取紧集$K_i \subseteq A_i$ 使得$\mu(A_i\backslash K_i) < \varepsilon 2^{-i}$. 则紧集$K = \bigcup_{i=1}^{k} K_i$ 满足$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i \subseteq A$ 且

$$\begin{aligned}\mu(A) - \mu(K) &= \mu(A\backslash K) = \mu\left(A\backslash \bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) + \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)\backslash K\right)\\ &< \varepsilon + \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)\backslash K\right) = \varepsilon + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\backslash \bigcup_{i=1}^{k} K_i\right)\\ &\leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^{k}\mu(A_i\backslash K_i) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.\end{aligned}$$

叙述(3)得到证明.

现在, 由前面的陈述, 我们看到$\mathcal{A}$ 是一个含有开集的σ 代数, 因此, 每个Borel集属于$\mathcal{A}$ (即$\mathcal{A}=\mathcal{B}$), 所以μ 是一个正则Borel测度.

现让我们应用前面的结论来证明$\mathbb{R}^n$ 上的Lebesgue测度λ 是一正则Borel测度. 为此, 设A 是任一个Borel集, 又设V_n (或C_n)表示$\mathbb{R}^n$ 中的开(或闭)球, 中心在原点, 半径为n . 由于每个C_n 本身就是一个完备可分度量空间, 则由前面的结论知, 限制于每个C_n 上的λ 是一个正则Borel测度. 因此, 我们有

$$\lambda(A\cap C_n)=\sup\{\lambda(K):K\subseteq A\cap C_n\text{且}K\text{为紧集}\}.$$

又由$A\cap C_n\uparrow A$ 得$\lambda(A\cap C_n)\uparrow\lambda(A)$, 则简单的论证表明

$$\lambda(A)=\sup\{\lambda(K):K\subseteq A\text{且}K\text{是紧集}\}.$$

进一步, 注意到若$\lambda(A)=\infty$, 则

$$\lambda(A)=\inf\{\lambda(O):A\subseteq O\text{ 且}O\text{为开集}\}.$$

显然正确. 故我们假设$\lambda(A)<\infty$, 并令$\varepsilon>0$. 由C_n 上λ 的正则性(以及V_n 是开集的事实), 我们看到

$$\begin{aligned}\lambda(A\cap V_n)&=\inf\{\lambda(O\cap C_n):V_n\cap A\subseteq O\cap C_n\text{ 且}O\text{为开集}\}\\&=\inf\{\lambda(O\cap V_n):V_n\cap A\subseteq O\cap V_n\text{且}O\text{ 为开集}\}\\&=\inf\{\lambda(O):A\cap V_n\subseteq O\text{ 且}O\text{为开集}\}.\end{aligned}$$

因此, 对每个n存在开集O_n 使得$A\cap V_n\subseteq O_n$ 且$\lambda(O_n\backslash A\cap V_n)<\varepsilon 2^{-n}$. 现在集合$O=\bigcup_{n=1}^\infty O_n$ 为开集且满足$A\subseteq O$. 则由

$$O\backslash A=\bigcup_{n=1}^\infty O_n\backslash\bigcup_{n=1}^\infty A\cap V_n\subseteq\bigcup_{n=1}^\infty(O_n\backslash A\cap V_n)$$

我们看到

$$0\leqslant\lambda(O)-\lambda(A)=\lambda(O\backslash A)\leqslant\sum_{n=1}^\infty\lambda(O_n\backslash A\cap V_n)<\varepsilon.$$

于是, $\lambda(A)=\inf\{\lambda(O):A\subseteq O\text{ 且}O\text{ 为开集}\}$同样成立, 所以Lebesgue测度$\lambda$ 是一正则Borel测度.

习题38.15 设X 是一个Hausdorff紧拓扑空间. 若$\phi:X\to X$ 是一个连续函数, 则证明存在X 上的正则Borel测度使得

$$\int f\circ\phi\mathrm{d}\mu=\int f\mathrm{d}\mu$$

对每个$f\in C(X)$ 成立.

解 设X 是一个Hausdorff紧拓扑空间, $\phi:X\to X$ 是一个连续函数. 固定一个$\omega\in X$, 又设$\mathcal{L}\mathrm{im}:\ell_\infty\to\ell_\infty$ 是Banach-Mazur极限(参见习题29.7), 现考虑正线性泛函$F:C(X)\to\mathbb{R}$, 定义为

$$F(f)=\mathcal{L}\mathrm{im}(f(\phi(\omega)),f(\phi^2(\omega)),f(\phi^3(\omega)),\cdots),$$

令μ 为X 上表示F 的正则Borel测度, 即$F(f)=\int f\mathrm{d}\mu$ 对每个$f\in C(X)$ 成立. 由等式

$$\mathcal{L}\mathrm{im}(x_1,x_2,\cdots)=\mathcal{L}\mathrm{im}(x_2,x_3,\cdots)$$

对所有$(x_1,x_2,\cdots)\in l_\infty$ 成立容易推出$F(f)=F(f\circ\phi)$ 对每个$f\in C(X)$ 成立. 因此, 正则Borel测度μ 对每个$f\in C(X)$ 满足$\int f\mathrm{d}\mu=\int f\circ\phi\mathrm{d}\mu$.

习题38.16 本习题给出$C_c(X)$ 的有序对偶$C_c^\sim(X)$ 的一个标识. 考虑由所有形式表达式$\mu_1-\mu_2$ 所构成的集合体$\mathcal{M}(X)$, 其中μ_1 和μ_2 是正则Borel测度. 即

$$\mathcal{M}(X)=\{\mu_1-\mu_2:\mu_1\text{和}\mu_2\text{为}X\text{上的正则Borel测度}\}.$$

(a) 在$\mathcal{M}(X)$ 中定义$\mu_1-\mu_2\equiv\nu_1-\nu_2$, 即, 对所有$A\in\mathcal{B}$, $\mu_1(A)+\nu_2(A)=\nu_1(A)+\mu_2(A)$. 证明"$\equiv$" 是一个等价关系;

(b) 所有等价类构成的集合体仍记为$\mathcal{M}(X)$, 即, 若$\mu_1+\nu_2=\nu_1+\mu_2$ 成立, 则$\mu_1-\mu_2$ 和$\nu_1-\nu_2$ 被认为是恒同的. 在$\mathcal{M}(X)$ 中定义代数运算

$$(\mu_1-\mu_2)+(\nu_1-\nu_2)=(\mu_1+\nu_1)-(\mu_2+\nu_2),\alpha(\mu_1-\mu_2)=\begin{cases}\alpha\mu_1-\alpha\mu_2, & \text{若}\alpha\geqslant 0,\\ (-\alpha)\mu_2-(-\alpha)\mu_1, & \text{若}\alpha<0.\end{cases}$$

证明这些运算定义恰当(即, 证明它们仅依赖于等价类), 并证明它们使得$\mathcal{M}(X)$ 成为一个向量空间.

(c) 在$\mathcal{M}(X)$ 中定义一个次序关系: 只要$\mu_1(A)+\nu_2(A)\geqslant\nu_1(A)+\mu_2(A)$ 对每个$A\in\mathcal{B}$ 成立, 就有$\mu_1-\mu_2\geqslant\nu_1-\nu_2$. 证明"$\geqslant$"定义恰当且它是$\mathcal{M}(X)$ 上的一个次序关系, 而在这个次序关系下$\mathcal{M}(X)$ 是一个向量格.

(d) 考虑从$\mathcal{M}(X)$ 到$C_c(X)$ 的映射$\mu=\mu_1-\mu_2\mapsto F_\mu$, 定义为对每个$f\in C_c(X)$, $F_\mu(f)=\int f\mathrm{d}\mu_1-\int f\mathrm{d}\mu_2$. 证明F_μ 定义恰当且$\mu\mapsto F_\mu$ 是一个从$M(X)$ 到$C_c(X)$ 上的格同构(引理38.6可能在这里有帮助), 即证明$C_c^\sim(X)=\mathcal{M}(X)$ 成立.

解 (a) 显然, $\mu_1-\mu_2\equiv\mu_1-\mu_2$ 且$\mu_1-\mu_2\equiv\nu_1-\nu_2$ 蕴含着$\nu_1-\nu_2\equiv\mu_1-\mu_2$. 对于传递性, 设$\mu_1-\mu_2\equiv\nu_1-\nu_2$ 及$\nu_1-\nu_2\equiv\omega_1-\omega_2$, 即假设$\mu_1+\nu_2=\nu_1+\mu_2$ 及$\nu_1+\omega_2=\omega_1+\nu_2$. 相加最后两个等式, 我们看到

$$\mu_1+\omega_2+(\nu_1+\nu_2)=\omega_1+\mu_2+(\nu_1+\nu_2). \qquad (\bigstar)$$

由于所有涉及的测度都是正则Borel测度, 则由($\bigstar$)得$\mu_1(K)+\omega_2(K)=\omega_1(K)+\mu_2(K)$ 对X 的每个紧子集K 成立. 测度的正则性蕴含着对每个$A\in\mathcal{B}$,

$$\mu_1(A)+\omega_2(A)=\omega_1(A)+\mu_2(A),$$

所以$\mu_1-\mu_2=\omega_1-\omega_2$ 成立.

(b) 为了说明加法定义恰当, 假设$\mu_1-\mu_2\equiv\nu_1-\nu_2$, $\omega_1-\omega_2\equiv\pi_1-\pi_2$. 即$\mu_1+\nu_2=\nu_1+\mu_2,\omega_1+\pi_2=\pi_1+\omega_2$. 所以$(\mu_1+\omega_1)+(\nu_2+\pi_2)=(\nu_1+\pi_1)+(\mu_2+\omega_2)$. 亦即,

$$(\mu_1-\mu_2)+(\omega_1-\omega_2)=(\mu_1+\omega_1)-(\mu_2+\omega_2)$$

$$\equiv (\nu_1 + \pi_1) - (\nu_2 + \pi_2) = (\nu_1 - \nu_2) + (\pi_1 - \pi_2).$$

同样, 乘法也定义恰当. 另外用常规方法即可证明在这些代数运算下$\mathcal{M}(X)$ 是一个向量空间.

(c) 为了证明"$\geqslant$"定义恰当, 我们可以像上面证明部分(b)那样得证. 另外用常规方法可以验证"$\geqslant$"使得$\mathcal{M}(X)$ 成为一个半序向量空间.

其次我们将证明$\mathcal{M}(X)$ 是一个向量格. 只需证明对每个$\mu_1 - \mu_2 \in \mathcal{M}(X), (\mu_1 - \mu_2)^+$ 在$\mathcal{M}(X)$ 中存在. 为此, 设$\mu_1 - \mu_2$ 在$\mathcal{M}(X)$ 中. 由定理38.5, $\mu_1 \vee \mu_2$ 是一个正则Borel测度, 我们断言$(\mu_1 - \mu_2)^+ = \mu_1 \vee \mu_2 - \mu_2$ 在$\mathcal{M}(X)$ 中成立. 显然,

$$\mu_1 - \mu_2 \leqslant \mu_1 \vee \mu_2 - \mu_2 \text{和} 0 \leqslant \mu_1 \vee \mu_2 - \mu_2$$

都成立. 为了看出$\mu_1 \vee \mu_2 - \mu_2$ 是$\mu_1 - \mu_2$ 和0的最小上界, 假设$\mu_1 - \mu_2 \leqslant \nu_1 - \nu_2 = \nu$ 及$\nu \geqslant 0$, 则$\nu + \mu_2$ 是一个正则Borel测度, 使得$\nu + \mu_2 \geqslant \mu_1$ 和$\nu + \mu_2 \geqslant \mu_2$ 同时成立. 于是由定理38.5, $\nu + \mu_2 \geqslant \mu_1 \vee \mu_2$, 因此$\nu \geqslant \mu_1 \vee \mu_2 - \mu_2$ 在$\mathcal{M}(X)$ 中成立. 这表明$\mu_1 \vee \mu_2 - \mu_2$ 是$\mu_1 - \mu_2$ 和0的最小上界.

(d) 首先用常规方法可以证明, 从$\mathcal{M}(X)$ 到$C_c^{\sim}(X)$ 内的映射$\mu \mapsto F_\mu$ 定义恰当且是线性的. 此外, 由于每个$F \in C_c^{\sim}(X)$ 可以写成两个正线性泛函之差, 则Riesz表示定理保证$\mu \mapsto F_\mu$ 是映上的. 为了看出$\mu \mapsto F_\mu$ 是一对一的, 假设$F_\mu = 0$. 则$\int f\mathrm{d}\mu_1 = \int f\mathrm{d}\mu_2$ 对每个$f \in C_c(X)$ 成立. 故(由Riesz表示定理)$\mu_1 = \mu_2$. 于是$\mu = \mu_1 - \mu_2 = 0$, 从而$\mu \mapsto F_\mu$ 是一对一的.

最后, 注意到$\mu \geqslant 0$ 在$\mathcal{M}(X)$ 中成立当且仅当$F_\mu \geqslant 0$ 在$C_c^{\sim}(X)$ 中成立, 则由引理38.6我们看到$\mu \mapsto F_\mu$ 是一个从$M(X)$ 到$C_c^{\sim}(X)$ 上的格同构. 因此, 在这个格同构下, 我们可以说$C_c^{\sim}(X) = \mathcal{M}(X)$.

习题38.17 本题表明对一个非紧空间X , 通常$C_c^*(X)$ 是$C_c^{\sim}(X)$ 的一个真理想. 设X 是一个局部紧的Hausdorff 拓扑空间且含有一个开集序列$\{O_n\}$ 使得对每个$n, O_n \subsetneq O_{n+1}$, $O_n \neq O_{n+1}$ 以及$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$.

(a) 证明若X 是σ-紧而不是一个紧空间, 则X 容许一个具有前面所述性质的开集序列$\{O_n\}$;

(b) 选取$x_1 \in O_1$ 及$x_n \in O_n \backslash O_{n-1} (n \geqslant 2)$. 则证明对$f \in C_c(X)$,

$$F(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$$

定义了$C_c(X)$ 上一个非连续的正线性泛函.

(c) 确定X 上表示F的(唯一)正则Borel测度μ , μ 的支集是什么?

解 (a) 设$\{K_n\}$ 是一个紧集序列满足$K_n \uparrow X$. 对每个n 选取一个具有紧闭包的开集V_n 使得$K_n \subseteq V_n$. 令$O_n = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, 则有$O_n \uparrow X$. 由于每个O_n 具有紧闭包且X 不是紧集, 则$O_n \neq X$ 对每个n 成立. 运用这一推理到$\{O_n\}$ 的子序列, 我们可以假设$O_n \neq O_{n+1}$ 对每个n 同样成立.

(b) 令$f \in C_c(X)$. 由于Supp$f \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ 成立且Supp$f$ 是紧的, 则存在k 满足Supp$f \subseteq O_k$. 于是对于$n > k, f(x_n) = 0$, 所以F 明确地定义了$C_c(X)$ 上的一个正线性泛函.

接下来我们证明F 不是连续的. 由定理10.8得, 存在$g_n \in C_c(X)$ 满足$\{x_1, \cdots, x_n\} < g_n < O_n$. 因此, $||F|| \geqslant F(g_n) = n$ 对每个n 成立, 所以$||F|| = \infty$.

(c) 表示F 的正则Borel测度μ 在Borel集B 上的定义为

$$\mu(B) = \{x_1, x_2, \cdots\} \cap B \text{ 中元素的数目.}$$

(若$\{x_1, x_2, \cdots\} \cap B$ 是可数的, 则$\mu(B) = \infty$, 若$\{x_1, x_2, \cdots\} \cap B = \varnothing$, 则$\mu(B) = 0$.)同样, 我们看到

$$\mathrm{Supp}\mu = \{x_1, x_2, \cdots\}.$$

39. 微分与积分

习题39.1 若μ 是$\mathbb{R}^k$ 上的一个Borel测度, 证明$\mu \perp \lambda$ 成立当且仅当$\mathrm{D}\mu(x) = 0$ 对几乎所有x 成立.

解 假设$\mu \perp \lambda$, 选取两个互不相交的Borel集A 和B , 满足$A \cup B = \mathbb{R}^k$ 且$\mu(A) = \lambda(B) = 0$. 由引理39.3, $\mathrm{D}\mu(x) = 0$ 对A 中的几乎所有x 成立, 故$\mathrm{D}\mu(x) = 0$ 对$\mathbb{R}^k$ 中的几乎所有x 成立.

现假设$\mathrm{D}\mu(x) = 0$ 对几乎所有$x \in \mathbb{R}^k$ 成立. 应用Lebesgue分解定理37.7可将μ 写成$\mu = \mu_1 + \mu_2$, 其中$\mu_1 << \lambda, \mu_2 \perp \lambda$. 由前面的结论得$\mathrm{D}\mu_2(x) = 0$ 对$\mathbb{R}^k$ 中的几乎所有x 成立. 于是由定理39.43得

$$\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\lambda} = \mathrm{D}\mu_1 = \mathrm{D}\mu = 0,$$

故$\mu_1 = 0$. 因而$\mu = \mu_2 \perp \lambda$ 成立.

习题39.2 证明若E 是$\mathbb{R}^k$ 中的一个Lebesgue可测子集, 则E 中的几乎所有点都是稠密点.

解 对每点$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ 和每个$\varepsilon > 0$, 考虑开区间$I_\varepsilon = \prod_{i=1}^{k} (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$. 若$E$ 是一个Lebesgue可测集, 则

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\lambda(_E \cap I_\varepsilon)}{(2\varepsilon)^k} = \chi_E(\boldsymbol{x}) \qquad (\bigstar)$$

对几乎所有$\boldsymbol{x}$成立. 为了说明这一点, 首先注意到不失一般性我们可以假设$\lambda(E) < \infty$ 成立(为什么?). 现考虑$\mathbb{R}^k$ 上的有限Borel测度μ , 定义为

$$\mu(A) = \lambda(E \cap A) = \int_A \chi_E \mathrm{d}\lambda.$$

显然, $\mu \ll \lambda$ 且$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} = \chi_E$. 则由定理39.4, 我们有$D\mu = \chi_E$ a.e., 从而得到($\bigstar$)的有效性.

习题39.3 记$B_r(\boldsymbol{a})$为中心在$a \in \mathbb{R}^k$, 半径为r 的开球. 若f 是一个$\mathbb{R}^k$ 上的Lebesgue可积函数, 则点$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^k$ 被称为f 的Lebesgue点, 若

$$\lim_{r \to 0+} \frac{1}{\lambda(B_r(\boldsymbol{a}))} \int_{B_r(\boldsymbol{a})} |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| \mathrm{d}\lambda(\boldsymbol{x}) = 0.$$

证明若f 是$\mathbb{R}^k$ 上的一个Lebesgue可积函数, 则$\mathbb{R}^k$ 的几乎所有点都是Lebesgue点.

解 记Q 为$\mathbb{R}$ 的所有有理数构成的集合. 固定某个$a \in Q$, 令$B_n = B(0, n)$. 再定义有限Borel测度μ 为

$$\mu(E) = \int_{E \bigcap B_n} |f(x) - a| \mathrm{d}\lambda(x).$$

由于$\mu \ll \lambda$, 则由定理39.4得

$$\mathrm{D}\mu = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} = |f - a|\chi_{B_n} \text{a.e.},$$

因此,

$$\lim_{r \to 0+} \frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(t) - a| \mathrm{d}\lambda(t) = |f(x) - a| \qquad (\bigstar)$$

对B_n 中的几乎所有x 成立, 从而(由于n 是任意的)($\bigstar$)对$\mathbb{R}^k$ 中的几乎所有x 成立. 设E_a 是一个Lebesgue零测度集, 使得对所有$x \notin E_a$, ($\bigstar$)成立. 令$E = \bigcup_{a \in Q} E_a$, 则有$\lambda(E) = 0$.

现设$y \notin E$, $\varepsilon > 0$. 选一个有理数$s \in Q$ 满足$|s - f(y)| < \varepsilon$ (我们将假设f 是处处实值的). 由于$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - s| + |s - f(y)|$, 我们看到

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r \to 0+} \frac{1}{\lambda(B_r(y))} \int_{B_r(y)} |f(x) - f(y)| \mathrm{d}\lambda(x) \\
\leqslant &\lim_{r \to 0+} \frac{1}{\lambda(B_r(y))} \int_{B_r(y)} |f(x) - s| \mathrm{d}\lambda(x) \\
&+ \lim_{r \to 0+} \frac{1}{\lambda(B_r(y))} \int_{B_r(y)} |s - f(y)| \mathrm{d}\lambda(x) \\
= &|f(y) - s| + |s - f(y)| < 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

由此得到所要证的结论.

习题39.4 *设$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个递增的左连续函数. 直接(即不用定理38.4)证明Lebesgue-Stieltjes测度μ_f 是一个正则Borel测度.*

解 设(a, b)为一个开区间, 则存在一个闭区间序列$\{[a_n, b_n]\}$ 满足$[a_n, b_n] \uparrow (a, b)$. 于是$\mu_f([a_n, b_n]) \uparrow \mu_f((a, b))$. 由于$\mathbb{R}$ 的每个开子集可以写成至多可列个两两不相交的开区间的并集, 则有

$$\mu_f(O) = \sup\{\mu_f(K) : K \subseteq O \text{且} K \text{为紧集}\}$$

对所有开集O成立.

现设$[a, b)$ 是一个有限区间. 则对f 的每个连续点$c < a$, 我们有$[a, b) \subseteq (c, b)$且$\mu_f((c, b)) - \mu_f([a, b)) = f(a) - f(c)$, 又由f 的左连续性, 我们看到$\mu_f([a, b)) = \inf\{\mu_f((c, b)) : c < a\}$. 进一步, 考虑$\sigma$ 集$A, \mu_f(A) < \infty$. 选取一个两两不交的序列$\{[a_n, b_n)\}$ 使得$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b_n)$. 给定$\varepsilon > 0$, 对每个$n$ 选取实数$c_n < a_n$ 使得$\mu_f((c_n, b_n) \backslash [a_n, b_n)) < \varepsilon / 2^n$, 再令集合$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_n, b_n)$. 显然, V 是一个开集, $A \subseteq V$, 并且

$$\begin{aligned}
\mu_f(V) - \mu_f(A) = &\mu_f(V \backslash A) \leqslant \mu_f \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [(c_n, b_n) \backslash [a_n, b_n)] \right) \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f \Big((c_n, b_n) \backslash [a_n, b_n) \Big) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

于是, $\mu_f(A) = \inf\{\mu_f(V) : A \subseteq V$ 且V为开集$\}$.

现应用习题15.2就可以完成证明. (对于正则Borel测度的一般结果, 另参见习题38.14.)

习题39.5(Fubini) 设$\{f_n\}$ 是定义在$[a,b]$ 上的增函数序列, 使得$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ 在$\mathbb{R}$ 中对每个$x \in [a,b]$ 收敛. 则证明f 几乎处处可微并且$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 对几乎所有的x 成立.

解 将每个f_n 替换成$f_n - f_n(a)$, 我们可以假设$f_n \geqslant 0$ 对每个n 成立. 令$s_n = f_1 + \cdots + f_n$, 则每个s_n 是递增的且$s_n(x) \uparrow f(x)$ 对每个x 成立. 显然, f 也是一个增函数. 则由定理39.9, f 和所有f_n 都几乎处处可微. 由于$f_{n+1} = s_{n+1} - s_n$ 是一个增函数, 我们看到$s_{n+1}'(x) \geqslant s_n'(x)$ 必定对几乎所有的x 成立. 同样由于$f(x) - s_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} s_i(x)$ 是一个增函数, 则$f'(x) \geqslant s_n'(x)$ 对几乎所有的x 成立. 于是,

$$\lim_{n\to\infty} s_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

对几乎所有的x 存在.

现对每个n 令

$$t_n(x) = f(x) - s_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x) \geqslant 0.$$

显然, 每个t_n 是一个增函数. 选取$\{s_n\}$ 的子序列$\{s_{k_n}\}$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_{k_n}(x) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} [f(b) - s_{k_n}(b)] < \infty.$$

同样的推理运用于$\{t_{k_n}\}$ 而不是$\{s_n\}$ 表明

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_{k_n}'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [f'(x) - s_{k_n}'(x)]$$

对几乎所有的x 收敛. 特别地, $s_{k_n}'(x) \to f'(x)$ 对几乎所有的x 成立, 因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f'(x)$$

对几乎所有的x 成立.

习题39.6 假设$\{f_n\}$ 是$[a,b]$ 上的一个增函数序列, f 是$[a,b]$ 上的一个增函数使得$\mu_{f_n} \uparrow \mu_f$. 证明$f'(x) = \lim f_n'(x)$ 对几乎所有的x 成立.

解 我们将提供这个问题的一个解, 基于下述微分算子D的一般连续性: 若$\{\mu_n\}$ 是$\mathbb{R}^k$ 中的一个Borel测度序列且$\mu_n \uparrow \mu$ 对某个Borel测度μ 成立, 则$\mathrm{D}\mu_n \uparrow \mathrm{D}\mu$ 也几乎处处成立.

若此性质成立, 则应用定理39.8, 我们看到

$$f_n'(x) = \mathrm{D}\mu_{f_n}(x) \uparrow \mathrm{D}\mu_f(x) = f'(x)$$

必定对几乎所有的x 成立.

为了证明连续性, 首先注意到若两个Borel测度μ 和ν 满足$\mu \leqslant \nu$, 则$\mathrm{D}\mu \leqslant \mathrm{D}\nu$ 几乎处处成立. 事实上, 由定理39.6得μ 和ν 都几乎处处可微. 若$x \in \mathbb{R}^k$ 是一个使得$\mathrm{D}\mu(x)$ 和$\mathrm{D}\nu(x)$ 存在的点, 且$B_n = B(x, 1/n)$, 则

$$\mathrm{D}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(B_n)}{\lambda(B_n)} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\nu(B_n)}{\lambda(B_n)} = \mathrm{D}\nu(x).$$

现设$\mu_n \uparrow \mu$, 限制于开球$\{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| < n\}$ 上, 不失一般性我们可以假设所有测度都是有限的.

由Lebesgue分解定理37.7, 我们可以将μ_n 写成$\mu_n = \nu_n + \omega_n$, 其中$\nu_n \ll \lambda, \omega_n \perp \lambda$. 则由定理37.7的证明知$\mu_n \wedge m\lambda \uparrow_m \nu_n$. 显然, 这蕴含着对每个$n$, $\nu_n \leqslant \nu_{n+1}$. 再由习题9.1的公式(c), 我们得到对每个m ,

$$\mu_n - \mu_n \wedge m\lambda = 0 \vee (\mu_n - m\lambda) \leqslant 0 \vee (\mu_{n+1} - m\lambda) = \mu_{n+1} - \mu_{n+1} \wedge m\lambda.$$

令$m \to \infty$, 我们进一步得到对每个n ,

$$\omega_n = \mu_n - \nu_n \leqslant \mu_{n+1} - \nu_{n+1} = \omega_{n+1}$$

设$\nu_n \uparrow \nu, \omega_n \uparrow \omega$. 由于$\mu_n = \nu_n + \omega_n \uparrow \mu$, 则有$\mu = \nu + \omega$. 且易知关系式$\nu_n \ll \lambda$ 对每个n 成立蕴含着$\nu \ll \lambda$, 又由于对每个$n, \omega_n \perp \lambda = 0$, 则由引理37.6得$\omega \perp \lambda = 0$. 亦即$\nu \ll \lambda$和$\omega \perp \lambda$ 同时成立, 所以$\mu = \nu + \omega$ 是μ 关于λ 的Lebesgue分解.

再由习题39.1(或者重复定理39.6的证明过程), 我们看到$\mathrm{D}\mu_n(x) = \mathrm{D}\nu_n(x)$和$\mathrm{D}\mu(x) = \mathrm{D}\nu(x)$ 对几乎所有的x 同时成立. 对每个n 令$\mathrm{D}\mu_n = \mathrm{d}\mu_n/\mathrm{d}\lambda = f_n$, 考虑到$\mu_n(\mathbb{R}^k) = \int f_n \mathrm{d}\lambda \leqslant \mu(\mathbb{R}^k) < \infty$, Levi定理22.8表明存在$f \in L_1(\mathbb{R}^k)$ 满足$f_n \uparrow f$. 现注意到对每个Borel集E , $\nu_n(E) = \int_E f_n \mathrm{d}\lambda$ 蕴含着$\nu(E) = \int_E f \mathrm{d}\lambda$. 这意味着$f = \mathrm{D}\nu$ a.e., 所以

$$\mathrm{D}\mu_n(x) = \mathrm{D}\nu_n(x) = f_n(x) \uparrow f(x) = \mathrm{D}\nu(x) = \mathrm{D}\mu(x)$$

对几乎所有的x 成立, 即得所证.

习题39.7 这个习题揭示了区间$[a, b]$ 上有界变差函数的一些基本性质.

(a) 若f 在每个点可微且$|f'(x)| \leqslant M < \infty$ 对所有$x \in [a, b]$ 成立, 则证明f 是绝对连续的(因而是有界变差的);

(b) 证明函数$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, 定义为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 若x = 0, \\ x^2 \cos(\dfrac{1}{x^2}), & 若0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

在每个点x可微, 但不是有界变差的(因而f 连续但不绝对连续).

(c) 若f 是一个有界变差函数且$|f(x)| \geqslant M > 0$ 对每个$x \in [a, b]$ 成立, 则证明$g(x) = 1/f(x)$ 是一个有界变差函数.

(d) 若函数$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 满足Lipschitz条件(即, 若存在实数M使得$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$ 对所有的$x, y \in [a, b]$ 成立), 则证明f 是绝对连续的.

解 (a) 若$(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)$ 是$[a,b]$ 的两两不交的开子区间, 则由中值定理我们有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|\leqslant M\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i).$$

易知上式意味着f是一个绝对连续函数.

(b) 仅f 在零点的可微性需要证明. 由不等式

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\left|x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right|\leqslant x$$

对$0<x\leqslant 1$ 成立推出$f'(0)=0$. 现若

$$P_n=\left\{0,\sqrt{\frac{2}{2n\pi}},\sqrt{\frac{2}{(2n-1)\pi}},\cdots,\sqrt{\frac{2}{3\pi}},\sqrt{\frac{2}{2\pi}},\mathbf{1}\right\},$$

则简单计算表明f 关于划分P_n 的变差为

$$\cos\mathbf{1}+\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant V_f.$$

这意味着$V_f=\infty$.

(c) 注意到对每个$a\leqslant x<y\leqslant b$, 我们有

$$|g(x)-g(y)|=\frac{|f(x)-f(y)|}{|f(x)f(y)|}\leqslant\frac{1}{M^2}|f(x)-f(y)|.$$

因此, $V_g\leqslant\frac{1}{M^2}V_f<\infty$ 成立.

(d) 设函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 满足习题中所述的Lipschitz条件, 令$\varepsilon>0$. 记$\delta=\varepsilon/M>0$, 则若$(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)$ 是$[a,b]$ 的两两不交的开子区间, 满足$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$, 我们有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}M(b_i-a_i)=M\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<M\delta=\varepsilon.$$

习题39.8　本题给出了一个连续增函数(因而是有界变差的)不是绝对连续的例子.

考虑Cantor集C , 如同课本中例6.15构造的那样. 回忆C 是从[0, 1]中一步一步除去某些开区间得到的. 第一步我们除去中间的三分之一开区间. 在第n 步有2^{n-1} 个闭区间, 都有相同的长度, 我们从它们每个中除去中间的三分之一开区间. 我们用$I_1^n,\cdots,I_{2^{n-1}}^n$ (从左到右计数)表示在第n 步除去的开区间. 现定义函数$f:[0,1]\to[0,1]$ 如下:

i. $f(0)=0$;

ii. 对某个$1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}$, 若$x\in I_i^n$, 则$f(x)=(2i-1)/2^n$;

iii. 若$x\in C,x\neq 0$, 则$f(x)=\sup\{f(t):t<x$且$t\in[0,1]\backslash C\}$.

图7.1给出了f 的部分图表.

(a) 证明f 为从[0, 1]到[0, 1]的连续增函数;

(b) 证明对几乎所有的x, $f'(x)=0$;

(c) 证明f 不是绝对连续的;

(d) 证明$\mu_f \perp \lambda$ 成立.

解 再次注意到部分函数f 的图表显示在图7.1中.

(a) 直接可以得到.

(b) 注意到f 在每个I_i^n 上为常数, 这意味着$f'(x) = 0$ 对所有的$x \in [0,1]\setminus C$ 成立. 由于$\lambda(C) = 0$, 则有$f'(x) = 0$ 对几乎所有的x 成立.

(c) 若f 是绝对连续的, 则由定理39.15我们应该有

$$\mathbf{1} = f(\mathbf{1}) - f(0) = \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}\lambda(x) = 0,$$

这是不可能的.

(d) 注意到若$B = [0,1]\setminus C$, 则$B \cup C = [0,1]$且$\mu_f(B) = \lambda(C) = 0$. 因此, $\mu_f \perp \lambda$ 成立.

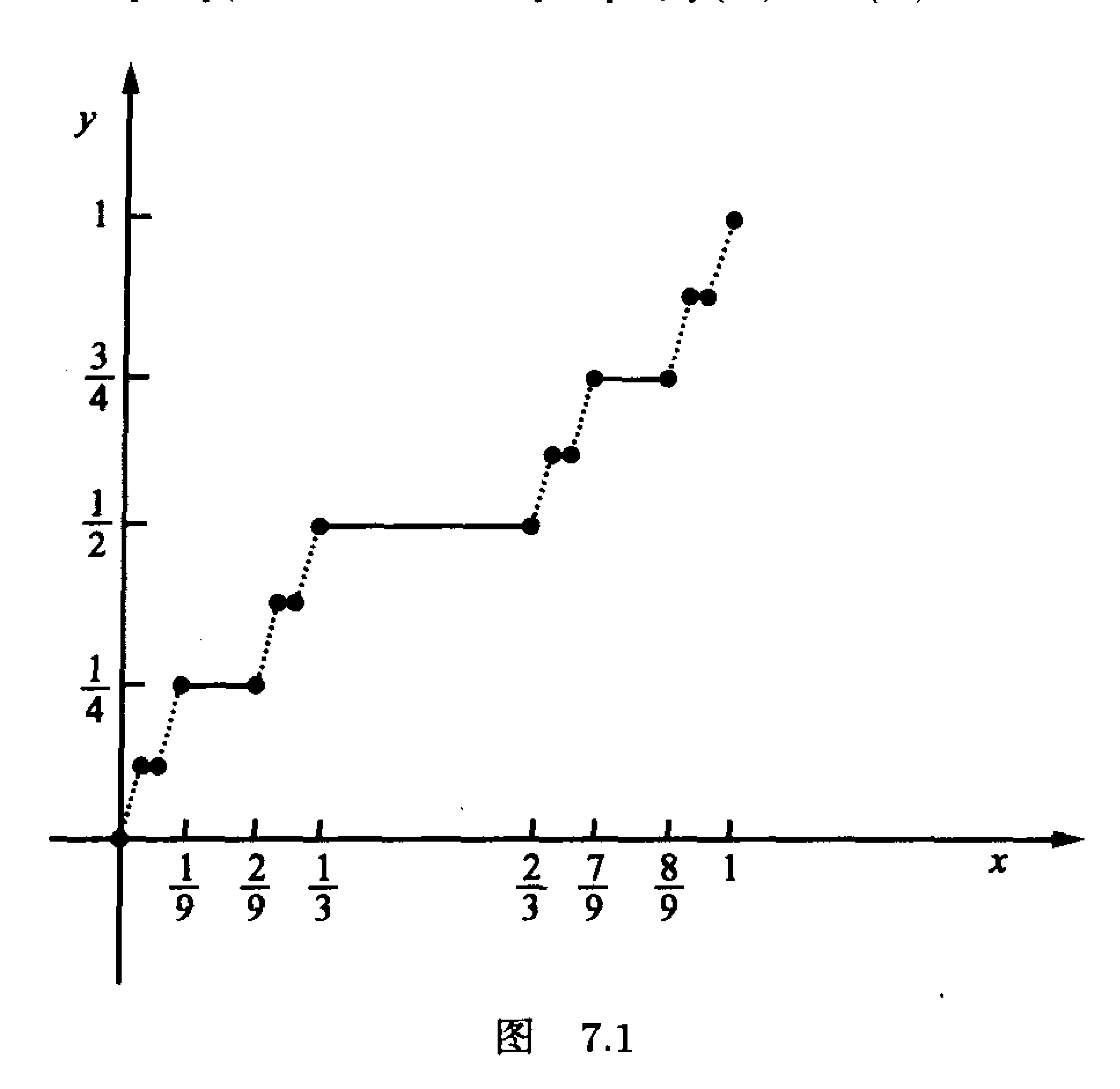


图 7.1

习题39.9 设$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 为绝对连续函数. 证明f 为常值函数当且仅当$f'(x) = 0$ 对几乎所有的x 成立.

解 假设$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 为一绝对连续函数且使得$f'(x) = 0$ 对几乎所有的x 成立. 则由定理39.15, 我们有

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}\lambda(t) = 0$$

对每个$x \in [a,b]$ 成立. 因此, $f(x) = f(a)$ 对每个$x \in [a,b]$ 成立, 所以f 是一个常值函数.

习题39.10 设f 和g 是($\mathbb{R}$ 上的)两个左连续函数. 证明$\mu_f = \mu_g$ 成立当且仅当$f - g$ 是一个常值函数.

解 若$f-g$是一个常数, 则容易看出$\mu_f=\mu_g$成立. 反过来, 假设$\mu_f=\mu_g$. 若$x>0$, 则

$$f(x)-f(0)=\mu_f([0,x))=\mu_g([0,x))=g(x)-g(0)$$

蕴含着$f(x)-g(x)=f(0)-g(0)$. 同样, 若$x<0$, 则

$$f(0)-f(x)=\mu_f([x,0))=\mu_g([x,0))=g(0)-g(x),$$

所以$f(x)-g(x)=f(0)-g(0)$在这种情况中也成立.

习题39.11 本题给出了$C[a,b]$的范数对偶的另一个描述. 首先设L表示$[a,b]$上所有左连续且在a为零的有界变差函数构成的集合.

(a) 证明L在通常的代数运算下是一个向量空间, 并且从L到$M_b([a,b])$的映射$f\mapsto\mu_f$是线性的、一一的和映上的;

(b) 定义$f\succeq g$表示$f-g$是一个增函数(注意$f\geqslant g$不蕴含着$f\succeq g$). 证明L在$\succeq$下是一个半序向量空间, 使得$f\succeq g$在L中成立当且仅当$\mu_f\geqslant\mu_g$在$M_b([a,b])$中成立.

(c) 证明赋予范数$||f||=V_{|f|}$的L是一个Banach格;

(d) 证明在适当的诠释下, $C^*[a,b]=L$.

解 (a) 显然, L在通常的代数运算下是一个向量空间. 同样, 易知从L到$M_b([a,b])$的映射$f\mapsto\mu_f$是一个线性映射.

为了看出$f\mapsto\mu_f$是一一的, 假设$\mu_f=0$. 则

$$f(x)=f(x)-f(a)=\mu_f([a,x))=0$$

对所有的$a<x\leqslant b$成立, 故$f=0$

其次我们证明$f\mapsto\mu_f$是映上的. 首先假设$0\leqslant\mu\in M_b([a,b])$. 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & 若x\leqslant a,\\ \mu([a,x)), & 若a<x<b,\\ \mu([a,b]), & 若x\geqslant b,\end{cases}$$

注意到f是递增的、左连续的, 且满足$f(a)=0$, 则有$f\in L$. 现简单推导表明$\mu=\mu_f$. 最后, 若$\mu\in M_b([a,b])$, 则选取两个增函数$f,g\in L$满足$\mu^+=\mu_f$和$\mu^-=\mu_g$. 于是函数$h=f-g$满足$\mu=\mu^+-\mu^-=\mu_f-\mu_g=\mu_{f-g}=\mu_h$.

(b) 直接推导可以得到.

(c) 由于$f\succeq g$在L中成立当且仅当$\mu_f\geqslant\mu_g$在$M_b([a,b])$中成立, 又$M_b([a,b])$是一个向量格, 则容易看出L必定同样是一个向量格. 而且由引理38.6得映射$f\mapsto\mu_f$是一个从L到$M_b([a,b])$上的格同构.

现注意到若$f\geqslant 0$在L中成立(即, 若f是一个增函数), 则

$$V_f=f(b)-f(a)=\mu_f([a,b])=||\mu_f||$$

成立. 于是, 对每个$f \in L$ 我们有

$$\|\mu_f\| = \big\||\mu_f|\big\| = \|\mu_{|f|}\| = V_{|f|}.$$

这意味着$\|f\| = V_{|f|}$ 定义了一个L 上的格范数, 且从L 到$M_b([a,b])$ 上的映射$f \mapsto \mu_f$ 是一个格等距. 特别地, 赋予范数$\|f\| = V_{|f|}$ 的L 是一个Banach格.

(d) 应用定理38.7的记号, 我们看到两个算子的复合

$$f \mapsto \mu_f \mapsto F\mu_f$$

是从L 到$C^*[a,b]$ 上的一个格等距.

习题39.12 若$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是一个增函数, 则证明f' 是Lebesgue可积的, 且$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x \leqslant f(b) - f(a)$ 成立. 举一个增函数f 的例子, 使得$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x < f(b) - f(a)$ 成立.

解 设对每个$x \in [a,b], g_n(x) = n[f(x+1/n) - f(x)]$ (当然对$x > b$ 有$f(x) = f(b)$). 显然, $g_n(x) \to f'(x)$ 对几乎所有的x 成立, 参见定理39.9. 另一方面, 关系式$g_n(x) \geqslant 0$ 对每个x 成立, 以及

$$\begin{aligned}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x &= n\left[\int_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]\\ &= n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]\\ &= n\left[\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x\right]\\ &= n\left[\frac{1}{n}f(b) - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x\right]\\ &\leqslant n\left[\frac{1}{n}f(b) - \frac{1}{n}f(a)\right] = f(b) - f(a),\end{aligned}$$

再加上Fatou引理表明$f' \in L_1([a,b])$ 且

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x \leqslant f(b) - f(a).$$

最后, 产生严格不等式函数的例子由习题39.8中所描述的函数给出.

习题39.13 若$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是一个绝对连续函数, 则证明

$$V_f = \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x$$

成立.

解 由定理39.15我们有$f' \in L_1([a,b])$ 且

$$\mu_f(E) = \int_E f'(x)\mathrm{d}x$$

对$[a,b]$ 的每个Borel子集E 成立.

首先观察到若$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 是$[a,b]$ 的一个划分, 则

$$\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i}f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}|f'(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

因此, $V_f\leqslant\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x$ 成立. 现在由于连续函数在$L_1([a,b])$ 中稠密(L_1 范数下)(定理25.3), 且具有形式

$$\phi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{(t_{i-1},t_i)}$$

的函数在$C[a,b]$ 中稠密(L_1 范数下), 其中$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 是$[a,b]$ 的一个划分,则这些函数都在$L_1([a,b])$ 中稠密. 于是给定$\varepsilon>0$,存在一个划分$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 和实数$a_1,\cdots,a_n$ 使得$\phi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{(t_{i-1},t_i)}$ 满足$\|\phi-\mathrm{Sgn}f'\|_1<\varepsilon$. 考虑到$|(-1\vee\phi)\wedge 1-\mathrm{Sgn}f'|\leqslant|\phi-\mathrm{Sgn}f'|$, 我们可以假设$|\phi(x)|\leqslant 1$ 对所有的$x\in[a,b]$ 成立. 并且我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b\phi(x)f'(x)\mathrm{d}x&=\sum_{i=1}^{n}a_i\int_{t_{i-1}}^{t_i}f'(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}a_i[f(t_i)-f(t_{i-1})]\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|\leqslant V_f.\end{aligned}$$

其次, 选取上面类型的阶跃函数序列$\{\phi_n\}$ 满足$\phi_n\to\mathrm{sgn}f'$ a.e.(参见引理31.6). 由于$|\phi_nf'|\leqslant|f'|$, 则Lebesgue控制收敛定理蕴含着

$$\begin{aligned}\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x&=\int_a^b f'(x)\cdot\mathrm{Sgn}f'(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\phi_n(x)f'(x)\mathrm{d}x\leqslant V_f.\end{aligned}$$

于是, $V_f=\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x$ 成立.

有趣的是可以观察到$V_f=|\mu_f|([a,b])$ 同样成立. 为了说明这一点, 设$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 是$[a,b]$ 的任一个划分, 则我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|&=\sum_{i=1}^{n}|\mu_f([t_{i-1},t_i))|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\mu_f|([t_{i-1},t_i])=|\mu_f|([a,b]),\end{aligned}$$

故$V_f\leqslant|\mu_f|([a,b])$, 另一方面, 若$E_1,\cdots,E_n$ 是$[a,b]$ 的两两不交的Borel子集, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|\mu_f(E_i)|&=\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{E_i}f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{E_i}|f'(x)|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x=V_f\end{aligned}$$

成立, 这(由定理36.9)蕴含着$|\mu_f|([a,b])\leqslant V_f$. 因此, $|\mu_f|([a,b])=V_f$ 成立.

习题39.14 对一个连续可微函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 证明下列性质:

(a) 符号测度μ_f 关于Lebesgue测度绝对连续且$\mathrm{d}\mu_f/\mathrm{d}\lambda=f'$ a.e.;

(b) 若$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是Riemann可积的, 则gf' 也是Riemann可积的, 并且

$$\int g\mathrm{d}\mu_f=\int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

解 (a) 由习题39.7, 我们知道f 是绝对连续的, 故(由定理39.12)μ_f 关于Lebesgue测度绝对连续. 现在, 结合定理39.14(2)、定理39.8和定理39.4, 我们看到

$$\frac{\mathrm{d}\mu_f}{\mathrm{d}\lambda}=\mathrm{D}\mu_f=f'\text{a.e.}.$$

(b) 由于f' 为连续函数且g 是Riemann 可积的, 则gf' 也是在$[a,b]$ 上Riemann (因此Lebesgue) 可积的. 由$\mu_f(A)=\int_A f'\mathrm{d}\lambda$ 对$[a,b]$ 的每个Borel子集A 成立, 以及习题22.15. 我们看到

$$\int_{[a,b]}g\mathrm{d}\mu_f=\int_{[a,b]}gf'\mathrm{d}\lambda=\int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

习题39.15 对每个n, 考虑连续增函数$f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 定义为

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & 若x>0,\\ n(x-1)+1 & 若1-1/n<x<1,\\ 0 & 若x\leqslant 1-1/n.\end{cases}$$

若$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一连续函数, 则证明

(a) f 对每个n 是μ_{f_n} 可积的;

(b) $\lim\int f\mathrm{d}\mu_{f_n}=f(1)$.

解 注意到$\mathrm{Supp}\mu_{f_n}=[1-1/n,1]$, 由此容易推出对每个n, f是μ_{f_n}可积的. 此外, 注意到$f_n'(x)=n$ 对每个$1/1/n\leqslant x\leqslant 1$ 成立, 则由习题39.15, 我们看到

$$\int f\mathrm{d}\mu_{f_n}=\int_{1-\frac{1}{n}}^1 f(x)f_n'(x)\mathrm{d}x=\int_{1-\frac{1}{n}}^1 nf(x)\mathrm{d}x=\frac{\int_{1-\frac{1}{n}}^1 f(x)\mathrm{d}x}{\frac{1}{n}}.$$

因此, 由微积分基本定理我们推出$\lim\int f\mathrm{d}\mu_{f_n}=f(1)$.

习题39.16 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个(一致)有界函数,

$$E=\{x\in\mathbb{R}:f'(x)在\mathbb{R}上存在\}.$$

若$\lambda(E)=0$, 则证明$\lambda(f(E))=0$.

解 对每个自然数n , 设

$$E_n=\{a\in E:|f(x)-f(a)|\leqslant n|x-a|对所有x\in\mathbb{R}成立\}.$$

由于f 有界, 则容易看出$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 故$f(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(E_n)$ (参见习题1.1(6)). 于是, 为了证明$\lambda(f(E)) = 0$, 只需证明$\lambda(f(E_n)) = 0$ 对每个n 成立. 为此, 固定n 和$\varepsilon > 0$.

由$\lambda(E) = 0$, 我们得到$\lambda(E_n) = 0$, 故存在开区间序列$\{(b_k - r_k, b_k + r_k)\}$ 满足

$$E_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}(b_k - r_k, b_k + r_k)\text{以及}2\sum_{k=1}^{\infty} r_k < \varepsilon.$$

现注意到若$a \in E_n$, 则存在m 满足$|b_m - a| < r_m$, 因此$|f(b_m) - f(a)| \leqslant n|b_m - a| < nr_m$ 成立. 则有$f(E_n) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}(f(b_k) - nr_k, f(b_k) + nr_k)$. 因而

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda((f(b_k) - nr_k, f(b_k) + nr_k)) = 2n\sum_{k=1}^{\infty} r_k < 2n\varepsilon.$$

由于$\varepsilon > 0$ 是任意的, 我们推出$\lambda(f(E_n)) = 0$, 正如所证. (比较这个习题与习题18.9.)

习题39.17 本题给出一个连续函数$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 处处不可微的例子; 此例可与习题9.28作比较. 考虑函数$\phi : [0,2] \to \mathbb{R}$, 定义为若$0 \leqslant x \leqslant 1, \phi(x) = x$; 若$1 < x \leqslant 2, \phi(x) = 2 - x$. 将ϕ (周期地)开拓到$\mathbb{R}$ 上, 使得$\phi(x) = \phi(x+2)$ 对所有的$x \in \mathbb{R}$ 成立. 现定义函数$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n \phi(4^n x).$$

证明f 是连续的处处不可微的函数.

解 由于级数$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n$ 收敛且$0 \leqslant \phi(x) \leqslant 1$ 对所有的x 成立, 容易看出级数$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n \phi(4^n x)$ 的部分和序列在$\mathbb{R}$上一致收敛到f . 故由定理9.2, f 是连续函数.

现固定$x_0 \in \mathbb{R}, f$ 在x_0点不可微性的证明基于可微函数的下述性质.

- 若$h : (a,b) \to \mathbb{R}$ 在某点$x_0 \in (a,b)$ 处可微且$\mu = h'(x_0)$, 则对每个$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$ 使得只要$x, y \in (a,b)$ 满足$x < x_0 < y$ 及$y - x < \delta$, 就有$|\frac{h(y)-h(x)}{y-x} - \mu| < \varepsilon$.

这个结论容易由下述不等式得到:

$$\begin{aligned}\left|\frac{h(y) - h(x)}{y - x} - \mu\right| &= \left|\frac{[h(y) - h(x_0) - \mu(y - x_0)] + [h(x_0) - h(x) - \mu(x_0 - x)]}{y - x}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{h(y) - h(x_0) - \mu(y - x_0)}{y - x_0}\right| \cdot \left|\frac{y - x_0}{y - x}\right| \\ &\quad + \left|\frac{h(x_0) - h(x) - \mu(x_0 - x)}{x_0 - x}\right| \cdot \left|\frac{x_0 - x}{y - x}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{h(y) - h(x_0)}{y - x_0} - \mu\right| + \left|\frac{h(x_0) - h(x)}{x_0 - x} - \mu\right|.\end{aligned}$$

现对每个自然数m , 存在唯一一个整数k_m 使得$k_m \leqslant 4^m x_0 < k_m + 1$. 令

$$s_m = 4^{-m} k_m, t_m = 4^{-m}(k_m + 1),$$

注意到$s_m \leqslant x_0 < t_m$ 对每个m 成立, 则由$t_m - s_m = 4^{-m}$, 我们看到$\lim t_m = \lim s_m = x_0$.

读者应谨记, 若p 和q 是两个整数, 则若$p-q$ 是偶数, $\phi(p)-\phi(q)=0$; 若$p-q$ 是奇数, $|\phi(p)-\phi(q)|=1$, 其次注意到若n 是非负整数, 则$4^n t_m - 4^n s_m = 4^{n-m}$. 故由ϕ 的定义, 我们有

(a) 若$n>m$, 则$\phi(4^n t_m)-\phi(4^n s_m)=0$,

(b) 若$n=m$, 则$\phi(4^n t_m)-\phi(4^n s_m)=1$, 及

(c) 若$0\leqslant n<m$, 则$\phi(4^n t_m)-\phi(4^n s_m)=4^{n-m}$.

因此, 对每个m我们有

$$\begin{aligned}|f(t_m)-f(s_m)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n[\phi(4^n t_m)-\phi(4^n s_m)]\right| \\ &= \left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n[\phi(4^n t_m)-\phi(4^n s_m)]\right| \\ &\geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^m - \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n 4^{n-m} > \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^m .\end{aligned}$$

这蕴含着对每个m , $|\frac{f(t_m)-f(s_m)}{t_m-s_m}|>\frac{3^m}{2}$. 现看一下(•)可知$f$ 不可能在x_0 处可微. 由于x_0 是任意的, 则f 在$\mathbb{R}$ 上处处不可微.

40. 变量替换公式

习题40.1 证明Banach空间中的开球是连通集. 即证明若B 是Banach空间中的一个开球, 使得$B=\mathcal{O}_1\cup\mathcal{O}_2$ 成立, 其中$\mathcal{O}_1$ 和$\mathcal{O}_2$ 都为开集且互不相交, 则或者$\mathcal{O}_1=\varnothing$, 或者$\mathcal{O}_2=\varnothing$.

解 设B 是Banach空间中的一个开球. 用反证法假设存在两个非空开集$\mathcal{O}_1$ 和$\mathcal{O}_2$ 使得$B=\mathcal{O}_1\cup\mathcal{O}_2$ 及$\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2=\varnothing$. 固定两个元素$a\in\mathcal{O}_1$ 及$b\in\mathcal{O}_2$, 定义函数$f:[0,1]\to B$ 为$f(t)=ta+(1-t)b$. 显然,$f(0)=b, f(1)=a$. 此外, 考虑到不等式

$$||f(t)-f(s)||=||(t-s)a+(s-t)b||\leqslant(||a||+||b||)|t-s|,$$

则f 是一个(一致)连续函数.

令$\alpha=\inf\{t\in[0,1]:f(t)\in\mathcal{O}_1\}$. 选取[0, 1]中的序列$\{\alpha_n\}$ 使得$\alpha_n\to\alpha$ 且对每个$n, f(\alpha_n)\in\mathcal{O}_1$, 由$f$ 的连续性我们有$f(\alpha_n)\to f(\alpha)$. 由于$\mathcal{O}_2$ 为开集且与$\mathcal{O}_1$ 不交, 则$f(\alpha)\notin\mathcal{O}_2$. 特别地, $\alpha>0$ 必定成立. 于是存在实数序列$\{\beta_n\}$ 满足对每个n , $0<\beta_n<\alpha$ 且$\beta_n\to\alpha$. 又由α 的定义, 我们看到$f(\beta_n)\in\mathcal{O}_2$ 对每个n 成立, 因此同上面一样, $f(\alpha)\notin\mathcal{O}_1$, 于是我们注意到

$$f(\alpha)\notin\mathcal{O}_1\cup\mathcal{O}_2=B$$

成立, 但这是不可能的.

习题40.2 设$T:V\to\mathbb{R}^k$ 是C^1 可微的, 证明从V 到$L(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k)$ 内的映射$x\mapsto T'(x)$ 是一个连续函数.

解　我们知道

$$T'(x)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial T_1}{\partial x_1}(x)&\cdots&\dfrac{\partial T_1}{\partial x_k}(x)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \dfrac{\partial T_k}{\partial x_1}(x)&\cdots&\dfrac{\partial T_k}{\partial x_k}(x)\end{bmatrix}.$$

所以, 若$\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_k)\in\mathbb{R}^k$ 满足$||a||_2=(\sum_{i=1}^k a_i^2)^{\frac{1}{2}}=1$, 则运用Couchy-Schwarz不等式, 我们有

$$\begin{aligned}||[T'(x)-T'(y)]a||_2&=\left(\sum_{i=1}^k\left[\sum_{j=1}^k\left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(x)-\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(y)\right)a_j\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\left[\sum_{i=1}^k\left(\sum_{j=1}^k\left[\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(x)-\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(y)\right]^2\right)\left(\sum_{j=1}^k a_j^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\&=\left(\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k\left[\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(x)-\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(y)\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

因此, 对每对$x,y\in V$,

$$\begin{aligned}||T'(x)-T'(y)||&=\sup\{||[T'(x)-T'(y)]a||_2:||a||_2=1\}\\&\leqslant\left(\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k\left[\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(x)-\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(y)\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

又$T:V\to\mathbb{R}^k$ 是C^1 可微, 蕴含着从V 到$L(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k)$ 内的映射$x\mapsto T'(x)$ 是一个连续函数.

习题40.3　证明$\mathbb{R}^2$ 上的Lebesgue测度是"旋转"不变的.

解　平面上的"旋转"是一个线性算子$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, 其表示矩阵$\boldsymbol{A}$ 是正交的(即, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$). 任何这样的正交矩阵具有形式

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix},$$

其中θ 表示旋转的角度; 见图7.2.

特别地, 注意到$\det\boldsymbol{A}=1$. 于是由引理40.4, 我们有

$$\lambda(\boldsymbol{A}(E))=|\det\boldsymbol{A}|\lambda(E)=\lambda(E)$$

在$\mathbb{R}^2$ 的每个Lebesgue可测子集E 上成立.

习题40.4(极坐标)　设

$$E=\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2:r\geqslant 0且0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}.$$

变换$T:E\to\mathbb{R}^2$ 定义为$T(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$,或如通常所写的那样:

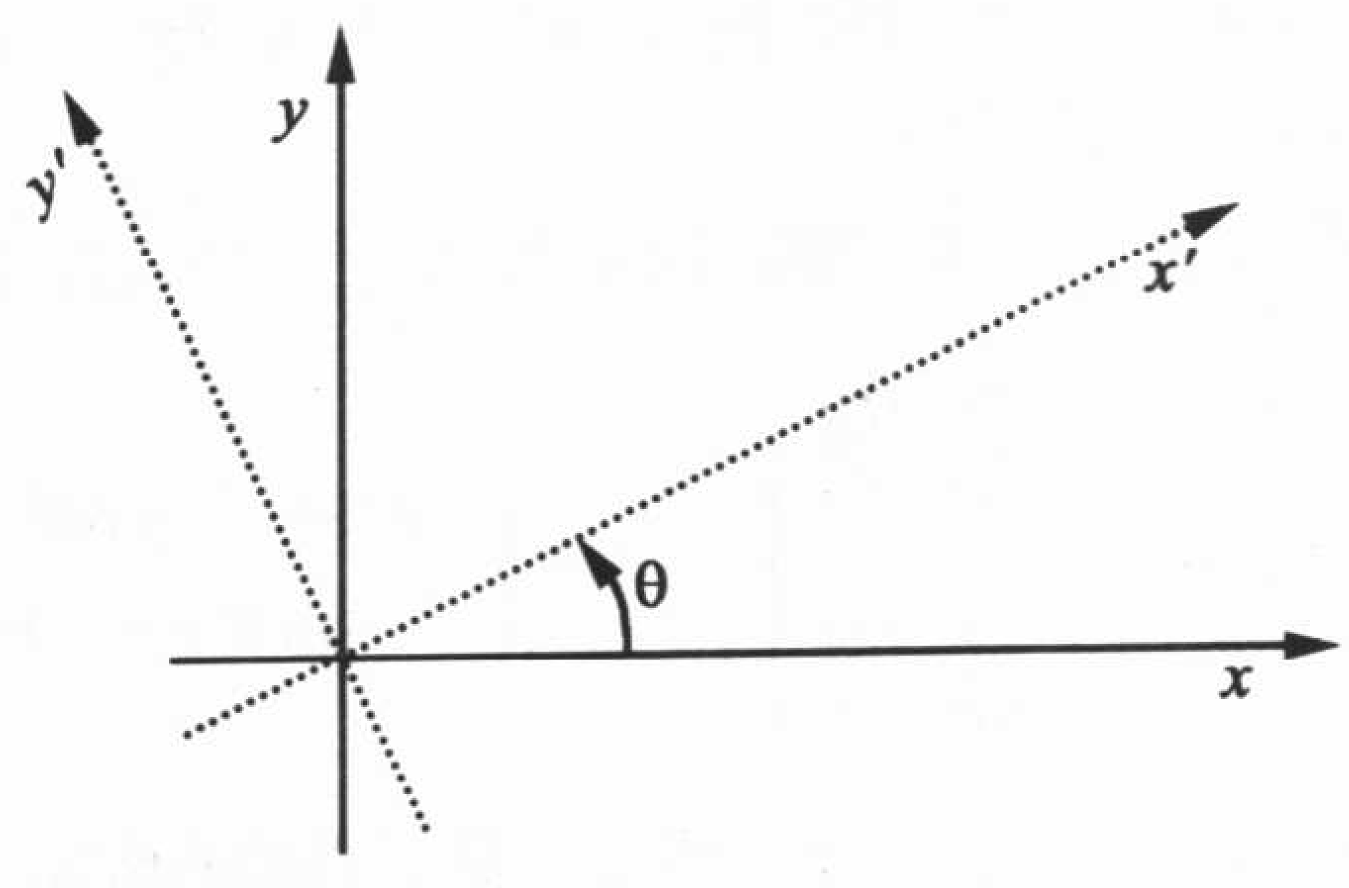


图7.2 旋转角度θ

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$$

称为$\mathbb{R}^2$ 上的极坐标变换, 如图7.3.

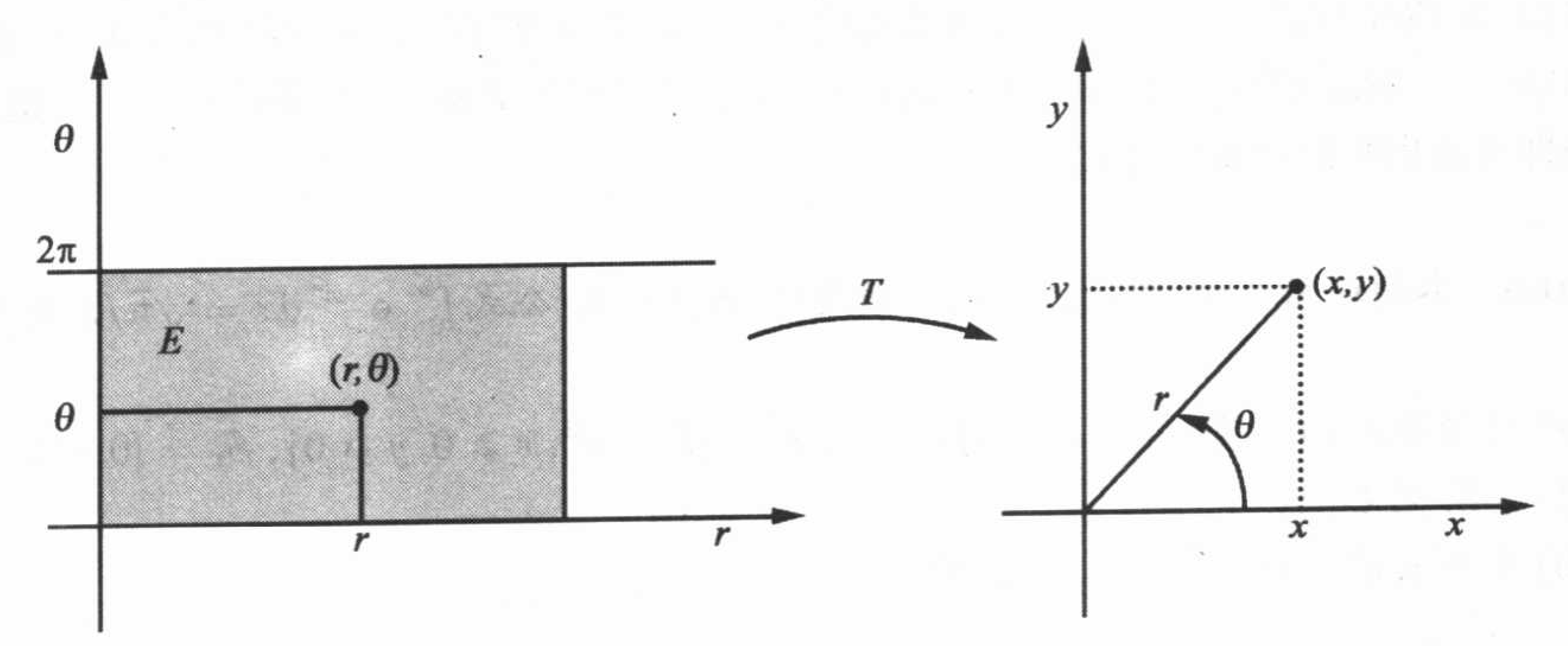


图7.3 极坐标变换

(a) 证明$\lambda(E\backslash E^0) = 0$;

(b) 若$A = \{(x, 0) : x \geqslant 0\}$, 则证明$A$ 是$\mathbb{R}^2$ 的闭子集, 且其(2维)Lebesgue测度为零;

(c) 证明$T : E^0 \to \mathbb{R}^2\backslash A$ 是一个微分同胚, 且其Jacobi行列式满足$J_T(r,\theta) = r$, 对每个$(r,\theta) \in E^0$;

(d) 证明若G 是E 的一个Lebesgue可测子集, 满足$\lambda(G\backslash G^0) = 0$, 则$T(G)$ 是$\mathbb{R}^2$ 的一个Lebesgue可测子集. 并证明若$f \in L_1(T(G))$, 则

$$\int_{T(G)} f\mathrm{d}\lambda = \int\int_G f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

成立.

解 (a) 如果我们考虑集合$X = \{(r, 0) : r \geqslant 0\}, Y = \{(r, 2\pi) : r \geqslant 0\}$ 和$Z = \{(0, \theta) : 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, 则$E\backslash E^0 = X \cup Y \cup Z$. 为证明$\lambda(E\backslash E^0) = 0$, 我们只需证明$\lambda(X) = \lambda(Y) = \lambda(Z) = 0$.

设$X_n = \{(r, 0) : 0 \leqslant r \leqslant n\}, Y_n = \{(r, 2\pi) : 0 \leqslant r \leqslant n\}$. 由于$X_n \subseteq [0, n] \times [-\varepsilon, \varepsilon], Y_n \subseteq [0, n] \times [2\pi - \varepsilon, 2\pi + \varepsilon]$, 我们有$\lambda(X_n) = \lambda(Y_n) = 0$ 对每个n 成立. 又由于$X_n \uparrow X, Y_n \uparrow Y$, 则有$\lambda(X) = \lambda(Y) = 0$.

同样, $Z \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon] \times [0, 2\pi]$ 蕴含着对每个$\varepsilon > 0$, $\lambda(Z) \leqslant 4\pi\varepsilon$, 于是$\lambda(Z) = 0$.

(b) 这在上面(a)部分中已经得到证明.

(c) 显然, $T : E^0 \to \mathbb{R}^2 \backslash A$ 是一一对应的, 映上的和C^1 可微的. 其Jacobi行列式为

$$J_T(r, \theta) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r,$$

这意味着$J_T(r, \theta) = r \neq 0$ 对每个$(r, \theta) \in E^0$ 成立. 从而前面的结论足以保证$T : E^0 \to \mathbb{R}^2 \backslash A$ 是一个微分同胚.

(d) 显然, $G^0 \subseteq E^0$. 则由(c)部分, $T(G^0)$ 是$\mathbb{R}^2 \backslash A$ 的开子集且$T : G^0 \to T(G^0)$ 是一个微分同胚.

由于$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (定义为$T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$) 是一个C^1 微分同胚, 则由引理40.1得 $\lambda(T(G \backslash G^0)) = 0$. 现若考虑集合$A = G, B = T(G), V = G^0$ 以及$W = T(G^0)$, 则$\lambda(A \backslash V) = \lambda(G \backslash G^0) = 0$ 和$\lambda(T(G) \backslash T(G^0)) \leqslant \lambda(T(G \backslash G^0)) = 0$ 同时成立. 于是, 由定理40.8即可给出我们所要的公式.

习题40.5 本题运用极坐标(介绍见前一问题)给出了Euler公式$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2$ 的另一证明.

(a) 对每个$r > 0$, 令$C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant r^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$, $S_r = [0, r] \times [0, r]$. 证明$C_r \subseteq S_r \subseteq C_{r\sqrt{2}}$.

(b) 若$f(x, y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, 则证明

$$\int_{C_r} f\mathrm{d}\lambda \leqslant \int_{S_r} f\mathrm{d}\lambda \leqslant \int_{C_{r\sqrt{2}}} f\mathrm{d}\lambda,$$

其中λ 是二维Lebesgue测度;

(c) 运用极坐标变量替换和Fubini定理证明

$$\int_{C_r} f\mathrm{d}\lambda = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^r \mathrm{e}^{-t^2} t\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}(1 - \mathrm{e}^{-r^2});$$

(d) 运用(b)证明

$$\frac{\pi}{4}(1 - \mathrm{e}^{-r^2}) \leqslant \left(\int_0^r \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{\pi}{4}(1 - \mathrm{e}^{-2r^2}),$$

然后让$r \to \infty$ 就可以得到我们所需要的公式.

解 (a) 3个集合的几何图形表示在图7.4中.

(b) 由于$f(x, y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \geqslant 0$ 对所有的(x, y) 成立, 我们看到

$$f\chi_{C_r} \leqslant f\chi_{S_r} \leqslant f\chi_{C_{r\sqrt{2}}},$$

从而得到我们所需要的不等式.

(c) 考虑前一习题所描述的极坐标变换. 对于集合$G=\{(t,\theta):0\leqslant t\leqslant r$且$0\leqslant\theta\leqslant\pi/2\}$，我们有

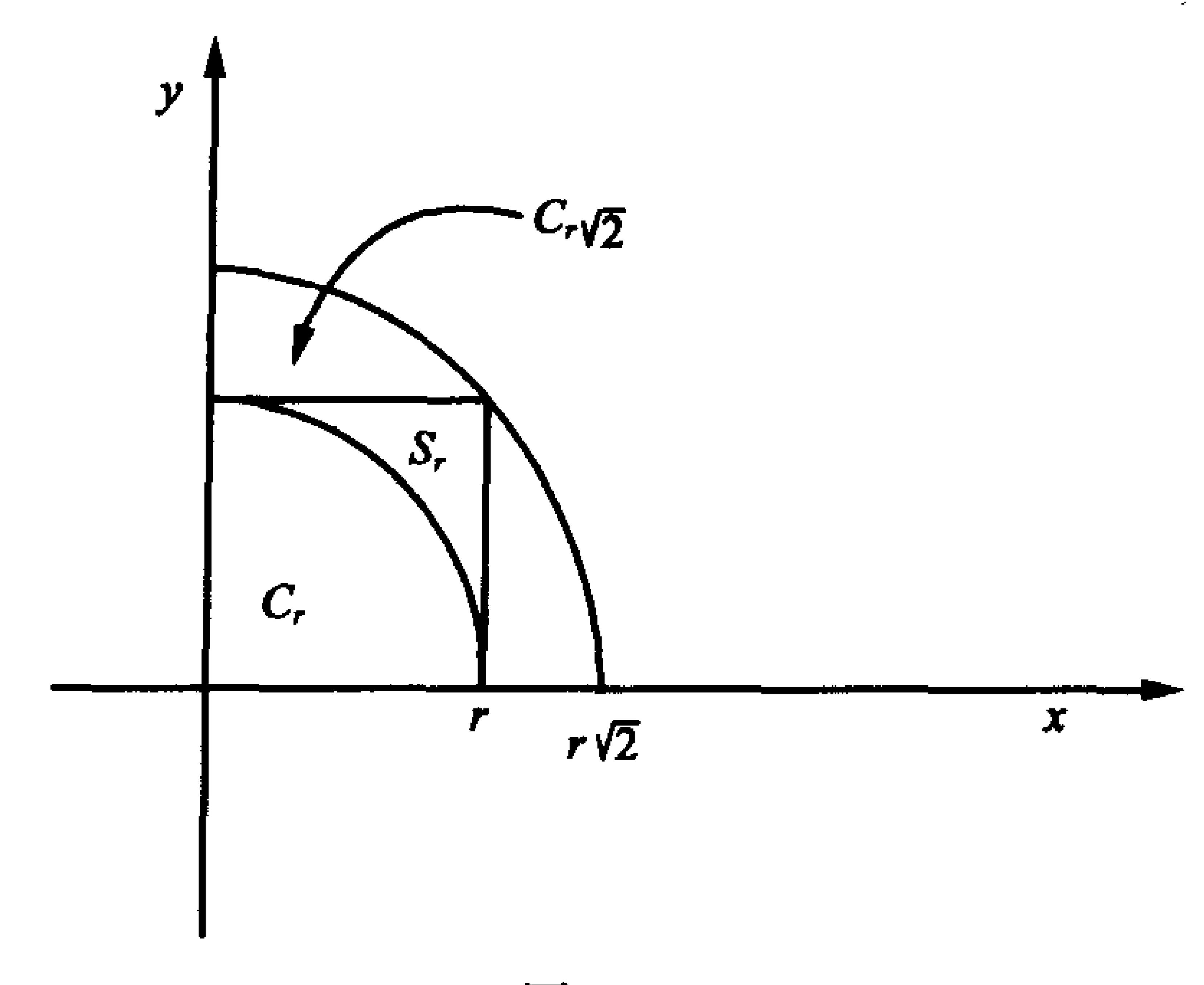


图 7.4

$$\begin{aligned}\int_{C_r} f\mathrm{d}\lambda &= \int_{T(G)} f\mathrm{d}\lambda = \int\int_G f(t\cos\theta, t\sin\theta)t\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^r \mathrm{e}^{-t^2}t\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-r^2}).\end{aligned}$$

(d) 注意到

$$\begin{aligned}\int_{C_r} f\mathrm{d}\lambda &= \int_0^r\int_0^r \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_0^r \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^r \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right) \\ &= \left(\int_0^r \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

则应用(b)和(c), 我们有

$$\frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-r^2}) \leqslant \left(\int_0^r \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-2r^2}).$$

再让$r\to\infty$得到$(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x)^2=\frac{\pi}{4}$.

习题40.6 在$\mathbb{R}^4$中, “双”极坐标定义为

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=\rho\cos\phi, w=\rho\sin\phi.$$

对这个变换叙述变量替换公式, 并应用它证明$\mathbb{R}^4$中, 中心在原点半径为a的开球的“体积”为$\pi^2a^4/2$.

解 变换$T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ 由下式给出:

$$T(r,\rho,\theta,\phi)=(r\cos\theta,r\sin\theta,\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)$$

其中$(r,\rho,\theta,\phi)\in\mathbb{R}^4$. 它的Jacobi行列式为

$$J_T(r,\rho,\theta,\phi)=\det\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\rho\sin\phi & \rho\cos\phi\end{bmatrix}=-r\rho.$$

记$\mathbb{R}^4=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$, 将$\mathbb{R}^4$ 上的Lebesgue测度视为其两个因子空间上对应Lebesgue测度的乘积测度. 固定$a>0$, 并设

$$E=\{(r,\rho):r\geqslant 0,\rho\geqslant 0,\text{且}r^2+\rho^2<a^2\}$$

及

$$F=[0,2\pi]\times[0,2\pi]\subseteq\mathbb{R}^2.$$

令$G=E\times F\subseteq\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2=\mathbb{R}^4$, 则有$T(G)=B$ 是$\mathbb{R}^4$ 中, 中心在原点半径为a 的开球. 现若$C=\{(r,\rho):r\rho=0\}\subseteq\mathbb{R}^2,D=\{(r,\rho,0,0):r\geqslant 0,\rho\geqslant 0\}\subseteq\mathbb{R}^4$, 则这两个集合在它们对应的空间中都是闭的, 且它们对应的Lebesgue测度都为零. 于是, 若

$$V=(E\backslash C)\times[(0,2\pi)\times(0,2\pi)],W=B\backslash D,$$

则V 和W 都是$\mathbb{R}^4$ 的开子集且$T:V\to W$ 是一个(映上的)微分同胚. 由于$\lambda(G\backslash V)=\lambda(B/W)=0$, 合并定理40.8及Fubini定理可得

$$\begin{aligned}B\text{的体积}=\lambda(B)&=\int_B\mathrm{d}\lambda=\int_{T(G)}\mathrm{d}\lambda=\int\int\int\int_G r\rho\mathrm{d}r\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\\&=\int_E\left(\int_F r\rho\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}\lambda=4\pi^2\int_E r\rho\mathrm{d}r\mathrm{d}\rho\\&=4\pi^2\cdot\frac{a^4}{8}=\frac{1}{2}\pi^2a^4.\end{aligned}$$

习题40.7(柱面坐标) 设

$$E=\{(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3:r\geqslant 0,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,z\in\mathbb{R}\}.$$

变换$T:E\to\mathbb{R}^3$ 定义为$T(r,\theta,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,z)$ 或者如通常所写的那样:

$$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z.$$

称为柱面坐标变换, 如图7.5.

(a) 证明$\lambda(E\backslash E^{\circ})=0$;

(b) 若$A = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geqslant 0, z \in \mathbb{R}\}$，则证明$A$ 是$\mathbb{R}^3$ 的一个闭子集且其(三维)Lebesgue测度为零;

(c) 证明$T : E^o \to \mathbb{R}^3 \backslash A$ 是一个微分同胚且其Jacobi行列式满足对每个$(r,\theta,z) \in E^o$, $J_T(r,\theta,z) = r$;

(d) 证明若G 是E 的一个Lebesgue可测子集且$\lambda(G \backslash G^0) = 0$，则$T(G)$ 是$\mathbb{R}^3$ 的一个Lebesgue可测子集. 并证明若$f \in L_1(T(G))$，则

$$\int_{T(G)} f \mathrm{d}\lambda = \iiint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$$

成立.

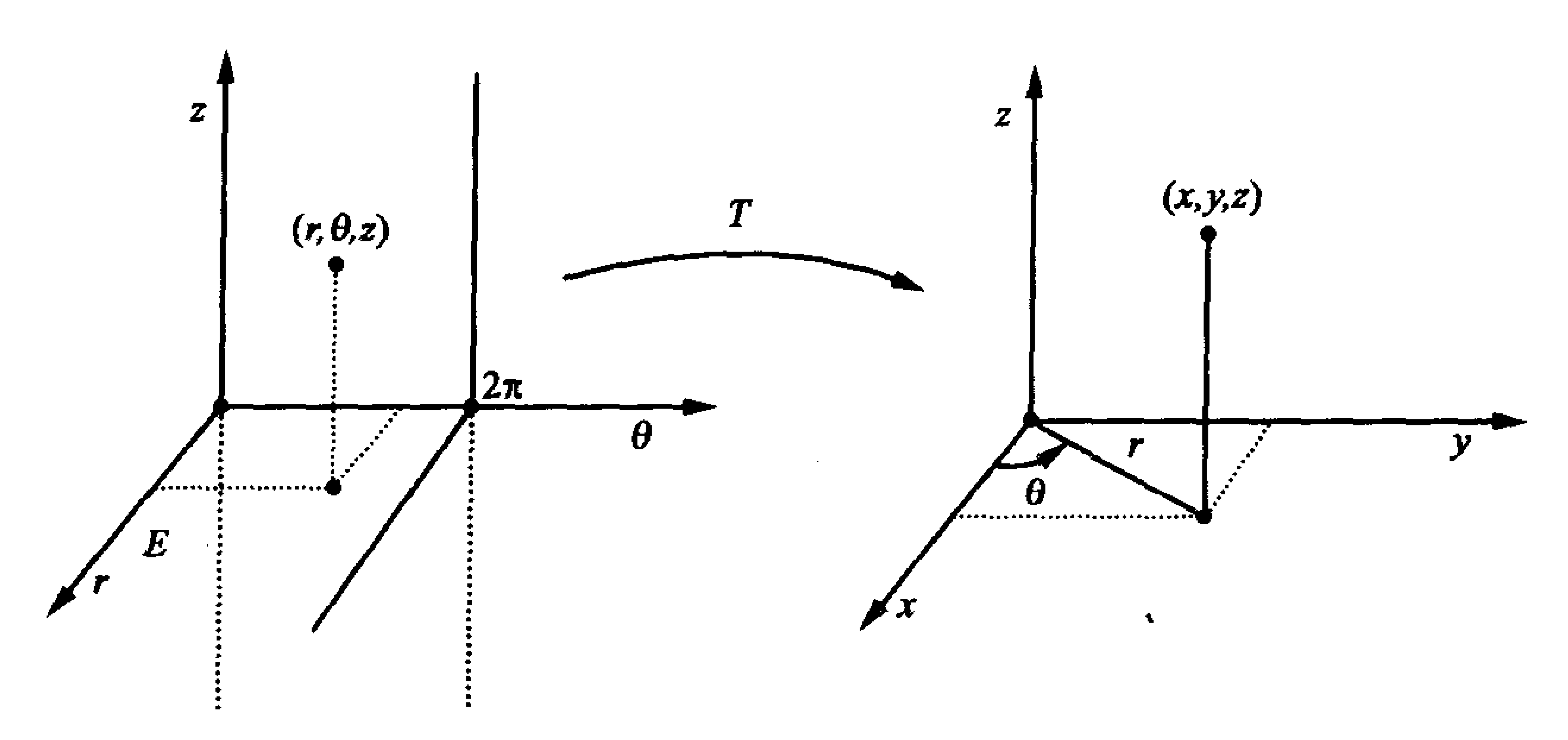


图7.5　柱面坐标变换

解　重复习题40.4的解答过程.

习题40.8(球面坐标)　设

$$E = \{(r,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 : r \geqslant 0, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \phi \leqslant \pi\}.$$

变换$T : E \to \mathbb{R}^3$ 定义为

$$T(r,\theta,\phi) = (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi),$$

或者如通常所写的那样:

$$x = r\cos\theta\sin\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\phi,$$

称为球面坐标变换, 如图7.6.

(a) 证明$\lambda(E \backslash E^o) = 0$;

(b) 若$A = \{(x,o,z) : x \geqslant 0, 且 z \in \mathbb{R}\}$，则证明$A$ 是$\mathbb{R}^3$ 的一个闭子集且其(三维)Lebesgue测度为零;

(c) 证明$T : E^o \to \mathbb{R}^3 \backslash A$ 是一个微分同胚且其Jacobi行列式满足$J_T(r,\theta,\phi) = -r^2\sin\phi$;

(d) 证明若G 是E 的一个Lebesgue可测子集且$\lambda(G\backslash G^{\circ})=0$，则$T(G)$ 是$\mathbb{R}^3$ 的一个可测子集. 并证明若$f\in L_1(T(G))$，则

$$\int_{T(G)} f\mathrm{d}\lambda=\iiint_G f(r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi)r^2\sin\phi\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

成立.

解 重复习题40.4的解答过程.

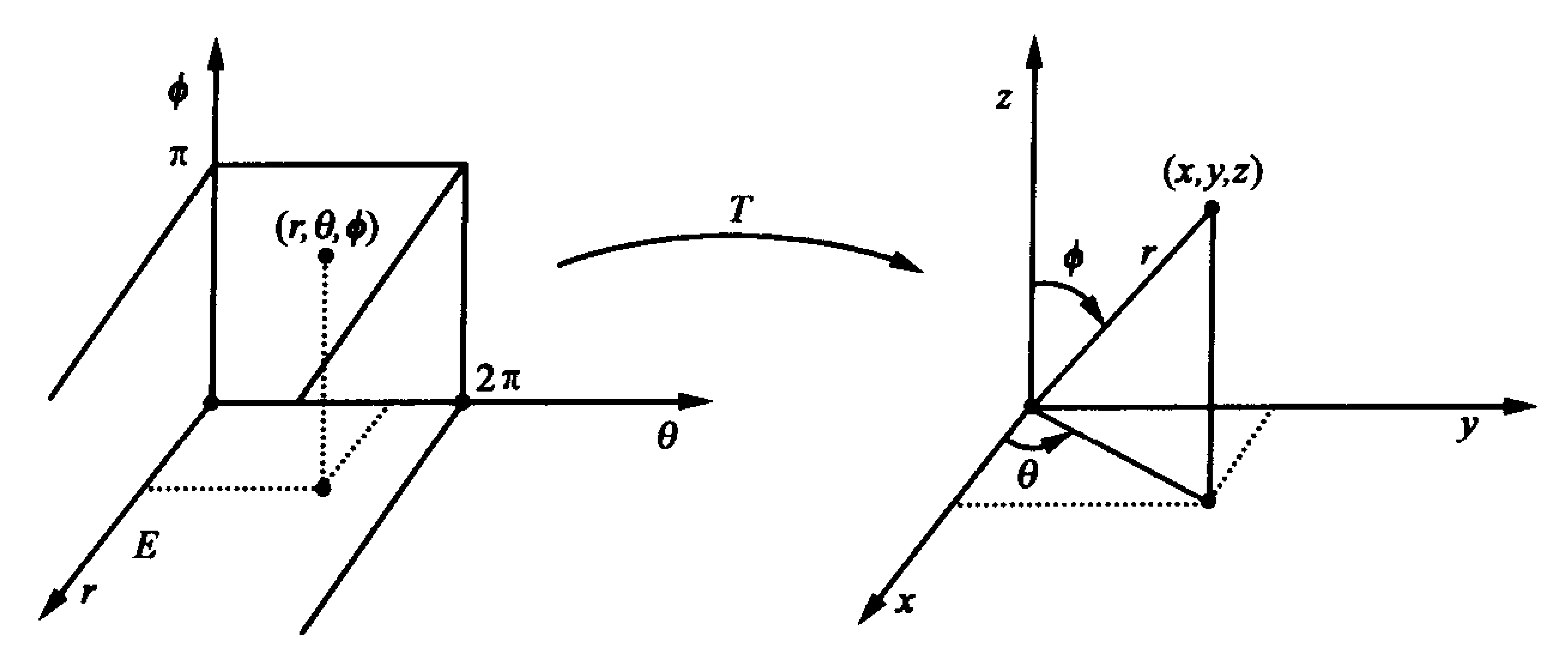


图7.6 球面坐标变换

附　　录

定理2.5　对一个无限集A 下列命题是等价的:

i. A 是可数的.

ii. 存在$\mathbb{N}$ 的一个子集B 和一个到上的函数$f: B \to A$.

iii. 存在一个一一的函数$g: A \to \mathbb{N}$.

定理2.6　设$\{A_1, A_2, \cdots\}$ 是一个可数族, 其中每个A_i 是可数的. 那么$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是一个可数集.

定理2.7　设$\{A_1, A_2, \cdots A_n\}$ 是有限个可数集的族, 那么$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 是可数的.

定理2.8(Cantor)　如果A 是一个集合, 那么$A \preceq \mathcal{P}(A)$ 并且$A \not\approx \mathcal{P}(A)$, 其中$A \preceq \mathcal{P}(A)$ 是指A 与$\mathcal{P}(A)$ 的一个子集对等.

良序原理　$\mathbb{N}$ 的每个非空子集都有一个极小元.

公理5　对一切$x \in \mathbb{R}$, 在$\mathbb{R}$ 内存在一个元素(用$-x$ 表示)使得$x + (-x) = 0$.

公理7　对一切$x \neq 0$, 在$\mathbb{R}$ 内存在一个元素(用x^{-1} 表示)满足$xx^{-1} = 1$.

公理9　如果$x \geqslant y$, 那么对一切$z \in \mathbb{R}$, $x + z \geqslant y + z$ 成立.

公理10　如果$x \geqslant y$ 而且$z \geqslant 0$, 那么$xz \geqslant yz$.

公理11　任何有上界的非空实数集有一个最小的上界.

定理3.3(Archimedes性质)　如果x 和y 是两个正实数, 那么存在某个自然数n 使得$nx > y$.

定理3.4　任何两个不同的实数之间存在一个有理数.

定理3.5　对于实数a 和任意自然数$n \geqslant 2$, 我们有下列结论:

(1) 若$a \geqslant 0$ 并且n 是偶的, 则存在唯一的$b \geqslant 0$ 使得$b^n = a$;

(2) 若$a \in \mathbb{R}$ 并且n 是奇的, 则存在唯一的$b \in \mathbb{R}$ 使得$b^n = a$.

定理4.3　每一个单调有界的实数列都是收敛的.

定理5.4　设对所有的m, n , $0 \leqslant a_{n,m} \leqslant \infty$. 若$\sigma: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 是一一的和到上的, 那么$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}$.

引理6.8　如果A 是度量空间X 的一个子集, 那么$A^{\circ} = \left(\overline{A^c}\right)^c$.

Uryson引理　对于拓扑空间X, 下列结论是等价的:

(1) X是正规空间;

(2) 如果A是X的闭子集并且V和X的开子集, 满足$A \subseteq V$, 那么存在一个开子集W使得$A \subseteq W \subseteq \bar{W} \subseteq V$;

(3) 每一对互不相交的闭子集都能被一个连续函数分离(即, A和B是两个互不相交的闭子集, 则存在一个连续函数$f: X \to [0,1]$ 使得对一切$a \in A, f(a) = 0$, 而且对一切$b \in B, f(b) = 1$);

(4) 如果C是X的一个闭子集并且$f: C \to [0,1]$ 是连续函数, 那么存在一个f到整个X上的连续开拓其值在[0, 1]上.

定理6.14 设(X,d) 是一个完备的度量空间并且$\{A_n\}$ 是X 的一个闭的非空子集序列; 使得对一切n, $A_{n+1} \subseteq A_n$ 而且$\lim d(A_n) = 0$. 那么交集$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 恰好由一个元素构成.

定理6.16 设X 是一个度量空间, 那么下列结论等价:

(1) X 是一个Baire空间;

(2) 开稠密集的可数并也是稠密的;

(3) 如果$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 并且每个F_n 是闭集, 那么开集$\bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n)^{\circ}$ 是稠密的.

定理6.17 每一个完备的度量空间都是一个Baire空间(即, 它的每一个非空开集都不是第一纲集).

定理6.18 若(X,d) 是一个完备的度量空间并且$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 那么存在一个n; 使得$(\overline{A_n})^{\circ} \neq \varnothing$.

定理7.4(Heine-Borel) Euclid空间的一个子集是紧的当且仅当它是闭的而且是有界的.

定理7.5 设$f:(X,d) \to (Y,\rho)$ 是一个连续函数, 并且A 是X 的一个紧子集. 那么$f(A)$ 是Y 的一个紧子集.

定理7.7 设$f:(X,d) \to (Y,\rho)$ 是一个连续函数. 如果(X,d) 是紧的, 那么f 是一致连续的.

定理7.8 一个度量空间是紧的, 当且仅当它是完备的而且是完全有界的(即, 对每个$r > 0$, 存在有限个点$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使得$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$). 因此, 由定理7.8知道, 对每个n 存在X 的一个有限子集F_n 使得$X = \bigcup_{x \in F_n} B(x, 1/n)$.

定理8.9 一个集合是F_σ集当且仅当它的余集是G_δ 集。类似地, 一个集合是G_δ集当且仅当它的余集是F_σ集.

定理8.10 设(X,τ) 是一个拓扑空间, 并且$f: X \to \mathbb{R}$. 那么f 的所有不连续点的集合D 是一个F_σ集. 特别地, f 的连续点的集合是一个G_σ集.

定理8.12 对于Hausdorff拓扑空间(X,τ) 下列结论正确:

(1) X 的每个紧集是闭的;

(2) 如果B 是紧集A 的闭子集, 那么B 是紧的.

定理9.2 设X是拓扑空间, $\{f_n\}$ 是$C(X)$ 中的序列, 如果$\{f_n\}$ 在X上一致收敛于f, 则f是连续函数.

定理9.3 若X 是紧拓扑空间, 则$C(X)$ 是一个完备的度量空间.

定理9.4(Dini定理) 设X是紧拓扑空间. 如果$C(X)$的一个单调序列点态收敛于一个连续函数, 那么它也是一致收敛的.

定理9.5(Weierstrass M判别法) 就是数学分析中的优级数判别法.

定理9.10(Ascoli-Arzelà) 设X是紧拓扑空间, 并且S是$C(X)$的一个子集. 那么下列结论是等价的:

(1) S是度量空间$C(X)$的紧子集.

(2) S是闭的, 有界的而且是等度连续的.

定理10.6(Tietze开拓定理) 设C是正规空间X的一个闭子集, 并且$f: C \to \mathbb{R}$ 是连续函数, 那么f可以连续开拓到整个X上并且取值于$\mathbb{R}$中.

定理10.8(Uryson) 设X是局部紧的Hausdorff空间, A是X的紧子集, 如果V是开集, 且$A \subseteq V$, 则存在连续函数$f: X \to [0,1]$ 使得对所有$x \in A$, 有$f(x) = 1$, 对所有$x \in V^c$, 有$f(x) = 0$.

定理11.3(Stone-Weierstrass定理)　设X是紧拓扑空间，L是分离X中的点并且含有常数函数1的连续函数空间. 那么L在$C(X)$中关于一致度量是稠密的.

推论11.6(Weierstrass)　$\mathbb{R}$的紧子集A上的实值连续函数都是A上多项式序列的一致极限.

引理11.4　存在多项式序列在[0,1]上一致收剑于$\sqrt{x}$.

定理11.5 (Stone-Weierstrass定理)　设X 是紧拓扑空间，A是X 上分离X 中的点并且含有常数函数1的连续实值函数构成的代数. 那么A在$C(X)$ 中关于一致度量是稠密的.

定理12.2 (1)　设$\mathcal{S}$是一个半环，如果$A \in \mathcal{S}$ 并且$A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{S}$ ，那么$A \backslash \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 可以表示成有限个$\mathcal{S}$的互不相交集的并(因此，它是一个σ 集).

(2)　设$\mathcal{S}$是一个半环，$\{A_n\} \subseteq \mathcal{S}$，则$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$是一个$\sigma$集.

(3)　设$\mathcal{S}$是一个半环，则σ集的可数并和有限交都是σ集.

引理14.5　若$E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是互不相交的可测集，则对X的每个子集A有$\mu(\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap E_i)) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A \cap E_i)$.

定理14.10　设$\mathcal{F}$是X 的子集族，$\varnothing \in \mathcal{F}$，$\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ 是集函数满足$\mu(\varnothing) = 0$. Φ 也是X 的一个子集族，满足$\mathcal{F} \subseteq \Phi$ ，并且$\nu : \Phi \to [0, \infty]$ 是μ^* 在Φ 上的限制，那么由ν 生成的外测度ν^*与μ^*相同.

定理15.1　设$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，μ^* 是由μ 生成的外测度，则μ^* 是μ 的一个开拓，即，当$A \in \mathcal{S}$ 时，$\mu^*(A) = \mu(A)$.

定理15.8　设$(X, \mathcal{S}, \mu\ )$是一个有限的测度空间(即，$\mu^*(X) < \infty$)，E 是X的一个子集. 那么E是可测的当且仅当$\mu^*(E) + \mu^*(E^c) = \mu^*(X)$.

定理15.10　设$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是σ 有限的测度空间(即，存在X的子集列$\{X_n\}$ 使得$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ 并且对一切n，$\mu^*(X_n) < \infty$). Σ 是满足$\mathcal{S} \subseteq \Sigma \subseteq \Lambda_\mu$ 的集合半环，ν 是Σ 上的一个测度. 若在$\mathcal{S}$上$\nu = \mu$，那么在Σ 上$\nu = \mu^*$. 这时，μ^* 是μ 到Λ_μ 上的唯一开拓.

定理15.11　设$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间. 如果A是X的一个子集，那么存在一个可测子集E使得$A \subseteq E$ 而且$\mu^*(E) = \mu^*(A)$.

特别地，如果$\mathcal{S}$是一个σ 代数，那么对一切$A \subseteq X$，存在某个$E \in \mathcal{S}$ 使得$A \subseteq E$ 而且$\mu^*(E) = \mu^*(A)$.

定理16.2　设$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，对于函数$f : X \to \mathbb{R}$ ，下列结论等价:

(1) f是可测的;

(2) 对$\mathbb{R}$的一切有界开区间(a, b)，$f^{-1}((a, b))$ 是可测的;

(3) 对$\mathbb{R}$的一切闭子集C，$f^{-1}(C)$ 是可测的;

(4) 对一切$a \in \mathbb{R}$ ，$f^{-1}([a, \infty))$ 是可测的;

(5) 对一切$a \in \mathbb{R}$ ，$f^{-1}((-\infty, a])$ 是可测的;

(6) 对$\mathbb{R}$的一切Borel集B，$f^{-1}(B)$ 是可测的.

定理16.4　如果f和g是可测函数，那么3个集合

(a) $\{x \in X : f(n) > g(n)\}$;

(b) $\{x \in X : f(n) \geqslant g(x)\}$;

(c) $\{x \in X : f(n) = g(x)\}$

都可测.

定理16.5　若f和g是可测函数, 则$f+g, fg, |f|, f^+, f^-, f\vee g$ 和$f\wedge g$ 都是可测函数.

定理16.6　对可测函数列$\{f_n\}$, 下列结论正确:

(1) 如果$f_n\to f$ a.e. , 那么f可测;

(2) 如果对一切$x\in\mathbb{R}$, $\{f_n(x)\}$ 是有界数列, 那么$\limsup f_n$和$\liminf f_n$都是可测函数.

定理16.7(Egorov定理)　设$\{f_n\}$ 是可测函数列且$f_n\to f$ a.e. , E是X的可测子集且$\mu^*(E)<\infty$, 则对$\varepsilon>0$, 存在E的可测子集F, 使得$\mu^*(F)<\varepsilon$且$\{f_n\}$ 在E/F上一致收剑于f.

定理17.2(积分的线性性)　若ϕ 和ψ 是阶梯函数, 那么对所有的$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $I(\alpha\phi+\beta\psi)=\alpha I(\phi)+\beta I(\psi)$ 成立.

定理17.3 (积分的单调性)　对阶梯函数ϕ 和ψ , 下列结论成立:

(1) 若$\phi\geqslant\psi$ a.e., 则$I(\phi)\geqslant I(\psi)$;

(2) 若$\phi=\psi$ a.e., 则$I(\phi)=I(\psi)$.

定理17.4(积分的有序连续性)　设$\{\phi_n\}$ 是阶梯函数列. 如果$\phi_n\downarrow 0$ a.e., 那么$I(\phi_n)\downarrow 0$. 特别是, 若ϕ 是阶梯函数并且$\phi_n\uparrow\phi$ a.e., 那么$I(\phi_n)\uparrow I(\phi)$.

定理17.5　设$f: X\to\mathbb{R}^*$ 是已知的函数, 如果两个简单函数列$\{\phi_n\}$ 和$\{\psi_n\}$ 满足$\phi_n\uparrow f$ a.e.和$\psi_n\uparrow f$ a.e., 那么$\lim I(\phi_n)=\lim I(\psi_n)$ 成立, 其中极限可能是无穷.

定理17.6　设$\{\phi_n\}$ 是阶梯函数列. 如果A是X的子集使得$\phi_n\uparrow\chi_A$ a.e., 那么A是可测集, 并且$\lim I(\phi_n)=\mu^*(A)$.

定理17.7　如果$f: X\to\mathbb{R}$ 是可测函数, $f(x)\geqslant 0, x\in X$, 则存在简单函数序列$\{\phi_n\}$, 使得$0\leqslant\phi_n(x)\uparrow f(x)$ 对所有$x\in X$ 成立.

定理18.2　$\mathbb{R}^n$ 的子集E 是Lebesgue可测的当且仅当对一切$\varepsilon>0$, 存在一个开集$\mathcal{O}$使得$E\subseteq\mathcal{O}$, 并且$\lambda(\mathcal{O}/E)<\varepsilon$.

引理18.7　设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可加的函数. 如果f 在原点连续, 那么存在一个常数c 使得$f(x)=cx$ 对所有的$x\in\mathbb{R}$ 成立.

尤其是, 如果$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 对每个变量在原点连续并且是可加的, 那么存在一个常数c 使得

$$f(x_1,\cdots,x_n)=cx_1\cdot\cdots\cdot x_n$$

对所有的$(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ 成立.

Zorn引理　如果偏序集X 中每个链都有上界, 那么X 有一个极大元.

定理18.8　设μ 是$\mathbb{R}^n$ 上的平移不变的Borel测度, 那么存在常数c 使得对$\mathbb{R}^n$ 的每个Borel集A 有$\mu(A)=c\lambda(A)$ 成立.

定理18.13　如果E 是$\mathbb{R}^n$ 的Lebesgue可测集使得$\lambda(E)>0$, 那么零向量($\mathbb{R}^n$ 中的原点)是$E-E$ (即, $\{x-y: x,y\in E\}$)的内点.

定理19.4　设$\{f_n\}$ 是可测函数列, $f\in\mathcal{M}$, 如果$f_n\xrightarrow{\mu}f$, 那么存在$\{f_n\}$ 的一个子列$\{f_{k_n}\}$ 使得$f_{k_n}\to f$ a.e.成立.

定理19.5　假设$\mu^*(X)<\infty$. 如果可测函数列$\{f_n\}$ 满足$f_n\to f$ a.e., 那么$f_n\xrightarrow{\mu}f$ 也成立.

定理20.6　设$f:(X_1,\Sigma_1)\to(X_2,\Sigma_2)$ 是两个可测空间之间的函数, $\mathcal{F}$是Σ_2 的生成元族, 即, $\sigma(\mathcal{F})=\Sigma_2$. 那么f可测当且仅当对一切$A\in\mathcal{F}$, $f^{-1}(A)\in\Sigma_1$ 成立.

引理20.8(Dynkin引理) 设$\mathcal{D}$是一个Dynkin系统并且$\mathcal{F}$是一个集族使得$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$. 如果$\mathcal{F}$在有限交下封闭, 那么由$\mathcal{F}$生成的$\sigma$ 代数$\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{D}$.

推论20.10 设Σ 是X的子集σ 代数, 并且$\mathcal{F}$是Σ 的生成元族(即$\sigma(\mathcal{F}) = \Sigma$), 它在有限交下是封闭的. 那么Σ 上的两个测度μ 和ν 相同当且仅当

(1) $\mu(X) = \nu(X)$;

(2) $\mu(F) = \nu(F)$ 对一切$F \in \mathcal{F}$ 成立.

定理20.15 设(X, Σ) 是可测空间, Y是可分的度量空间, Z是度量空间, 那么每个Carathéodory 函数$f: X \times Y \to Z$ 都是联合可测的.

定理21.5 如果f和g是上函数且满足$f \geqslant g$ a.e., 那么$\int f\mathrm{d}\mu \geqslant \int g\mathrm{d}\mu$ 成立. 特别地, 如果$f \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$表示所有上函数构成的函数类)满足$f \geqslant 0$ a.e., 那么$\int f\mathrm{d}\mu \geqslant 0$.

定理21.6 对于函数$f: X \to \mathbb{R}$, 如果存在一个上函数列$\{f_n\}$使得$f_n \uparrow f$ a.e., 并且$\lim \int f_n\mathrm{d}\mu < \infty$, 那么$f$是上函数并且$\int f\mathrm{d}\mu = \lim \int f_n\mathrm{d}\mu$.

定理22.2 所有Lesesgue可积函数构成的函数族是一个函数空间.

定理22.5 如果f是可积函数, 那么对每个$\varepsilon > 0$, 可测集$\{x \in X : |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$ 有有限测度.

定理22.6 设f是可测函数. 如果存在两个可积函数h, g使得$h \leqslant f \leqslant g$ a.e., 则f也是可积函数.

定理22.7 对可积函数f和g, 我们有如下性质:

(1) $\int |f|\mathrm{d}\mu = 0$ 当且仅当$f = 0$ a.e.;

(2) 如果$f \geqslant g$ a.e., 那么$\int f\mathrm{d}\mu = \int g\mathrm{d}\mu$;

(3) $\left|\int f\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int |f|\mathrm{d}\mu$.

定理22.9 设$\{f_n\}$是非负可积函数列, 如果$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\mathrm{d}\mu < \infty$, 那么$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 定义了一个可积函数, 并且$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\mathrm{d}\mu$.

定理22.12 设$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间, (P)是一个关于可积函数的性质. 假设:

(1) 如果f和g都是具有性质(P)的可积函数, 那么$f + g$以及$\alpha f, \alpha \in \mathbb{R}$, 也具有性质(P);

(2) 如果f是可积函数, 并且对每个$\varepsilon > 0$ 存在具有性质(P)的可积函数g使得$\int |f - g|\mathrm{d}\mu < \varepsilon$, 那么$f$也具有性质$(P)$;

(3) 对一切$A \in \mathcal{S}$, $\mu(A) < \infty$, 特征函数χ_A 具有性质(P). 那么每个可积函数都具有性质(P).

定理23.6 每个Riemann可积函数都是Lebesgue 可积的, 并且它的Lebesgue 积分与Riemann积分相同.

定理23.7(Lebesgue-Vitali) 一个有界函数$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ 是Riemann可积的当且仅当它是几乎处处连续的.

定理24.3 设$f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ 在$[a, \infty)$ 的每个闭子区间上是Riemann可积的. 那么f 是Lebesgue可积的充要条件是广义积分$\int_a^{\infty} |f|\mathrm{d}x$ 存在. 并且, 这时有

$$\int f\mathrm{d}\lambda = \int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

定理24.4 设$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间, J是$\mathbb{R}$的子区间, 函数$f: X \times J \to \mathbb{R}$ 使得对每个$t \in J$, $f(x, t)$ 作为x 的函数是可测的, 另外假设存在一个可积函数g, 使得对每个$t \in J$ 有$|f(x, t)| \leqslant$

$g(x)$ 对几乎所有的x 成立. 如果对J 的某个聚点(可能包括$\pm\infty$) t_0, 存在一个函数$h(x)$, 使得$\lim_{t\to t_0} f(x,t) = h(x)$ 对几乎所有的x 在$\mathbb{R}$中存在, 那么h 是可积的并且

$$\lim_{t\to t_0} \int f(x,t)\mathrm{d}\mu(x) = \int \lim_{t\to t_0} f(x,t)\mathrm{d}\mu(x) = \int h\mathrm{d}\mu.$$

定理24.5 设$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间并且$f: X\times(a,b)\to\mathbb{R}$ 使得$f(x,t)$ 对每个$t\in(a,b)$ 作为x的函数是Lebesgue可积的. 假设对某个$t_0\in(a,b)$, 偏导数$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ 对几乎所有的x存在. 还假设存在一个可积函数g和t_0的一个邻域V使得对每个$t\in V$ 我们有$\left|\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}\right|\leqslant g(x)$ 对几乎所有的$x\in X$ 成立. 那么, $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ 关于x是可积的并且$F(t)=\int f(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$ 在t_0点可导, 且

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\mathrm{d}\mu(x).$$

定理24.8 如果$t\geqslant 0$, 那么

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \arctan t.$$

定理25.2 设L是所有阶梯函数构成的函数空间, f是可积函数, 那么, 对任何$\varepsilon>0$, 存在$\phi\in L$ 使得$\int|f-\phi|\mathrm{d}\mu<\varepsilon$.

定理25.3 设X是局部紧的Hausdorff拓扑空间, μ 是X上的正则的Borel测度. 假设f是测度空间 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 的可积函数. 那么给定$\varepsilon>0$, 存在具有紧支集的连续函数$g: X\to\mathbb{R}$ 使得$\int|f-g|\mathrm{d}\mu<\varepsilon$.

定理26.1 对每个$A\times B\in\mathcal{S}\otimes\Sigma$, 定义集函数$\mu\times\nu:\mathcal{S}\otimes\Sigma\to[0,\infty)$ 为

$$\mu\times\nu(A\times B) = \mu(A)\cdot\nu(B),$$

那么$\mu\times\nu$ 是$\mathcal{S}\otimes\Sigma$ 上的测度.

定理26.2 设$(X\times Y,\mathcal{S}\otimes\Sigma,\mu\times\nu)$是测度空间, $(\mu\times\nu)^*$ 是由该测度空间生成的外测度. 如果$A\subseteq X$ 和$B\subseteq Y$ 是具有有限测度的可测集, 那么

$$(\mu\times\nu)^*(A\times B) = \mu^*\times\nu^*(A\times B) = \mu^*(A)\cdot\nu^*(B).$$

定理26.3 如果A是X的μ 可测子集, B是Y的ν 可测子集, 那么$A\times B$ 是$X\times Y$ 的$\mu\times\nu$ 可测子集.

定理26.4 设E是$X\times Y$ 的$\mu\times\nu$ 可测子集满足$(\mu\times\nu)^*(E)<\infty$. 那么对μ 几乎所有的x, 集合E_x(称为E的x截口, 定义为$E_x=\{y\in Y:(x,y)\in E\}$)是Y的ν 可测子集, 并且函数$x\mapsto\nu^*(E_x)$ 是X上的可积函数满足

$$(\mu\times\nu)^*(E) = \int_x \nu^*(E_x)d\mu(x).$$

类似地, 对ν 几乎所有的y集合E^y(称为E的y截口, 定义为$E^y=\{x\in X:(x,y)\in E\}$) 是$X$的$\mu$ 可测子集, 并且函数$y\mapsto\mu^*(E^y)$是Y 上的可积函数满足

$$(\mu\times\nu)^*(E) = \int_Y \mu^*(E^y)d\nu(y).$$

定理26.6(Fubini) 设$f: X\times Y\to\mathbb{R}$ 是$\mu\times\nu$可积函数, 那么两个累次积分存在并且

$$\int f\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\int\int f\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu=\int\int f\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\mu$$

定理26.7(Tonelli) 设$(X,\mathcal{S},\mu)$和(Y,Σ,ν) 是两个σ 有限测度空间, $f: X\times Y\to\mathbb{R}$ 是$\mu\times\nu$可测函数. 如果累次积分$\int\int|f|\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu$和$\int\int|f|\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\mu$ 中的一个存在, 那么f是$\mu\times\nu-$ 可积的, 并且另一个累次积分也存在而且

$$\int f\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\int\int f\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu=\int\int f\mathrm{d}\nu\mathrm{d}u$$

定理27.7 赋范空间的每一个有限维向量子空间是闭的.

闭图像定理 设X和Y是Banach空间, $T: X\to Y$ 为线性算子. 如果T的图是$X\times Y$ 的闭子空间, 则T是有界算子.

定理28.6 对于两个赋范空间之间的线性泛函, 以下命题等价: (1) T是有界算子; (2) 存在实数$M\geqslant 0$使得$\|T(x)\|\leqslant M\|x\|$ 对所有$x\in X$ 成立; (3) T在0处连续; (4) T是连续的.

定理28.7 设X和Y是两个赋范空间, 则$L(X,Y)$是一个赋范向量空间. 而且, 如果Y是Banach空间, 则$L(X,Y)$ 同样是Banach 空间.

定理28.8 设X是Banach空间, Y是赋范空间. $L(X,Y)$的子集是范数有界的, 当且仅当它是逐点有界的.

定理29.2(Hahn-Banach) 设p是向量空间X上的次线性映射, Y是X的向量子空间. 如果f是Y 上的线性泛函, 并且满足$f(x)\leqslant p(x)$, $x\in Y$, 则f能开拓成X上的线性泛函g, 满足$g(x)\leqslant p(x)$, $x\in X$.

定理29.4 如果x是某个赋范空间X中的向量, 则存在X上的连续线性泛函f, 使得$\|f\|=1$ 且 $f(x)=\|x\|$.特别地, X^*分离X的点.

定理29.5 设Y是赋范向量空间X的向量子空间, 设$x_0\notin\bar{Y}$, 则存在某个$f\in X^*$使得$f(x)=0, x\in Y$且$f(x_0)=1$.

定理29.8 设A是赋范空间X的子集使得$\{f(x): x\in A\}$ 对每个$f\in X^*$ 是$\mathbb{R}$的有界子集, 则A是X的范数有界的子集.

定理30.1 如果$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$是向量格中的3个向量, 则下面的不等式成立:

(1) $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$

(2) $||\boldsymbol{x}|-|\boldsymbol{y}||\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$

(3) $|\boldsymbol{x}^+-\boldsymbol{y}^+|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$

(4) $|\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\vee\boldsymbol{z}|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$

(5) $|\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$.

定理30.3 设X是向量格, f是正线性泛函, 则对$x\in X$, 下列等式成立: $f(x^+)=\sup\{g(x): g\in X^\sim$且$0\leqslant g\leqslant f\}$, $f(x^-)=\sup\{-g(x): g\in X^\sim$且$0\leqslant g\leqslant f\}$和$f(|x|)=\sup\{g(x): g\in X^\sim$且$|g|\leqslant f\}$.

定理30.13(Korovkin) 设$\{T_n\}$ 是从$C[0,1]$到$C[0,1]$的正算子列. 如果当$f=1$, x和x^2时, $\lim T_nf=f$ 成立, 则$\lim T_nf=f$ 对所有$f\in C[0,1]$ 成立.

引理31.6 如果序列$\{f_n\} \subseteq L_p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$ 满足$\lim \|f - f_n\|_p = 0$，则存在$\{f_n\}$ 的子序列$\{f_{k_n}\}$ 和某个$g \in L_p(\mu)$ 使得$f_{k_n} \to f$ a.e., 且对每n, $|f_{k_n}| \leqslant g$ a.e..

定理31.11 设μ 是局部紧的Hausdorff拓扑空间X 上的正则Borel测度, 则所有具有紧支集的连续函数全体在$L_p(\mu)$，$1 \leqslant p < \infty$ 上范数稠密.

定理31.14 设$(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是有限测度空间, $1 \leqslant p < q < \infty$，则$L_q(\mu) \subseteq L_p(\mu)$.

定理32.6 向量空间上的范数$\|\cdot\|$由内积诱导, 当且仅当它满足平行四边形法则, 即, $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2)$.

定理33.6 如果A是Hilbert空间H的非空闭凸子集, 则对每个$x \in H$，存在唯一的$y \in A$ 使得$d(x, A) = \|x - y\|$.

定理33.7 如果M是Hilbert空间H的闭子集, 则我们有$H = M \oplus M^{\perp}$.

定理33.9 设H是Hilbert空间, $f : H \to C$ 是连续线性泛函, 则存在唯一的向量$y \in H$，使得$f(x) = (x, y)$ 对所有$x \in H$ 成立. 而且, 我们有$\|f\| = \|y\|$.

定理33.12 设$\rho : [a, b] \to (0, \infty)$ 是可测权函数, 使得$\{1, x, x^2, x^3, \cdots\} \subseteq L_2(\rho)$. 设$P_0, P_1$, P_2 是非零多项式列并满足:

(a) P_n 的次数为n;

(b) $(P_n, P_m) = \int_a^b \rho(x) P_n(x) \overline{P_m(x)} \mathrm{d}x = 0, n \neq m$.

则正交列$P_0, P_1, P_2, \cdots$ 完备, 且等于(不考虑常数因子)通过对线性无关的函数列$\{1, x, x^2, x^3, \cdots\}$ 施行Gram-Schmidt正交化过程获得的正交函数列.

定理34.1 对Hilbert空间中向量的正交族$\{e_i\}_{i \in I}$，下列命题等价:

① $\{e_i\}_{i \in I}$ 是正交基;

② 如果对每个$i \in I$，有$\boldsymbol{x} \perp e_i$, 则$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$;

③ 对每个向量$\boldsymbol{x}$, 我们有$(\boldsymbol{x}, e_i) \neq 0$ 对至多可数个指标i成立, 且$\boldsymbol{x} = \sum_{i \in I} (\boldsymbol{x}, e_i) e_i$, 其中级数在范数的意义下收敛;

④ 对每对向量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$, 我们有$(\boldsymbol{x}, e_i) \neq 0, (\boldsymbol{y}, e_i) \neq 0$ 对至多可数个指标成立, 且$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i \in I} (\boldsymbol{x}, e_i) \overline{(\boldsymbol{y}, e_i)}$;

⑤ (Parseval等式)对每个向量$\boldsymbol{x}$, 我们有$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i \in I} |(\boldsymbol{x}, e_i)|^2$.

定理34.4 无限维Hilbert空间H是可分的, 当且仅当它有可数正交基. 而且, 在这种情形下, H的每一组正交基是可数的.

定理34.9 每个Hibert空间与形如$\ell_2(Q)$ 的Hilbert空间线性等距. 特别地, 如果$\{e_i\}_{i \in I}$ 是H 的正交基, 则线性算子$L : H \to \ell_2(I), L(x) = \{(x, e_i)\}_{i \in I}$ 是满射的线性等距.

定理35.8 设$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ 是可积的周期函数, 则f的Fourier级数的部分和的算术平均列$\{\sigma_n\}$ 在$\sigma_f(x)$ 存在的点x处满足 $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n(x) = \sigma_f(x) = \lim\limits_{u \to 0+} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}$. 而且, 如果$f$在$[0, 2\pi]$ 的某个闭子区间$[a, b]$ 上连续, 则$\{\sigma_n\}$ 在$[a, b]$ 上一致收敛于f.

推论35.9 设$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ 是可积的周期函数. 假设f的Fourier级数在某个点x处收敛且$\sigma_f(x)$ 存在, 则

$$\sigma_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

特别地, 如果该Fourier级数在f的某个连续点x处收敛, 则

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{-inx}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

定理36.2 如果测度列$\{\mu_n\}$ 满足μ_n 单调增加(即, $\mu_n\leqslant\mu_{n+1}, n=1,2,\cdots,$), 则集合函数$\mu:\Sigma\to[0,\infty], \mu(A)=\lim\mu_n(A)$, $A\in\Sigma$ 是测度. 此外, $\mu_n\uparrow\mu$, 即μ 是序列$\{\mu_n\}$ 的最小上界.

定理36.9 设μ 是Σ 上的符号测度, 则对每一个$E\in\Sigma$, 下面的式子成立:

(1) $\mu^+(E)=\sup\{\mu(F):F\in\Sigma$且$F\subseteq E\}$;

(2) $\mu^-(E)=\sup\{-\mu(F):F\in\Sigma$且$F\subseteq E\}$;

(3) $|\mu|(E)=\sup\{\sum|\mu(F_i)|:\{F_i\}\subseteq\Sigma$是有限的, 互不相交且$\cup F_i\subseteq E\}$.

定理37.2 对于每一对符号测度μ,ν , 下列命题等价:

(a) $\nu\ll\mu$;

(b) $\nu^+\ll|\mu|$ 且$\nu^-\ll|\mu|$;

(c) $|\nu|\ll|\mu|$.

定理37.3 对σ 代数Σ 上的两个测度μ,ν, 我们有如下结论:

(a) 如果$\nu\ll\mu$ 且X 的子集E 满足$\mu^*(E)=0$, 则$\nu^*(E)=0$;

(b) 如果$\nu\ll\mu$, μ 是σ 有限的, 则$A_\mu\in\Lambda_\nu$. 特别地, 在这种情形下, 每个μ 可测函数也是ν 可测的.

定理37.5 两个符号测度μ,ν正交, 当且仅当$|\mu|\wedge|\nu|=0$.

定理37.7 设μ,ν 是Σ上σ 有限测度, 则存在两个唯一的测度ν_1,ν_2 , 使得$\nu=\nu_1+\nu_2$, 其中$\nu_1\ll\mu,\nu_2\perp\mu$.

定理37.9 设$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间, $1<p<\infty$, 设F是$L_p(\mu)$ 上的连续线性泛函, 则存在一个唯一的$g\in L_q(\mu)$, 其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 使得$F(f)=\int fg\mathrm{d}\mu$ 对所有$f\in L_p(\mu)$成立. 此外, $||f||=||g||_q$.

定理37.10 设$(X,\mathcal{S},\mu)$ 是σ有限测度空间, F是$L_1(\mu)$ 上的连续线性泛函, 则存在唯一的$g\in L_\infty(\mu)$ 使得$F(f)=\int fg\mathrm{d}\mu, f\in L_1(\mu)$, 而且$||F||=||g||_\infty$, 即$L_1^*(\mu)=L_\infty(\mu)$.

定理38.5 对于X上的两个正则Borel测度μ 和ν , 我们有下面的结论:

(1) 对$\alpha\geqslant0$, $\mu+\nu$ 和$\alpha\mu$ 是正则Borel测度;

(2) $\mu\vee\nu$ 是正则Borel测度;

(3) 如果μ 和ν 是σ 有限的, 则$\mu\wedge\nu$ 也是正则Borel测度.

引理38.6 设$T:X\to Y$ 是两个向量格之间的一一的线性算子, 如果T 和T^{-1} 都是正的, 则T 是格同构.

引理39.3 设μ 是$\mathbb{R}^k$ 上的Borel测度, A 是Borel集, $\mu(A)=0$, 则对几乎所有A 中的点x, $\mathrm{D}\mu(x)=0$.

定理39.4 每个$\mathbb{R}^k$ 上的有限的Borel符号测度μ 如果关于Lebesgue测度绝对连续(即, $\mu\ll\lambda$), 则它是几乎处处可微的. 此外, 它的导数$\mathrm{D}\mu$ 等于Radon-Nikodym导数$\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\lambda$, 即$\mathrm{D}\mu=\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\lambda$.

定理39.6 $\mathbb{R}^k$ 上的每个Borel符号测度μ 几乎处处可微. 而且, 如果$\mu = \mu_1 + \mu_2$ 是μ的Lebesgue 分解(即$\mu_1 \ll \lambda, \mu_2 \perp \lambda$), 则$\mathrm{D}\mu_2 = 0$ a.e.且$\mathrm{D}\mu = \mathrm{D}\mu_1 = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ a.e..

定理39.8 设$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是单调增加的左连续函数. x_0 是实数, 则Borel测度μ_f 在x_0 点可微, 当且仅当f 在x_0 点可微. 而且, 在这种情形下, $\mathrm{D}\mu_f(x_0) = f'(x_0)$.

定理39.9 每个单调函数几乎处处可微.

定理39.12 对于有界变差的连续函数$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, 下面的命题等价,

(1) μ_f 关于Lebesgue测度绝对连续.

(2) 对于任意的$\varepsilon > 0$, 存在某个$\delta > 0$ 使得如果$(a_1, b_1), \cdots, (a_n, b_n)$ 是$[a,b]$中互不相交的开子区间且$\sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$, 则$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.

定理39.14 对绝对连续函数$f: [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, 下面的命题成立:

(1) f 是有界变差的函数, 因此, $AC[a,b]$ 是$BV[a,b]$ 的子向量格;

(2) 变差函数$V_f(\cdot)$是绝对连续的, 因此f 是两个单调增加绝对连续函数的差.

定理39.15 函数$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ 是绝对连续的, 当且仅当$f' \in L_1[a,b]$, 且$f(x) - f(a) = \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t$ 对每个$x \in [a,b]$成立.

引理40.1 设$V \subseteq \mathbb{R}^k$ 是开集, $T: V \to \mathbb{R}^k$ 是C^1 可微函数. 如果$A \subseteq V, \lambda(A) = 0$, 则$\lambda(T(A)) = 0$.

引理40.4 如果$A: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ 是一个线性算子(我们把它看成一个矩阵), 则对于$\mathbb{R}^k$ 的所有Lebesgue 可测子集E, $\lambda(A(E)) = |\det A| \cdot \lambda(E)$.

定理40.8 设$T: A \to B$ 是$\mathbb{R}^k$ 的两个Lebesgue可测子集之间的映射, 假设存在两个开集$V \subseteq A$ 和$W \subseteq B$ 使得$T(V) = W, T: V \to W$ 是微分同胚且$\lambda(A \backslash V) = \lambda(B \backslash W) = 0$, 则对于每个$f \in L_1(B)$, 函数$(foT) \cdot |J_T|$ (在A 上几乎处处有定义)属于$L_1(A)$, 且$\int_B f\mathrm{d}\lambda = \int_A (foT) \cdot |J_T| \mathrm{d}\lambda$.